

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

15 - 035

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

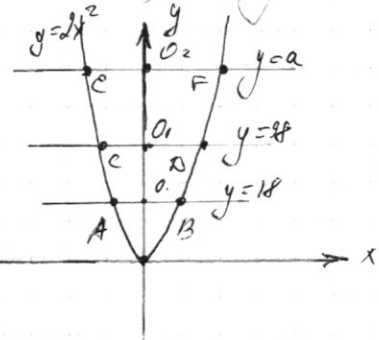


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Если дана парабола  $2x^2$  и три прямые  $y=98$ ,  $y=18$ ,  $y=a$ , так же сказано, что парабола пересекает эти прямые, следовательно, у них есть общие точки, т.е. пара

$$1) 18 = 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

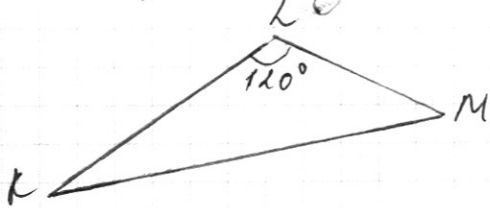
$$2) 98 = 2x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -7 \end{cases}$$



Из первого пункта следует, что парабола пересекает прямую  $y=18$  в точках с координатами  $(-3; 18)$  и  $(3; 18)$ , следовательно, отрезок  $AB = AO + OB = 3 + 3 = 6$

То же самое с отрезком  $CD = CO + OD = 7 + 7 = 14$

Значит, нам известно



две стороны и нужно найти третью.  
1) Пусть в треугольнике  $KLM \angle KLM = 120^\circ$ , а сторона  $KL = 14$ ,  $LM = 6$ , тогда по теореме косинусов найдем  $KM$ :

$$KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos \angle KLM$$

$$KM^2 = 196 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos(90^\circ + 30^\circ) =$$

$$= 232 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot (-\sin 30^\circ) = 232 + 6 \cdot 14 = 316 \Rightarrow KM = 2\sqrt{79}$$

2) Теперь пусть  $KM = 14$ ,  $KL = 6$ , тогда  $KM^2 = KL^2 + LM^2 - 2 \cdot KL \cdot LM \cdot \cos 120^\circ$ , то есть  $196 = 36 + LM^2 - 2 \cdot 6 \cdot LM \cdot (-\frac{1}{2}) \Rightarrow LM^2 + 6LM + 160 = 0$   
 $= 36 + 640 = 676 \Rightarrow \begin{cases} LM = \frac{-6 + 26}{2} = 10 \\ LM = \frac{-6 - 26}{2} = -16 \end{cases}$  (не подходит, т.к. сторона не может быть отрицательной)

Следовательно,  $LM = 10$

3) Теперь рассмотрим случай, когда  $KM = 6$ ,  $KL = 14$ , найдем, что  $36 = 196 + LM^2 - 2 \cdot 14 \cdot LM \cdot (-\frac{1}{2}) \Rightarrow LM^2 + 24LM + 160 = 0 \Rightarrow D = 136 - 160 < 0$  (корней нет)

4) Следовательно  $\begin{cases} a = 10 \\ a = 2\sqrt{79} \end{cases}$ , но по правилу стороны треугольника

(сумма двух сторон треугольника должна быть больше третьей стороны, тогда этот треугольник существует), проверим

1)  $6 + 14 = 20$ , при  $a = 20$  треугольника не существует

2)  $6 + 14 = 20$ ,  $a = 2\sqrt{79} \approx 17$ , удовлетворяет правилу

Ответ:  $2\sqrt{79}$ .

№3 В этом симметричном случае на первом месте может стоять только 7 или 8, если будет стоять нуль,

то это будет ~~16-значное~~ число. Бо есть уже есть 2 цифры, когда на первом месте, 8 или 7.

1) Рассмотрим случай, когда 8 на первом месте, тогда первые семь цифр занимает восьмерка (по условию) следовательно нас останется 10 мест, где можем поставить 0 или 7 (так 8 мы уже использовали)  $\Rightarrow$   $\Rightarrow$  количество случаев равно  $2^{10} = 1024$ , но нам не подходит 2 случая, когда на остальных 10 местах стоят все нули или все семерки, т.к. нам нужно использовать все числа  $\Rightarrow$  - 2 случая. Значит, всего 1022 случая

2) Рассмотрим ситуацию же, когда на первом месте 7, тогда "группа восьмерок" может перемещаться по месту и занимать 8 позиций. Например,

78888888 077070077 или 70070888888870777

Тогда, на оставшихся местах (а их останется 9) мы можем поставить 0 или 7  $\Rightarrow 2^9 = 512$ , но нас не устраивает вариант, когда на первом месте 7, а на остальных девяти тоже семь. Значит - 1 случай  $\Rightarrow 9 \cdot 512 - 1 = 4607$

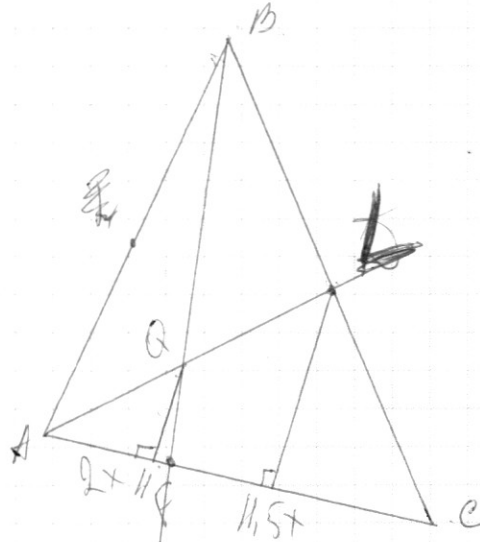
Теперь складываем:  $4607 + 1022 = 5629$

Ответ: 5629.

№1 Итак, чтобы разность двух чисел была кратна 45, они не обязательно равны 45; 90; 135; 180. Так как сумма тридцати выбранных чисел была наименьшей, нужно выбрать наименьшие числа из промежутков. Следовательно, чтобы ~~выбранные числа не равны~~ разность двух выбранных чисел не была кратна 45 нужно выбрать числа 13; 14; 15; 16; 17; 18 и 9 первого промежутка; 52; 53; 54; 55; 56; 57; ~~58~~ и второго промежутка; 97; 98; 99; 100; 101; 102 и третьего промежутка; 181; 182; 183; 184; 185; 186 и четвертого промежутка; 136; 137; 138; 139; 140; 141 и пятого промежутка. Сумма этих чисел равна 2961.

Ответ: 2961.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{S_{BQZ}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$$

$$QH = 6$$

$$LH_1 = ?$$

$$S_{BAC} = \frac{7x \cdot h}{2}$$

$$S_{BAF} = \frac{2x \cdot h}{2}$$

$$h = \frac{2 S_{BAC}}{7x}$$

$$h = \frac{S_{BAF}}{x}$$

$$2 S_{BAC} \cdot x = 7x S_{BAF}$$

$$\frac{S_{BAC}}{S_{BAF}} = \frac{7}{2}$$

$$S_{AFC} = \frac{LH_1 \cdot 7x}{2}$$

$$\frac{S_{AFC}}{S_{BAC}} = \frac{LH_1 \cdot 7x \cdot 2}{2 \cdot 7x \cdot h} = \frac{LH_1}{h}$$

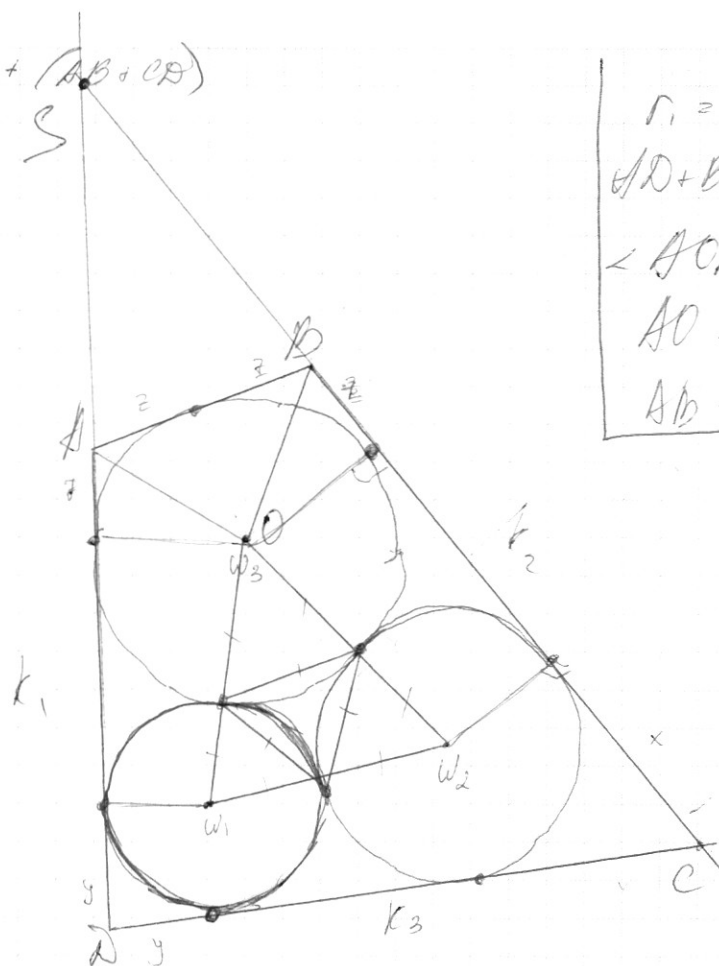
$$S_{BAF} = \frac{6 \cdot 2x}{2} = 6x$$

$$S_{AFC} = \frac{LH_1 \cdot 7x}{2}$$

$$\frac{S_{BAF}}{S_{AFC}} = \frac{6x \cdot 2}{LH_1 \cdot 7x} = \frac{12}{LH_1 \cdot 7}$$

$$AD + BC = 12 + (AB + CD)$$

Σ



$$r_1 = r_2 = r_3 = ?$$

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$\angle AOB = ?$$

$$AO \cdot BO = 58$$

$$AB = ?$$

$$AD - AB = z + y + k_1 - 2z$$

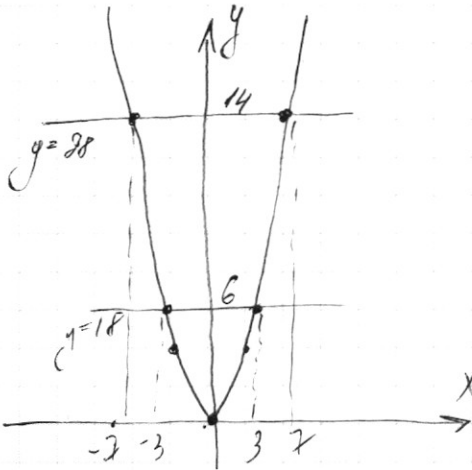
$$z + y + k_1 + z + x + k_2 - 2z - y - x - k_3 = 12$$

$$k_1 + k_2 - k_3 = 12$$

$$2r = 12$$

$$r = 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

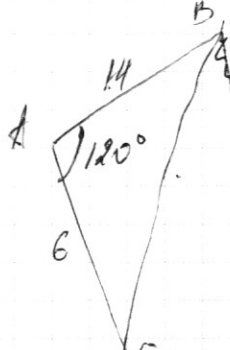


$$18 = 2x^2$$

$$x = \pm 3$$

$$98 = 2x^2$$

$$x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7$$



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

$$BC = \sqrt{196 + 36 - 84 \cdot 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right)}$$

$$= \sqrt{232 + 168 \cdot \sin 30^\circ}$$

$$= \sqrt{232 + 84} = \sqrt{316} \approx 17.8$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 14 \\ \hline 28 \\ + 232 \\ \hline 316 \\ - 28 \\ \hline 36 \\ \times 4 \\ \hline 160 \\ + 640 \\ \hline 196 \\ \hline 836 \mid 4 \\ \hline 8 \\ \hline 36 \mid 209 \end{array}$$

$$2) \quad 36 = 196 + AC^2 - 28AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$AC^2 - 14AC + 160 > 0$$

$$D = 196 - 160 \cdot 4 < 0 \quad \times$$

$$3) \quad 196 = 36 + AC^2 - 28AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$AC^2 - 14AC - 160 > 0$$

$$D = 196 + 160 \cdot 4 = 2\sqrt{109} \approx 28 \times$$

$$2x^2 = a$$

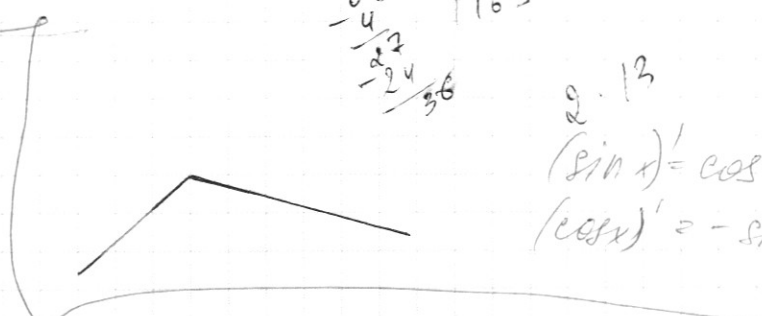
$$x = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ + 140 \\ \hline 196 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \mid 4 \\ - 4 \\ \hline 272 \\ - 272 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 13 \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = -\sin x \end{array}$$

$$p'(x) = \sqrt{x+7} - x > 0$$



$$5) \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) - \log_{x+4} (x+4) \geq 0$$

$$\frac{1}{\log_{x+4} (\sqrt{x+7}-x)} - \log_{x+4} (x+4) \geq 0$$

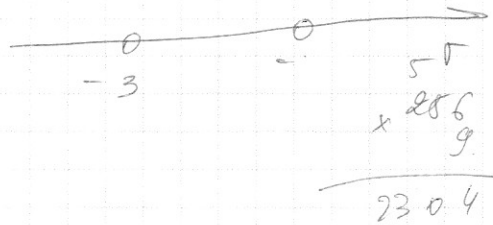
$$\frac{1 - \log_{x+4} (\sqrt{x+7}-x)}{\log_{x+4} (\sqrt{x+7}-x)} \geq 0$$

$$\log_{x+4} (\sqrt{x+7}-x) \neq 0$$

$$\sqrt{x+7}-x \neq 1$$

$$x+4 \neq 1$$

$$x \neq -3$$



2) F  
1) P

$$2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 2^{10} = 1024$$

$$2) 1 \cdot 2^9 = 512 \cdot 9 = 4608$$

$$2) 1 \cdot 2^9 = 512$$

$$\begin{array}{r} \times 512 \\ 9 \\ \hline 4608 \\ + 1024 \\ \hline 5632 \\ \phantom{00} 3 \\ \hline 5629 \end{array}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$2 - 2 \sin x \cos x = -\sin 2x$$

$$\sin(3x) \cdot \sin(3x+4x) - \sin^2 x + \cos^2(3x+2x) + 4 =$$

$$= \sin 3x \cdot (\sin 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x) - \sin^2 x + (\sin 3x \cdot \sin 2x - \cos 3x \cdot \cos 2x) + 4$$

$$= \sin^2 3x \cdot \cos 4x + \cos 3x \cdot \sin 4x \cdot \sin 3x - \sin^2 x - \cos 3x \cdot \cos 2x + 4$$

$$\sin(x+x) \cdot \sin(x) \quad 0 \neq 45, 90, 135, 180, 225$$

$$x - y = a, \quad a \neq 45$$

123	4566
46	47484950157
91	92 93 94 95 96 97
136	137 138 139 140 141
181	182 183 184 185 186

$$a \cdot 100 + 10b + c - 100d - 10e - f = 45k + 0$$

- 1) ~~989~~ 10 11 12    2) ~~46 47 48 49 50 51~~    3) 97; 98; 99; 100; 101; 102
- 4) 136; 137; 138; 139; 140; 141
- 5) 181; 182; 183; 184; 185; 186

$$50 \cdot 6 + 240 \cdot 6 + 387 \cdot 3 = 420 + 1440 + 1161 = 2961$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ + 6 \\ \hline 144 \end{array} \quad \begin{array}{r} 22 \\ 367 \\ + 3 \\ \hline 1101 \\ + 1440 \\ + 420 \\ \hline 2961 \end{array}$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-035
--------

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Blank grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-035

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)