МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 4-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $y=2x^2$

Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=2x^2$ и прямых $y=98$ и $y=18$.

1) $y=98$

$2x^2=98$

$x^2=49$

$x=\pm 7$

Следовательно длина отрезка, образованного точками пересечения параболы и прямой, равна 14

Аналогично:

$y=18$

$2x^2=\cancel{98}\,18$

$x^2=9$

$x=\pm 3$.

Сл. длина отрезка – 6.

Т.к. из данных отрезков и ещё одного искомого можно составить треугольник, ~~то~~ с углом 120°, то найдем третий отрезок по теореме косинусов.

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120°$

$c^2=36+196+2\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{2}=232+84=316$

$c=\pm\sqrt{316}$

$x=\pm\sqrt{316}$ $y=2x^2$

$y=2\cdot 316$ $y=632$

Ответ: 632

№2 $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \cos^2 2x - \cos^2 5x - \sin^2 x +$

$+ \cos^2 5x + 4 = 1 - \sin^2 2x - \sin^2 x + 4 = 5 - \sin^2 2x - \sin^2 x = 5 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x =$

$= 5 - \sin^2 x(4\cos^2 x - 1)$

$g(x) = 5 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x$

Т.к. $\sin^2 x \in [0, 1]$ и $\cos^2 x \in [0, 1]$, то наибольшее значение функция будет принимать при $\sin^2 x = 0$. Тогда $g(x) = 5$

Наименьшее значение функция будет принимать при $\sin^2 x = 1$. Тогда $g(x) = 4$

$5 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = 5 - 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 5 - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^2 x$

$= 5 - 5\sin^2 x + 4\sin^4 x = 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 5$

$g = 4\sin^4 x - 5\sin^2 x + 5$

При $\sin x = 0$, функция принимает максимальное значение 5.

При $\sin x = 1$, функция принимает минимальное значение 4.

Ответ: наибольшее – 5, наименьшее – 4.

№5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

D: $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x+7 > 0 \\ x+4 > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \end{cases}$

1) $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$\sqrt{x+7} \neq 1 + x$

$x + 7 \neq 1 + 2x + x^2$

$x^2 + x - 6 \neq 0$

$\left[\begin{array}{l} x \neq 2 \\ x \neq -3 \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} x+7 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -7 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow x > -4.$

3) $\sqrt{x+7} > x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\sqrt{x+7} > x$

а) $x \geq 0$

$x+7 > x^2$

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1 + 4 \cdot 7 = 29$

$x = \frac{1 \mp \sqrt{29}}{2}$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

б) $x < 0$

$x+7 < x^2$

$x^2 - x - 7 > 0$

$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right)$

Таким образом возможные ~~корни~~ решения данного неравенства будут принадлежать следующему промежутку:

$x \in \left(-4, \frac{1-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left[0, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$ и $x \neq 2$, $x \neq -3$

Для решения данного неравенства воспользуемся методом, ~~основанном на~~ в котором используется совпадение по знаку

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7} - x)$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7} - x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} - x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(4 - \sqrt{x+7}) \geq 0$

Найдем нули:

1) $\sqrt{x+7} - x - 1 = 0$ и 2) $4 - \sqrt{x+7} = 0$

$x+7 = x^2 + 2x + 1$

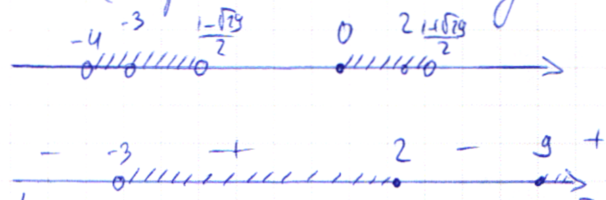
$x^2 + x - 6 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x + 7 = 16$

$x = 9$

Далее применим метод интервалов.



Таким образом $x \in (3, \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup [0,2)$

Ответ: $x \in (3, \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup [0,2)$

№7.

[1;45], [46,90], [91,135], [136,180], [181,225]

Чтобы сумма всех 30 чисел была бы наименьшая, возьмем первые шесть чисел из промежутка [181,225]. Очевидно, что первые шесть чисел из промежутка [136,180] будут составлять пару первым шести (разность будет кратна 45). Следовательно возьмем ~~с 8~~ числа с 142 до 147. Таким же способом выберем числа из оставшихся промежутков. Получим следующие цифры:

[181; 225] : 181, 182, 183, 184, 185, 186

[136; 180] : 142, 143, 144, 145, 144, 147

[91, 135] : 103, 104, 105, 106, 107, 108

[46, 90] : 64, 65, 66, 67, 68, 69

[1, 45] : 25, 26, 27, 28, 29, 30.

Заметим, что разностью никаких двух чисел не будут числа 45, 90, 135, 180, 225.

Далее найдем сумму всех выбранных чисел.

$\Sigma = 367 \cdot 3 + 289 \cdot 3 + 211 \cdot 3 + 133 \cdot 3 + 55 \cdot 3 = 1101 + 867 + 633 + 399 + 165 = 3165$

Ответ: 3165.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

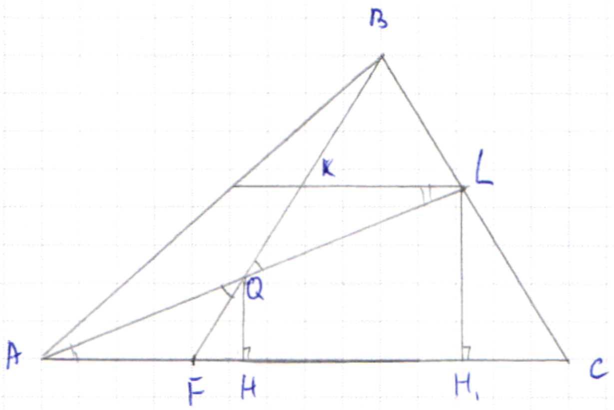
4-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



Дано:

$\triangle ABC$ $\quad \frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$, $QH = 6$

$LH - ?$

Решение:

1) Пусть $S_{\triangle ABC} = 1$. Тогда $S_{\triangle FBC} = \frac{5}{7} S_{\triangle BAC}$ (т.к. у $\triangle ABC$ и $\triangle FBC$ общая высота и основания $\frac{FC}{AC} = \frac{5}{7}$).

2) Найдем какую часть $S_{\triangle BQL}$ составляет от $S_{\triangle FBC}$.

$S_{\triangle BQL} = \frac{5}{12} S_{\triangle BAC} = \frac{7}{12} S_{\triangle FBC}$

3) $\triangle AFQ \sim \triangle QKL$ (по двум углам.)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

4-007

136+6=142

136, 137, 138, 139, 140, 141.

~~136~~

91+6=97+6=103

181	182	183	184	185	186
142	143	144	145	146	147
103	104	105	106	107	108.
64	65	66	67	68	69
25	26	27	28	29	30.

$142-97=45$

$46+18=64$

7-13.

46+6+6+6 = 52+6+6 = 58+6 = 64.

1+6+6+6+6 = 25.

1) $181+186=367$, $367\times3=1101$, $1101+867=1968$, $1968+633=2601$, $2601+399=3000$, $3000+165=3165$

2) $142+147=289$, $289\times3=867$.

3) $103+108=211$, $211\times3=633$

4) $64+69=133$, $133\times3=399$

5) $25+30=55$, $55\times3=165$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{5}{12}$

$12S_{BQL}=5S_{BAC}$

S_{BQL}

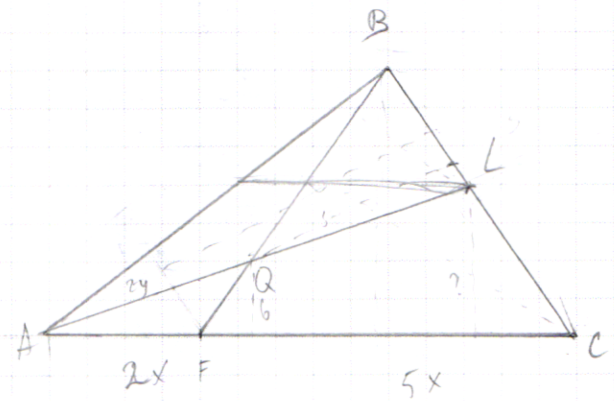
$BFC=\frac{12}{7}\cdot5=\frac{60}{7}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}}=\frac{5\cdot7}{60}=\frac{7}{12}$

$S_{BFC}=\frac{12 S_{BQL}\cdot 5}{7}$

$12S_{BQL}=S_{BFC}\cdot7$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}}=\frac{7}{12}$



$\frac{12}{7}\cdot5=\frac{60}{7}-\frac{5}{12}=$

$12-bcc \quad =\frac{60\cdot12-5\cdot7}{7\cdot12}=\frac{720-35}{}=\frac{685}{84}$

$12\times6=720$, $720-35=685$

$12\times7=84$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

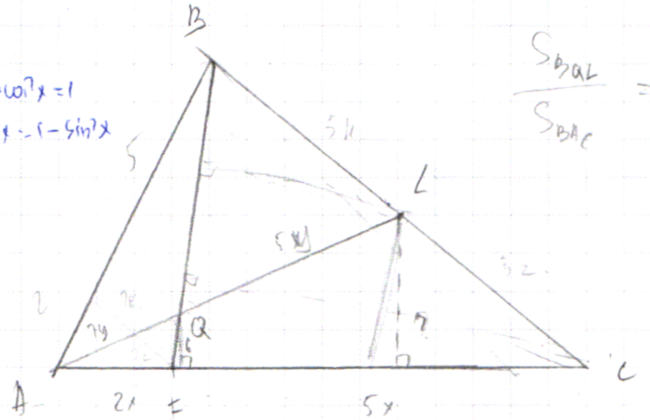
$-4\sin^2x\cdot(1-\sin^2x)-\sin^2x^4 = 4\sin^4x-5\sin^2x+5 \quad D=25-4\cdot4\cdot5$

$-4\sin^2x-\sin^2x+4\sin^4x = 5-5\sin^2x+4\sin^4x$

$-4\sin^2x\cos^2x-\sin^2x =$

$\sin^2x+\cos^2x=1$

$\cos^2x=1-\sin^2x$



$\frac{S_{BAL}}{S_{BAC}}=\frac{5}{12}$

1) $\sin=\frac{\sqrt2}{2}$ $\cos x=\frac{\sqrt2}{2}$

$\sin^2=\frac{2}{4}=\frac12$ $\cos^2x=\frac24$

$-\frac{4\cdot2\cdot2}{4\cdot4}=-1-\frac24=$

$=-1-\frac12=-\frac32$

$\sin x=\frac12$ $\cos x=\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin^2x=\frac14$ $\cos^2x=\frac34$

$-4\cdot\frac14\cdot\frac34-\frac14=$

45, 90, 135, 180, 225, 270, 315.

93·5

12 345 6

46 47 48 49 50 51

91 92 93 94 95 96.

136 137 138 139 140 141

181 182 183 184 185 186

$224+225=449$

$139+186=325$

$97\cdot3=291$

$187\cdot3=561$

$277\cdot3=831$

$181+186=367$

$1+2+3+4+5+6=3\cdot7=21$

$46+47+48+49+50+51=97\cdot3=291$

$91+92+93+94+95+96=187\cdot3=561$

$136+137+138+139+140+141=277\cdot3=831$

$181+182+183+184+185+186=367\cdot3=1101$

$367\cdot3=1101$

$1101+831=1932$

$1932+561=2493$

$2493+291=2784$

$2784+21=\boxed{2805}$

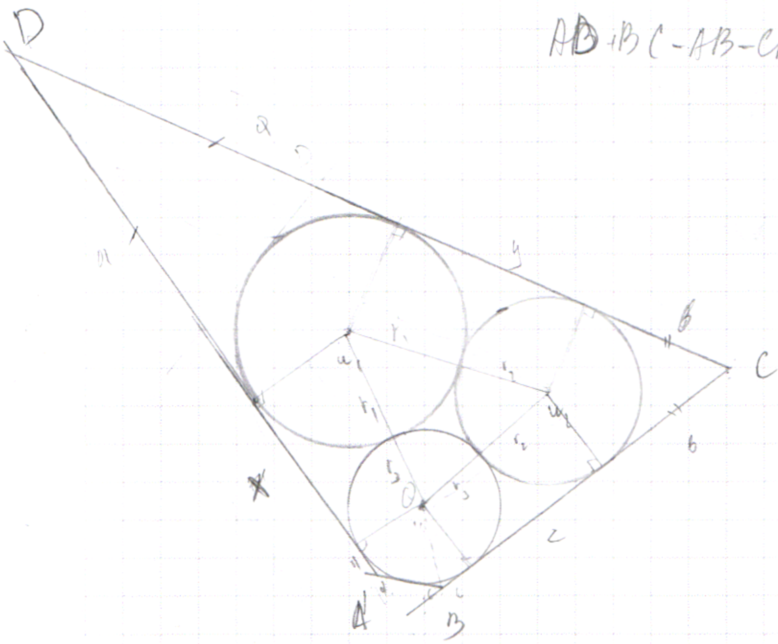
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4-007



$AB+BC-AB-CD=12$

$\cancel{d}+\cancel{a}+x+c+\cancel{b}+z-\cancel{d}-\cancel{c}-\cancel{b}-y-\cancel{a}=12$

$x+z-y=12$

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

1) a) $\sqrt{x+7}-x>1$. $\quad x\in(-7,\frac{1-\sqrt{29}}{2})$

$\sqrt{x+7}>1+x$

$x+7>1+2x+x^2$

$x^2+x-6<0$

$x\in(-3,2)\rightarrow(x\in(-3,\frac{1-\sqrt{29}}{2})$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16-x-7\geq 0$

$4x^2+15x-9\geq 0$.

$D=25+4\cdot 4\cdot 9=25+32=153$.

$x=\frac{-15\pm\sqrt{153}}{8}=$

D: $\sqrt{x+7}-x\geq 0 \quad \sqrt{x+7}>0$

$x+7>0 \quad x>-7$.

$\sqrt{x+7}>x$

c) $x\geq 0$.

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+4\cdot 7=29$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$x\in[0,\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x<0$

$\sqrt{x+7}>x$

$x+7<x^2$

$x^2-x+7>0$.

$x\in(-\infty,\frac{1-\sqrt{29}}{2})$

$x\in(-7,\frac{1-\sqrt{29}}{2})$

$x\in(-7,+\infty)$

$\frac{25}{4} \quad \frac{36}{4}$

$\frac{1-5,4}{2}=-\frac{4,4}{2}=-2,2$.

$-7 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad 0 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$-3 \quad 2 \quad 9$

$\log_a b=c \quad a^c=b$.

$\log_a b-\log_a c=(a-1)(b-c)$

$(\sqrt{x+7}-x-1)\,(x+4-\sqrt{x+7}-x)\geq 0$.

$(\sqrt{x+7}-x-1)(\cancel{x+4}4-\sqrt{x+7})\geq 0$.

1) $\sqrt{x+x}-x-1\geq 0$.

$\sqrt{x+7}=x+1$

$x+7=x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$x=-3\ x=2$.

2) $\cancel{x}4=\sqrt{x+7}$

$x=16-7$

$x=9$

$\boxed{[-3,\frac{1-\sqrt{29}}{2})\cup(0,2]}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

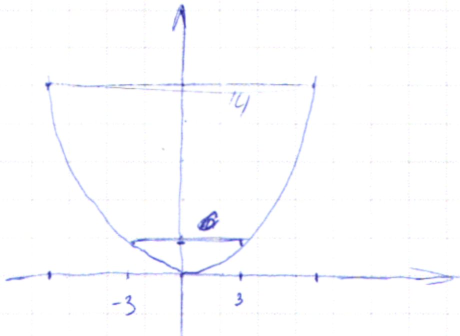
№1.

$y=2x^2$

1) $98=2x^2 \to x^2=49 \to x=\pm 7$

2) $18=2x^2 \to x^2=9 \to x=\pm 3$

3) $a=2x^2 \to x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$



$\times\frac{14}{6}$ 82

$\times\frac{14}{14}$ 56 14 196 $+36$ 232

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle$ $\cos 120^\circ=\cos(180-\angle)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$c^2=36+196+2\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{2}=232+82=314.$

$+\frac{232}{82}$ $\times\frac{314}{2}$ 628

$c=\sqrt{314}$

$x^2=314.$

$\boxed{y=628.}$

$\times\frac{14}{14}$ 56 14 196 $+36$ 232 14

$\times\frac{14}{6}$ 84 $\times\frac{14}{6}$ 84 $+\frac{232}{84}$ 316

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$

$\sin^2 2x=4\sin^2 x\cos^2 x$

$\sin\angle\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\angle-\beta)+\cos(\angle+\beta))=$

$=\frac{1}{2}(\cos\sin\angle+\sin\beta+\cos\angle\cos\beta+\sin\angle\cdot\sin\beta-\cos\angle\cdot\cos\beta)$

№2.

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2x+\cos^2 5x+4=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2x+\cos^2 5x+4\sin^2x+4\cos^2x=$

$=\sin 3x\cdot\sin 7x+3\sin^2x+5\cos^2x=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10x)+3\sin^2x+5\cos^2x=$

$=\frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 10x)+3\sin^2x+5\cos^2x.$ $\cos 2\angle=\cos^2\angle-\sin^2\angle=2\cos^2\angle-1$

$=\frac{1}{2}(2\cos^2 2\angle-1+2\cos^2 5\angle-1)-\sin^2x+\cos^2 5x+4$ $\cos^2\angle+\sin^2\angle=1.$

$=\cos^2 2x+\cos^2 5x+1-\sin^2x+\cos^2 5x+4=1-\sin^2 2x-\sin^2 x+4+1=$

$\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$

$=6-4\sin^2x\cdot\cos^2x-\sin^2x=6-\sin^2x(4\cos^2x+1)$ $\cos 2\angle=2\cos^2\angle-1$ $\cos^2\angle-\sin^2\angle=$

$\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4}=$

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$ $\sin\angle\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\angle+\beta)-\cos(\angle-\beta))=$

$\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}$

$\sin^2 2x=4\sin^2x\cdot\cos^2x$ $=\cos\angle\cdot\cos\beta-\sin\angle\cdot\sin\beta-\cos\angle\cdot\cos\beta+\sin\angle\cdot\sin\beta$

max $-\sin^2x=0.$ max $=6.$

$+\frac{316}{2}$ 632 $\cos(\angle-\beta)-\cos(\angle+\beta)=$

min $\sin^2x=1.$ min 5.

$-4\frac{1}{4}-\frac{12}{4}=-\frac{3}{4}-1-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$ $=\cos\angle\cos\beta+\sin\angle\cdot\sin\beta-\cos\angle\cdot\cos\beta+\sin\angle\cdot\sin\beta$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)