

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

15-042

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

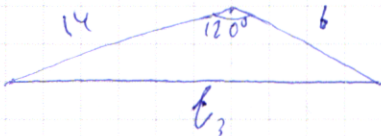
$$y = 2x^2$$

$$98 = 2x^2 \quad ; \quad 18 = 2x^2$$

$$x = \pm 7$$

$$x = \pm 3$$

Пусть l_1 - длина отрезка на прямой $y = 98$, а l_2 - на $y = 18$, тогда $l_1 = 14$, а $l_2 = 6$
 $l_3 = a$

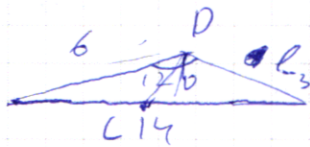


по Т. косинусов:

$$l_3^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ =$$

$$= \underline{\underline{316}}$$

В другом случае:



$$14^2 = 6^2 + l_3^2 - 2 \cdot 6 \cdot l_3 \cdot \cos 120^\circ =$$

DC - биссектриса $\angle D$

по Т. Стюарта: $DC^2 = l_3^2 = l_3^2 - l_3 \cdot \frac{14 - l_3}{14} + 6^2 \cdot \frac{l_3}{14} \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{l_3^2}{14} \cdot 6 - \frac{l_3^2 \cdot 14}{14} - l_3^2 (14 - l_3) + 36 l_3 = 0$$

$$\rightarrow l_3 (-l_3^2 - 14 l_3 + 36) = 0$$

$l_3 = 0$ - не подходит

$$-l_3^2 - 14 l_3 + 36 = 0$$

$$x_1 = \frac{14 + \sqrt{240}}{-2} \quad \text{не подходит}$$

$$x_2 = \frac{14 - \sqrt{240}}{-2} \quad \text{подходит} \quad \text{Ответ: } a = 316; \quad \frac{14 - \sqrt{240}}{-2}$$

N 3

883 888.8888 X X X X X X X X X

~~Группы из 7ми восьмерок можно "двигать" по числу, ~~на~~ здесь 10 вариантов. Т.к. каждое ~~то~~ только 7 восьмерок подряд в числе, получается $2 \cdot 3^9$ Ответ! ~~$2 \cdot 3^9 + 10$~~~~

8888888 X X X X X X X X X
2 3 3 3 3 3 3 3 3 3

в этом случае, т.к. подряд стоящих восьмерок только 7, ~~то~~ ~~то~~ вариантов получается $2 \cdot 3^9$

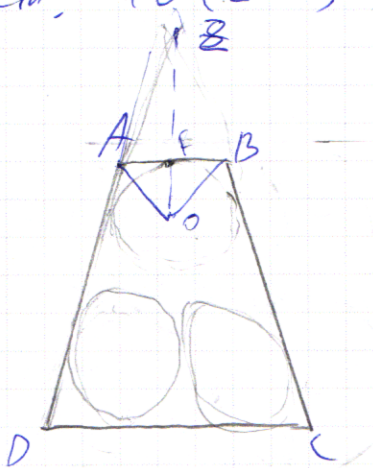
Вследующих 10 случаях ~~то~~ ~~то~~ вариантов в каждом по $2^2 \cdot 3^6$, т.к. X 8888.888 X X X X X X X X X
2 вар. 2 вар. 3 вар. и т.д.

в последнем случае, аналогичном первому, ~~то~~ вариантов $2 \cdot 3^9$

Ответ: $10(2^2 \cdot 3^8) + 2(2 \cdot 3^9)$

N 4

а)



По построению понятно, что окружности вписаны в равнобедренную трапецию с углами по 60° при основании

~~Продолжить высоту~~ Продолжить боковые стороны, получим ~~равноб.~~ равнобедренный треугольник AEC , т.к. $\angle D + \angle C = 120^\circ$

Проверка из ~~из~~ \odot отрезки, ~~то~~ ~~то~~ получим $\angle AOB = 60^\circ$, т.к. $\angle B A = 60^\circ$; $\angle B C = 180^\circ \rightarrow \angle A C = 120^\circ$. $\angle O$ - бис -

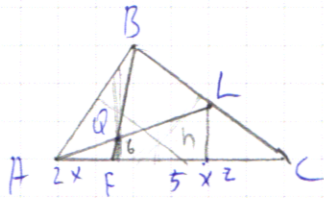
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сектриса $\angle A Z B$, а точка O расположена от
стороне треугольника $\triangle D Z C$, $AO = OB$.

$AF = FB$, поэтому AO и BO — биссектрисы

углов $\triangle A Z B$ и $\triangle A B C$

№ 6





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-042

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

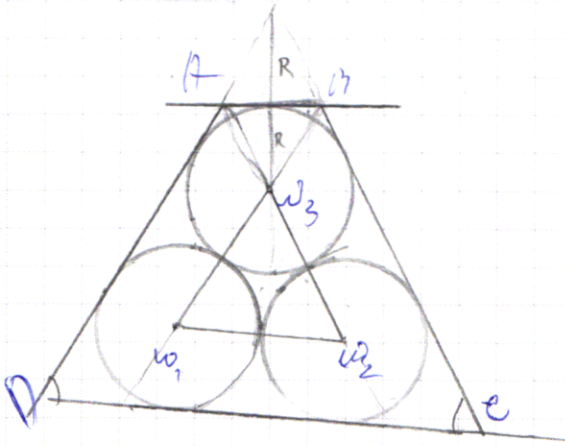
Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

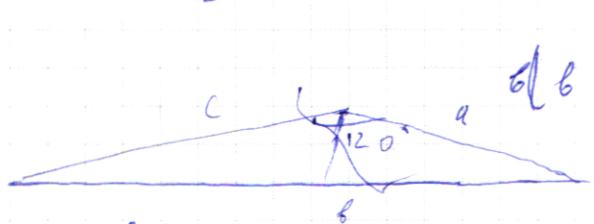
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$b^2 - b^2 \frac{14-b}{14} - \frac{b^2 b}{14}$$

$$x_1 = \pm 7 \rightarrow l_1 = 14$$

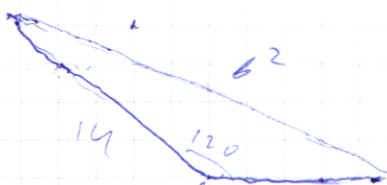
$$x_2 = \pm 3 \rightarrow l_2 = 2\sqrt{6} \approx 6$$



$$b=0$$

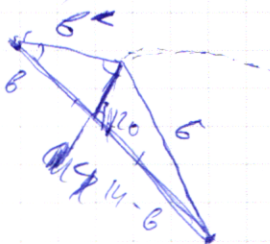
$$b - \frac{14b - b^2}{14} - \frac{b^2}{14} = 0 \quad \frac{14b^2 - b^3}{14} - \frac{b^2 b}{14} = 0$$

$$b^2 = \frac{b^2 \cdot b}{b - (14-b)} + b^2 \cdot \frac{14-b}{14}$$



$$\cos 60 \cdot \cos 60 \rightarrow 5: 1160 \cdot 5: 260$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

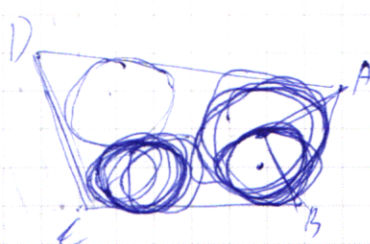


$$b^2 = 3^2 + 14^2$$

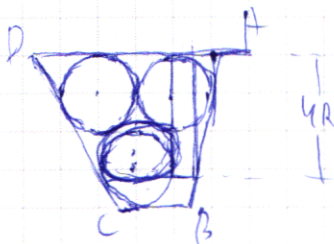
$$b^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos 120$$

$$b^2 = 36 + 196 -$$

Всё



$$36 + 196 + 84$$



$$14^2 - 6^2 = l_3^2 - 2 \cdot 6 \cdot l_3 \cos$$

$$l_3^2 (l_3 - 2 \cdot 6 \cdot \cos)$$

$$140 = l_3 + 6 l_3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$b^2 - b^2 - 6^2 = 0$$

$$\log \frac{x+4}{x+7} \geq \log \sqrt{x+7} - x$$

$$\frac{14b}{14} - \frac{14b - b^2}{14} - \frac{6^2}{14} = 0$$

$$-b^2 - \frac{b^2}{14} - \frac{6^2}{14} = 0$$