МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-12

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(-\sin 4x + \sin 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$= \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 x + 8)$

$= \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 8) =$

$= \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x + 2\cos 2x + 8)$

$10\cos 10x - 4\cos 4x - 2\sin 2x +$

$\frac{1}{2}$

$\sin 10x - \sin 4x + \cos 2x + \cos 5 10x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y_x = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$2y_x = 2\sin 3x \sin 7x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8$

$2y_x = 2\sin 3x \sin 7x \cancel{-1} + \cos 2x \cancel{+1} + \cos 10x + 8.$

$\cancel{2y_x = 2\sin 3x \sin 7x + 2\cos 2x + 8.}$

$\cancel{2y_x = \frac{2}{2}(\sin 10x - \sin 4x) + 2\cos 2x + 8.}$

$\cancel{= \sin 10x - \sin 4x + 2\cos 2x + 8.}$

$2y_x = 2\sin 3x \sin 7x + \cos 2x + \cos 10x + 8.$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

~~cos~~

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\sin\alpha \sin\beta =$

$\sin(x-y) + \sin(x+y) = 2\sin x \cos y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$

$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$y_x = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$y_x = \frac{1}{2}(-\sin 4x + \sin 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$= \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8)$

$= \frac{1}{2}(\sin 10x - \sin 4x - 1 + \cos 2x + 2\cos^2 5x + 8)$

$y'_x = \frac{1}{2}(10\cos 10x - 4\cos 4x - 4\cos x \cdot \sin x - 4\cos 5x \sin 5x)$

$= \frac{1}{2}(10\cos 10x - 4\cos 4x - 2\sin 2x - 2\cos 10x)$

$\frac{1}{2}(8\cos 10x - 4\cos 4x - 2\sin 2x) = 0.$

$8\cos 10x = 4\cos 4x + 2\sin 2x$

$8\cos 10x = 2\sin 2x\cos 2x + 2\sin 2x.$

$8\cos 10x = 2\sin 2x(1 + \cos 2x).$

$\cancel{8}^{2}\cos 10x = \cancel{2}\sin^2 x \cdot \cancel{2}\cos^2 x$

~~2cos10x~~ $8\cos 10x = 4\sin^2 x\cos^2 x$

$8\cos 10x = \sin^2 2x$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$S_{AQF} = Sx$

$S_{0ALC} = Sx + kS_0$.

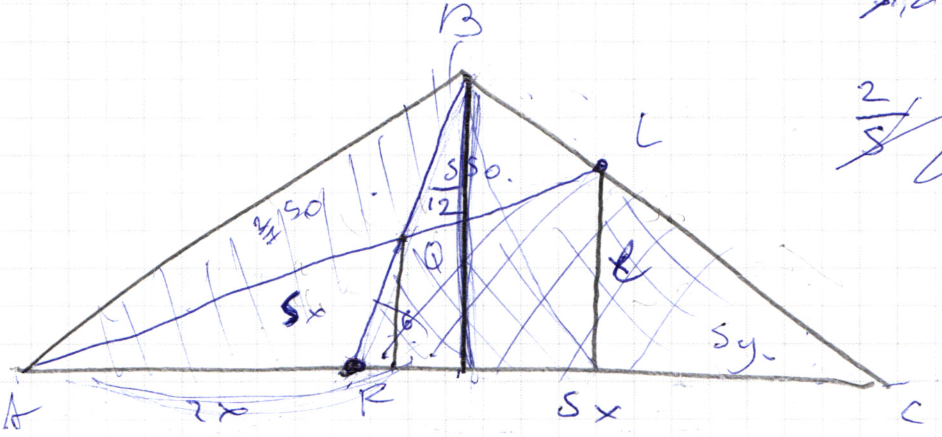
$\frac{S_{ABF}}{S_{FBC}} = \frac{2}{5}$.

$\cancel{S_{ABF} = 217S_0}$.

$\cancel{\frac{2}{5}S_2 + S_2 = 17S_0}$

$\cancel{S_2\left(\frac{7}{5}\right) = 17S_0}$.

$\cancel{S_2 = \frac{5}{7}17S_0}$.



$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{5}$

$S_1 + S_2 = S_\Sigma$

$S_1 = \frac{5}{7}\cdot S_\Sigma$.

$S_2 = \frac{2}{7}S_\Sigma$.

$S_{FBC} = S_0$.

$S_{\cancel{AFQ}} =$
$= 3x$

$\frac{A_{ABF}}{S_{FBC}} = \frac{2}{5}$.

$\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 6 = 6x$

$S_{ALC} = \frac{1}{2}\cdot 7x\cdot \ell$.

$\frac{2}{5}S_{FBC} + S_{FBC} = S_0$

$S_{FBC}\left(\frac{7}{5}\right) = S_0$

$S_{FBC} = \frac{5}{7}S_0$.

$S_{ABF} = \frac{2}{7}S_0$.

$\cancel{7x\ell}$

$S_{AQF} = 6x$

$S_{0ALC} = \frac{7x\ell}{2}$.

$\frac{S_{AQF}}{S_{0ALC}} = \frac{6}{7\ell}\cdot 2 = \frac{12}{7\ell}$.

$S_{RQLC} = \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{12}\right)S_0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{cases} x > -4 \\ 2x+4 \le \sqrt{x+7} \end{cases}$$

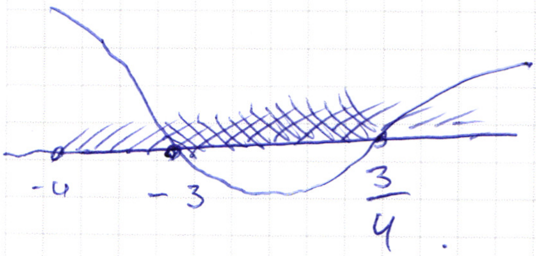
$4x^2+15x+9 \le 0$.

$D = 9^2$.

$x = \dfrac{-15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} -\frac{24}{8} = -3 \\ \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{array}\right.$

$4x^2+15x+9 \le 0$

$4(x+3)\left(x-\frac{3}{4}\right) \le 0$.



$x \in \left[-3; \frac{3}{4}\right]$

Но

$0 < \sqrt{x+7} - x < 1$.

$x < \sqrt{x+7} < x+1$

$x^2 < x+7 < x^2+2x+1$

2

$D = 1+4\cdot7 = 29$.

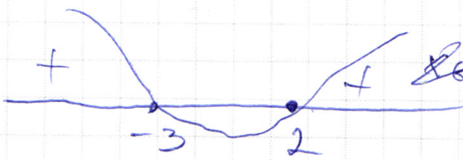
$$\begin{cases} x^2-x-7<0 \\ x^2+x-6>0 \end{cases}$$

$D = 1+6\cdot4 = 25$

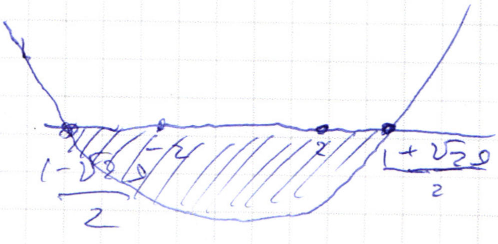
$x = \dfrac{-1\pm5}{2} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -3 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} (x-2)(x+3)>0 \\ x^2-x-7<0 \end{cases}$$

$0 > \left(x - \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right)$



~~$x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$~~

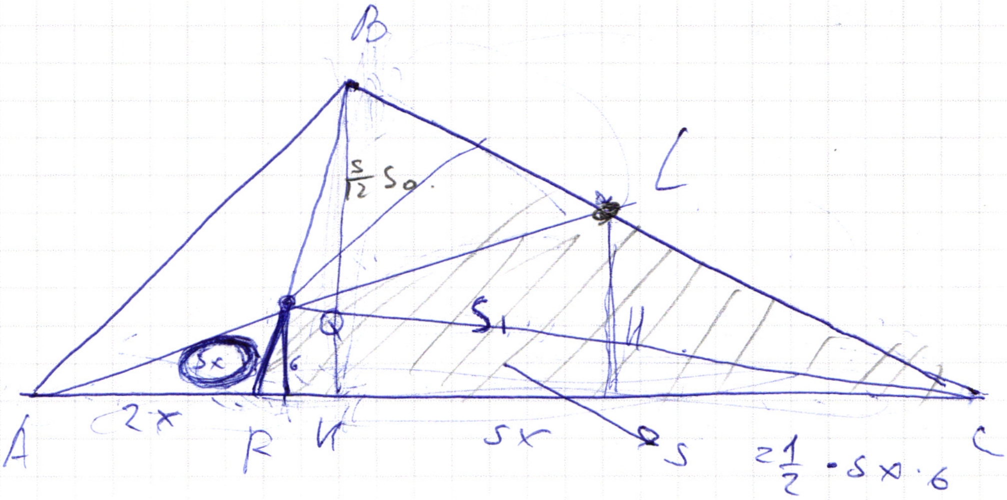


☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$S_0 = S_{AB\cancel{K}C} = \frac{1}{2} 7x \cdot h = \frac{7xh}{2}.$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} 2x \cdot 6 = 6x$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}} = \cancel{\frac{7}{12}h} \quad \frac{2}{7}\cdot\frac{6}{h}$

$\cancel{S_{AQF} = S_0 \frac{7}{12}k}.$

$\cancel{S_{ALC} = \frac{k}{h} S_0} \qquad \frac{S_{ALC}}{S_0} = \frac{k}{h}$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}} = \frac{2}{7}\cdot\frac{6}{\cancel{h}}\cdot\frac{\cancel{h}}{k} = \frac{12}{7k}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x).$

Если $0<\sqrt{x+7}-x<1$

$0<\sqrt{x+7}-x<1$

$\begin{cases} x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \\ x+4>0. \end{cases}$

$\begin{cases} x>-4 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \end{cases}$

$4x^2+16+16x \leq x+7$

~~$4x^2+15x+9 \leq 0.$~~

$4x^2+15x+9 \leq 0.$

$D=15^2-4\cdot4\cdot9$

$=225-144=81$

Если $\sqrt{x+7}-x>1.$

$\begin{cases} x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \\ \sqrt{x+7}-x>0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \\ \sqrt{x+7}>x \end{cases}$

$2(x+2) \geq \sqrt{x+7}$

$4(x^2+4x+4) \geq x+7$

$4x^2+16x+16-x-7 \geq 0.$

$4x^2+15x+9 \geq 0.$

$D=81$

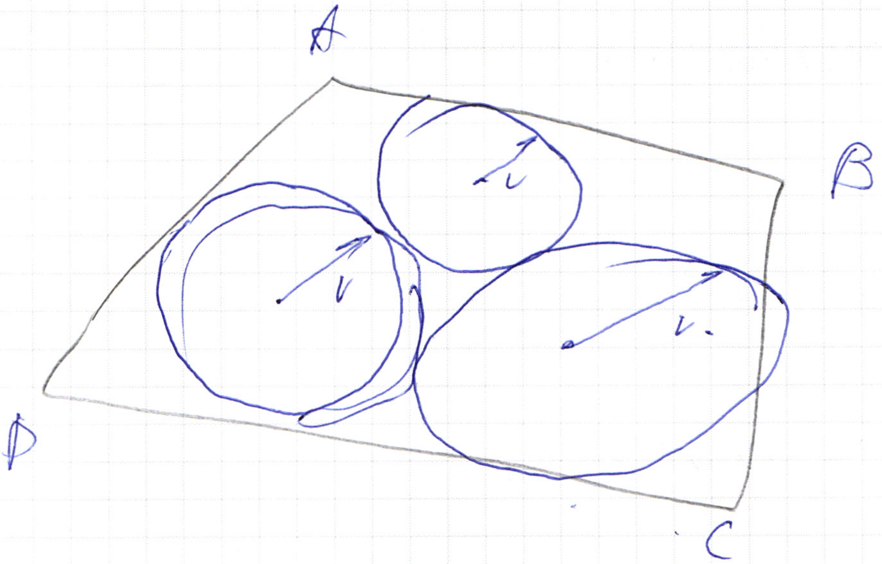
$\begin{array}{r} 225 \\ -144 \\ \hline 81 \end{array}$ $\begin{array}{r} 225 \\ -144 \\ \hline 81 \end{array}$

☐ черновик ☐ чистовик

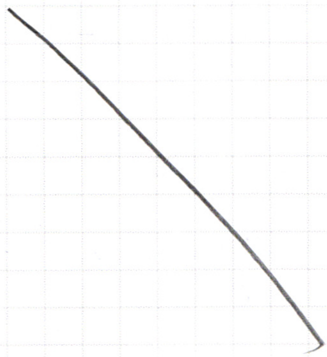
(Поставьте галочку в нужном поле)

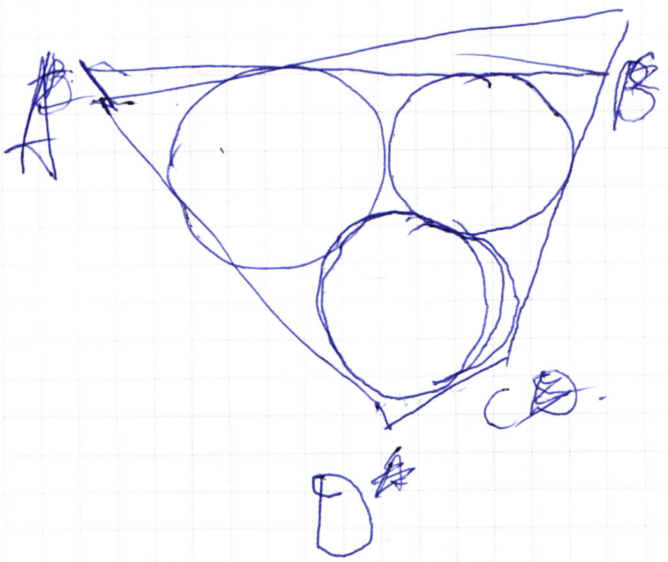
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



(136 ; 180)





☐ черновик ☐ чистовик

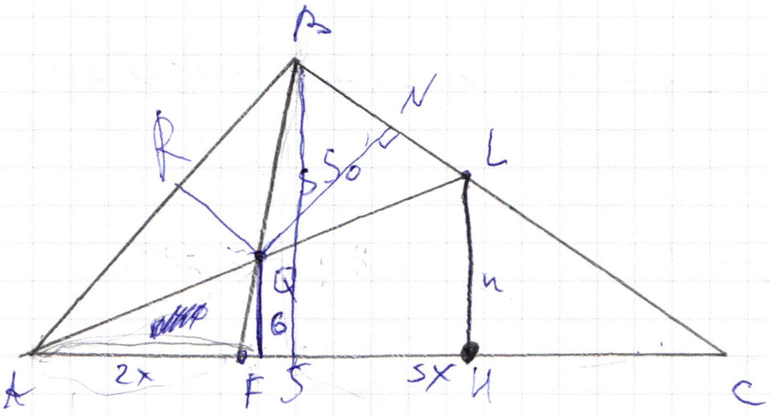
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



Дано:
$\triangle ABC$
$F \in AC$
$L \in BC$
$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$
$BF \cap AL = Q$
$\frac{S_{BQC}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$
$\rho(Q; AC) = 6$
$\rho(L; AC) - ?$

$S_{ABC} = 12S_0$.

$S_{\triangle AQS} = \frac{1}{2} AF \cdot QS = 3AF$

$S_{\triangle ALH} = \frac{1}{2} h \cdot AH$.

~~$S_{\triangle AKC} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot 7x$~~

~~$S_{\triangle B} = \frac{1}{2} \cdot H \cdot 7x$~~

№2.

$y_x = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$2y_x = 2\sin 3x \sin 7x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8.$

$2y_x = 2\sin 3x \sin 7x - 1 + \cos 2x + 1 + \cos 10x + 8$

$2y_x = \frac{2}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \cos 2x + \cos 10x + 8$

$2y_x = \cos 4x - \cancel{\cos 10x} + \cos 2x + \cancel{\cos 10x} + 8$

$y_x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x + 8).$

$y'_x = \frac{1}{2}(-4\sin 4x - 2\sin 2x) = 0.$

$4\sin 4x = -2\sin 2x$

$2\sin 4x = -\sin 2x$

$4\sin 2x \cos 2x = -\sin 2x$

$x = 0.$

$\cos 2x = -\frac{1}{4}.$

$y''_x = \frac{1}{2}(-4\cdot 4\cos 4x - 4\cos 2x)$

$= -4\cos 4x - \cos 2x =$

$= -(4\cos 4x + \cos 2x)$

при $x = 0$.

$y'' - < 0$, значит

y_x достигает максимума в т. $x = 0 \Rightarrow y_x = 5$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x \in \left[-1; \frac{3}{4}\right]$.

4

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №4

(Нумеровать только чистовики)

Перейдем к неравенству №2.

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}>1+x & №1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x & №2 \end{cases}$$

№1.

$\sqrt{x+7}>1+x$

$x>-1$

$x+7>1+2x+x^2$.

~~$x^2+x-6>0$~~.

$x^2+x-6<0$.

$D=25$

$x=\left[\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$

$(x+2)(x-3)<0$.

$x\in(-2;3)$,

при $x>-1$

$x\in(-1;3)$.

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$.

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$.

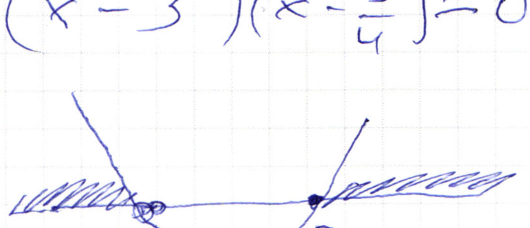
$4x^2+16x+16\geq x+7$

$4x^2+15x+9\geq 0$.

$D=9^2$

$x=\left[\begin{matrix}3\\\frac{3}{4}\end{matrix}\right.$

$(x-3)(x-\frac{3}{4})\geq 0$.



$\begin{cases} x\notin[\frac{3}{4};3] \\ x\in(-1;3) \end{cases}$

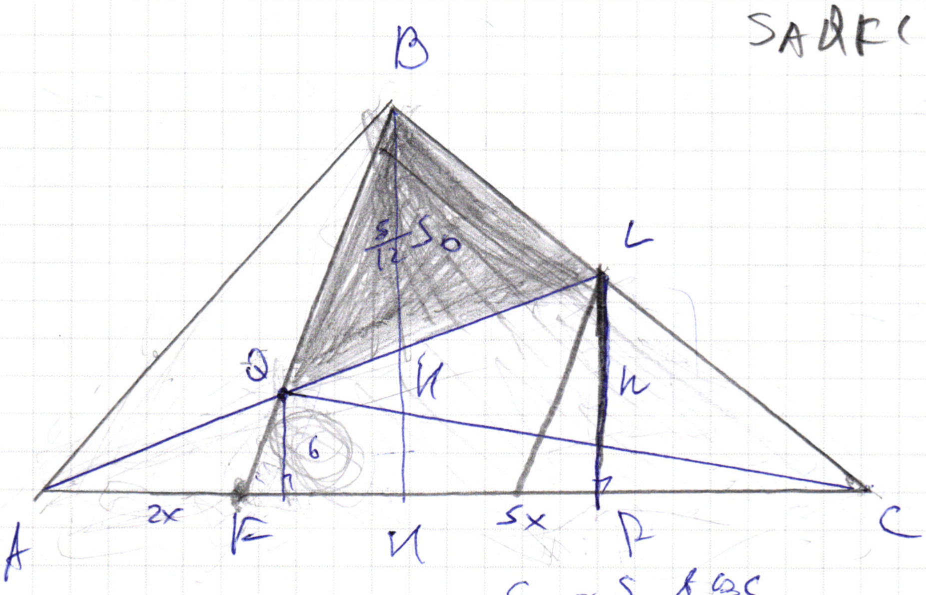
(3)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $x\in(-1;\frac{3}{4})$

$S_{AQF}(S_0)$ — ?



$S_0 = S_{\triangle ABC}$

У $\triangle ABF$ и $\triangle FBC$ — одна высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{ABF}}{S_{FBC}} = \frac{\frac{1}{2}h \cdot AF}{\frac{1}{2}h \cdot FC} = \frac{2}{5}$, у $\triangle ABC$ и $\triangle FBC$ — одна высо

$\frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{FC \cdot \frac{1}{2} \cdot h}{AC \cdot \frac{1}{2} \cdot h} = \frac{5}{7}$.

$S_{FBC} = \frac{5}{7} S_0$.

$\cancel{S_{\triangle AQF} = \frac{1}{2} QF \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7x = 21x}$

$S_{\triangle FQLC} + S_{\triangle BQL} = S_{\triangle FBC}$.

$S_{FQLC} = S_{FBC} - S_{BQL} = \frac{5}{7} S_0 - \frac{5}{12} S_0$

$= S_0 \left(\frac{5}{7} - \frac{5}{12} \right) = 5 S_0 \frac{5}{84} = \frac{25}{84} S_0$

$S_{\triangle FQL} = 5x \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 15x$.

$S_{\triangle QLC} = S_{FQLC} - S_{\triangle FQL} = \frac{25}{84} S_0 - 15x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12

ШИФР

(заполняется секретарём)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\triangle QLC$ и $\triangle BQL$ - имеют одну высоту $\Rightarrow$

$$\frac{S_{QLC}}{S_{QLB}} = \frac{LC}{BL} = \frac{\frac{25}{84}S_0 - 15x}{\frac{15}{12}S_0}.$$

Из подобия CLR и CBH $\Rightarrow$

$$\frac{LC}{BC} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{LC}{BC+LC} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{BC+LC}{LC} = \frac{H}{h}$$

$$\frac{BC}{LC} + 1 = \frac{H}{h} = 1 + \frac{\frac{15}{12}S_0}{\frac{25}{84}S_0 - 15x} = 1 + \frac{\frac{15}{12}}{\frac{25}{84} - 15\frac{x}{S_0}}.$$

$S_\triangle ALC = \frac{1}{2}\cdot 7x \cdot h$

$S_{\triangle ABC} = S_0 = 7x \cdot \frac{1}{2}H.$

$S_\triangle AQF = \frac{1}{8} 8x \cdot 6$

$H = \frac{2S_0}{7x}$

Рассмотрим $\triangle ALC$ и $\triangle AQF$

$$\frac{H}{h} = 1 + \frac{\frac{15}{12}}{\frac{25}{84} - 15\frac{2}{7H}}.$$

$S_\triangle AQF = 2x \cdot \frac{1}{2} 6 = 6x$

$S_{\triangle ALC} = \frac{1}{2} 7x \cdot h$

$$\frac{S_{\triangle AQF}}{\cancel{S_{\triangle ALC}}} = \frac{S_\triangle ALC}{S_\triangle AQF} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 7 \cdot h}{6} = \frac{7}{12}h.$$

(10)

$S_{\triangle ALC} = S_{FQLC} + S_{\triangle AQF}$

$$\frac{\frac{25}{84}S_0 + S_{AQF}}{S_{\triangle AQF}} = 1 + \frac{25}{84}\cdot 6x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2)

$14^2+2a+\cancel{2}\cdot 14\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=6^2.$

$14^2-6^2=(14-6)(14+6)$

$2a+14\sqrt{2a}+14^2-6^2=0.$

$2a+14\sqrt{2a}+160=0.$

$\sqrt{2a}=t$

$t^2+14t+160=0.$

$D=196-4\cdot160<0$. – это невозможный случай.

(3)

$6^2+14^2+\cancel{2}\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{\cancel{2}}=2a.$

$6^2+14^2+6\cdot14=2a.$

$6^2+14^2+2\cdot6\cdot14-6\cdot14=(6+14)^2-6\cdot14=2a.$

$20^2-84=400-84=316=2a$

$a=\frac{316}{2}=158.$

Ответ: $a=50$; $a=158$.

№2.

$y_x = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$\max y_x - ?$

$\min y_x - ?$

$y'_x = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cdot \cos x + 2\cos 5x \cdot 5(-\sin 5x)$

Экстремум достигается при $y'_x = 0$.

$y'_x = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 10\cos 5x \sin 5x$

$y'_x = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x = 0$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$

$y'_x = 3\cdot\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 10x) + \frac{7}{2}(-\sin 4x + \sin 10x) - \sin 2x - 5\sin 10x = 0.$

$3\sin 4x + \cancel{3\sin 10x} - 7\sin 4x + 7\sin 10x - 2\sin 2x - 10\sin 10x = 0.$

$-4\sin 4x - 2\sin 2x = 0$. $y''_0 < 0 \Rightarrow$ это max.

$2\sin 4x + \sin 2x = 0.$

$2\sin 4x = -\sin 2x$

$4\sin\cancel{2x}\cos 2x = -\sin 2x$

$x = 0$. $\quad \cos 2x = -\frac{1}{4}.$

$y_x = 5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \ge 0 \\ x \in (3; +\infty) \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right).$$

Но при этом

$$2x+4 \le \sqrt{x+7}$$

$2x+4 \ge 0$

$2x \ge -4$

$x \ge -2.$

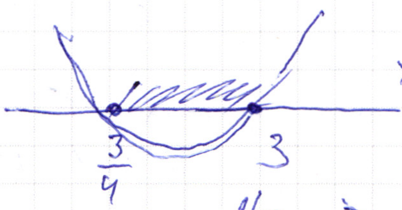
$$4x^2+16x+16 \le x+7.$$

$$4x^2+15x+9 \le 0.$$

$$D = 15^2 - 4\cdot4\cdot9 = 81 = 9^2.$$

$$x = \frac{15 \pm 9}{8} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

$$(x-3)\left(x-\frac{3}{4}\right) \le 0.$$



$x \in (3/4; 3)$.

Но общего ∩ этих неравенств нет ⇒ неравенство 1 - решений не имеет.

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1.$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \\ x+4 \geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1. \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \end{array}\right.$$

№1

①
$$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \\ x \geq -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x < 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 0. \end{cases}$$

Но

$\sqrt{x+7} < 1+x$

$x \geq -1.$

$x+7 < 1+2x+x^2$

$x^2+x-6 > 0.$

$D = 1+6\cdot 4 = 25$

$x = \frac{1 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -2. \end{array}\right.$

$(x+2)(x-3) > 0$

$-2 \quad -1 \quad 3$

$x \in (3; +\infty)$

$\sqrt{x+7} > x$

$x > 0.$

$x+7 > x^2.$

$x^2-x-7 < 0.$

$D = 1+4\cdot 7 = 29.$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}.$

$\left(x - \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) < 0$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$-4 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad -2 \quad -1 \quad 3 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\to$ №1 –

$x \in \left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}; ?\right]$

$\cap \left[3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-12
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

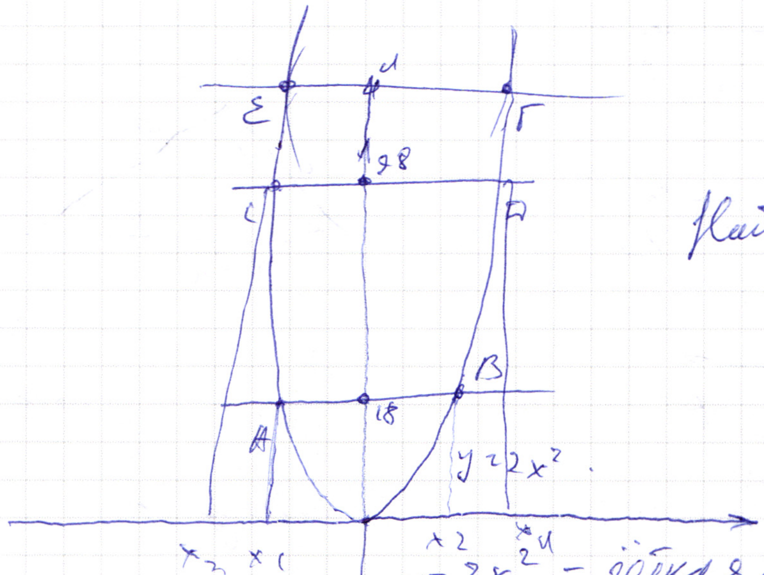
№1

$y=2x^2$.

$y=98$

$y=18$

$y=4$.



Найдем AB

$y=2x^2$ – чётная функция.

$2x^2=18$.

$x^2=9$

$x=\pm 3$.

$AB=x_2-x_1=6$.

$2x^2=98$

$x^2=\frac{98}{2}=49$

$x=\pm 7$

$x_2-x_1=14$.

$2x^2=4$

$x^2=\frac{4}{2}$

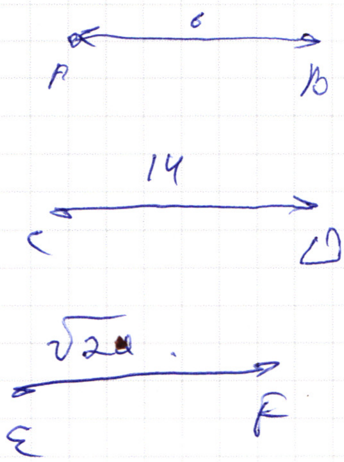
$x=\pm\sqrt{\frac{4}{2}}$

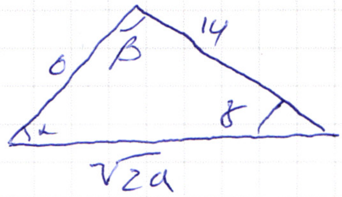
$x_2-x_1=2\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{24}$.

5

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Итого имеем, что данные отрезки — это стороны треугольника.





Возможны 3 случая (из-за того, что угол 120° может быть между любыми 2 сторонами)

Запишем Т. Косинусов.

(1)

$6^2 + 2a - 2\cdot 6\sqrt{2a}\cos 120 = 14^2$.

$\cos 120 = \cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$.

$6^2 + 2a + 2\cdot 6\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{2} = 14^2$

$2a + 6\sqrt{2a} = 14^2 - 6^2 = (14-6)(14+6) = 8\cdot 20 = 160$.

$\sqrt{2a} = t$

$t^2 + 6t - 160 = 0$.

$D = 36 + 4\cdot 160 = 400 + 240 + 36 = 676 = 26^2$

$t = \frac{-6 \pm 26}{2} = \left[\begin{array}{l}10\\ -16 \text{ - не удовл. ОДЗ}\end{array}\right.$.

$\sqrt{2a} = 10$

$2a = 100$

$a = 50$.

$26 \times 26 = 156 + 52 = 676$.

(6)