МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-047

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 047

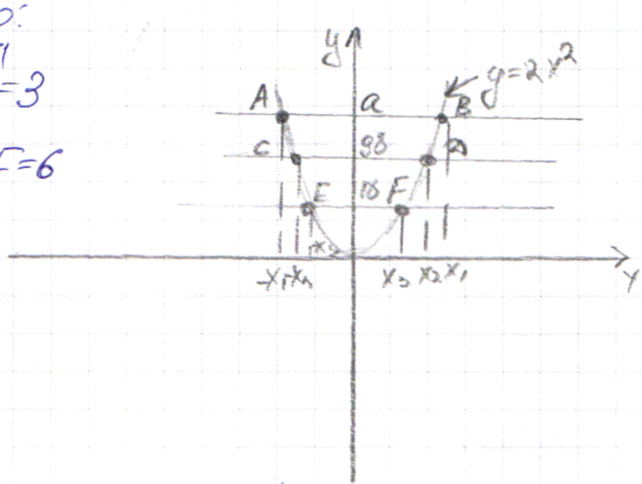
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1: $y=+2x^2$ $y=98$ $y=18$ $y=a$

Представим ситуацию схематично на координатной плоскости:



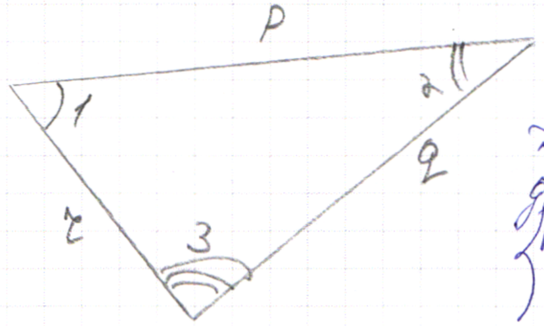
Из условия: $x=\sqrt{\frac{y}{2}}$, значит очевидно:

$|x_1|=\sqrt{\frac{a}{2}}$ $|x_2|=\sqrt{\frac{98}{2}}=7$ $|x_3|=\sqrt{\frac{18}{2}}=3$

Следовательно: $AB=2\sqrt{\frac{a}{2}}$; $CD=14$; $EF=6$

Пусть $AB=p$; $CD=q$; $EF=r$

Составим треугольник:



Для того, чтобы треугольник существовал должно выполняться нер-во треугольника:

$$\begin{cases} p \geq r+q \\ r \geq p+q \\ q \geq p+r \end{cases}$$

1) $\angle 1=120^\circ$. Справедлива т. косинусов: $q^2=r^2+p^2-2\cdot rp\cos 120^\circ$

$196=36+p^2-2\cdot 6p(-\frac{1}{2})$; $196=36+p^2+6p$; $p^2+6p-160=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=-16 \\ p=10 \end{array}\right.$

Значит p может быть равно 10; $2\sqrt{\frac{a}{2}}=10$; $\sqrt{\frac{a}{2}}=5$

$\frac{a}{2}=25$ $\underline{a=12,5}$

2) $\angle 2=120^\circ$; т. косинусов: $r^2=p^2+q^2-2pq\cos 120^\circ$; $36=p^2+196-2\cdot 14p(-\frac{1}{2})$

$36=p^2-14p+196$; $p^2-14p+160=0 \Rightarrow$ Ур-е имеет отриц. дискриминант значит $\angle 2 \neq 120^\circ$ при $\forall p$

3) $\angle 3=120^\circ$; т. косинусов: $p^2=r^2+q^2-2qr\cos 120^\circ$; $p^2=36+196-2\cdot 84(-\frac{1}{2})$;

$p^2=36+196+84=120+196=310$; $p=\sqrt{310}$; $2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{310}$;

$2a=310$; $\underline{a=155}$ <u>Ответ</u>: треугольник существует при $a=12,5$ и при $a=155$

Задача 3: Допустим, мы имеем 17 пустых мест для расстановки цифр, при том, для того, чтобы «8» были в кол-ве семи штук, они должны занимать следующие позиции (а конкретно, первая «8»:

на местах под номером: 1; 2; 3; 4; 5; ...; 11. С 12-той позиции семь подряд идущих «8» быть не могут.

1) При позиции 1: первый разряд может занимать ~~либо «7» либо~~ только «8», значит для первых восьми позиций имеем по одному варианту числа, значит для всех последующих — по 2. То есть, вариантов чисел в данном случае: $\underline{1\cdot 2^9}$

2) при позиции 2: первый разряд может занять лишь «7», последующие 7 разрядов занимают «8», а все последние 8 разрядов по 2 возможности. То есть чисел в данном случае — $\underline{1\cdot 2^8}$

Для последующих случаев размещения первой восьмёрки всё будет аналогично с 2)

Значит, всего чисел: $1\cdot 2^9+10\cdot 2^8\cdot 1^9=2^8(2+10)=12\cdot 2^8$

Ответ: $12\cdot 2^8$

Задача 5: $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \Rightarrow x>-4\\ \sqrt{x+7}-x\neq 1\\ \sqrt{x+7}-x>0\\ x+7\geq 0\end{cases}$

$\frac{1}{\log_{x+4}(\sqrt{x+7}-x)}\geq 1;$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}\right)\geq 0$

Воспользуемся методом рационализации:

$\sqrt{x+7}=t; t\geq 0$

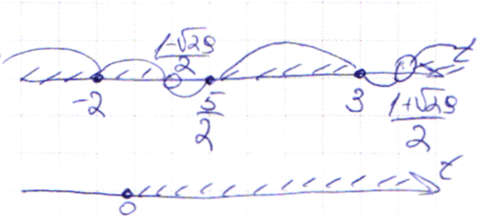
$(\sqrt{x+7}-(x+1))\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right)\geq 0$

$(t-(t^2-6))\left(\frac{t^2-3}{t-t^2+7}-1\right)\geq 0$

$(t-t^2+6)\left(\frac{t^2-3-t+t^2-7}{t-t^2+7}\right)\geq 0$

$+(t^2-t-6)\left(\frac{t^2-t-10}{t^2-t-7}\right)\geq 0$

$(t-\frac{5}{2})(t+2)^2(t-3)(t-\frac{1+\sqrt{29}}{2})(t-\frac{1-\sqrt{29}}{2})\geq 0$



$\left[\begin{array}{l} t>\frac{1+\sqrt{29}}{2}\\ \frac{5}{2}\leq t\leq 3\\ 0\leq t<\frac{1-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+7}>\frac{1+\sqrt{29}}{2}\\ \frac{5}{2}\leq \sqrt{x+7}\leq 3\\ 0\leq \sqrt{x+7}<\frac{1-\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$

См. страницу №3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} x+7 > \frac{(1+\sqrt{29})^2}{4} \\ \frac{25}{4} \le x+7 \le 9 \\ 0 \le x+7 < \frac{(1-\sqrt{29})^2}{4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x > \frac{1+2\sqrt{29}+29-28}{4} \\ -\frac{3}{4} \le x \le 2 \\ -7 \le x < \frac{1-2\sqrt{29}+29-28}{4} \end{array}\right.$$

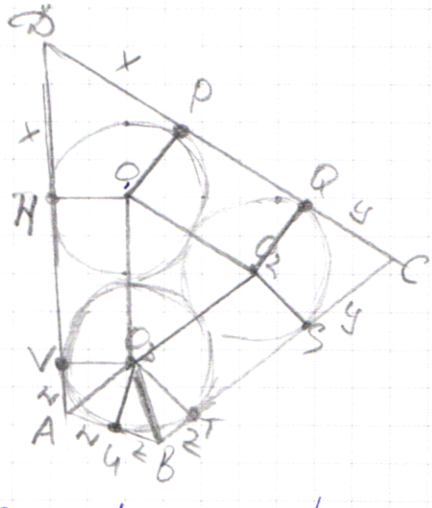
$$\left[\begin{array}{l} x > \frac{2(\sqrt{29}+1)}{4} \\ -\frac{3}{4} \le x \le 2 \\ -7 \le x < \frac{2(1-\sqrt{29})}{4} \end{array}\right.$$

С учётом ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x > \frac{\sqrt{29}+1}{2} \\ -\frac{3}{4} \le x \le 2 \\ -7 \le x < \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. \\ x > -4 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x > \frac{\sqrt{29}+1}{2} \\ -\frac{3}{4} \le x \le 2 \\ -4 < x < \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $(-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup [-\frac{3}{4}; 2] \cup (\frac{\sqrt{29}+1}{2}; +\infty)$

Задача 4:



Дано:
$ABCD$
$\omega_1(O_1; R)$
$\omega_2(O_2; R)$
$\omega_3(O_3; R)$
а) $AD+BC-AB-CD=12$
б) —
в) $AO \cdot BO = 58$
Найти
а) R
б) $\angle AOB = \angle AO_3B$
в) AB

Решение

а) HO_1O_3V; O_1PQO_2; TO_3O_2S - прямоугольники (O_3H; O_2S; O_2Q; ...; O_3V - радиусы, проведённые в точку касания

$O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1 = HV = TS = PQ = 2R$

Используя данное в условии равенство: $2R+x+w+z+y+2R-w-z-x-y-2R=12$;

$2R=12 \Rightarrow R=6$ Ответ: а) 6

б) **Задача 2** : $g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$\sin 3x \sin 7x + \frac{\cos 10x + 1}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 4 = \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x) + 4 =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x) + 4 = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x) + 4$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(-4\sin 4x - 2\sin 2x) = \frac{1}{2}(-2)(2\sin 4x + \sin 2x) =$$

$$= -(4\sin 2x \cos 2x + \sin 2x) ;\quad g'(x) = 0 \Rightarrow \sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n \\ 2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} n \\ x = \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} n \\ x = \pm \frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + \pi k \end{array}\right.$$

Функция принимает максимальное значение при $\begin{cases} \cos 4x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4x = 2\pi n \\ 2x = 2\pi n \end{cases}$$

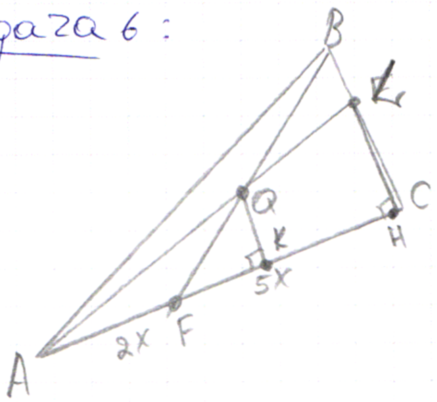
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n \\ x = \pi n \end{cases}$$

$g_{max} = g(0)$, тогда $n = 0$

$g_{max} = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4 = 4$

Ответ: 4

Задача 6 :



Дано:
$\triangle ABC$
$F \in AC$ $(AF : FC = 2 : 5)$
$L \in BC$
$BF \cap AL = Q$
$QK \perp AC$ $(QK = 6)$
$\frac{S(BQL)}{S(ABC)} = \frac{5}{12}$
Найти
LH
Решение

① По т. Менелая: $\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{FA}{AC} = 1$ ($\frac{FA}{AC} = \frac{2}{7}$)

$$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

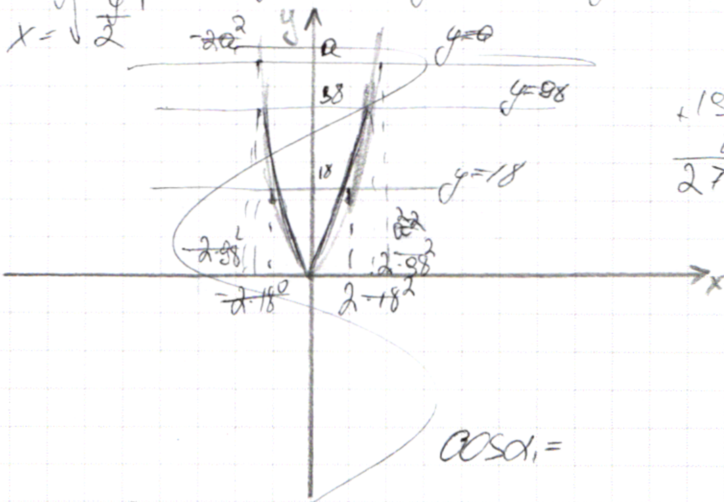
15-047
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

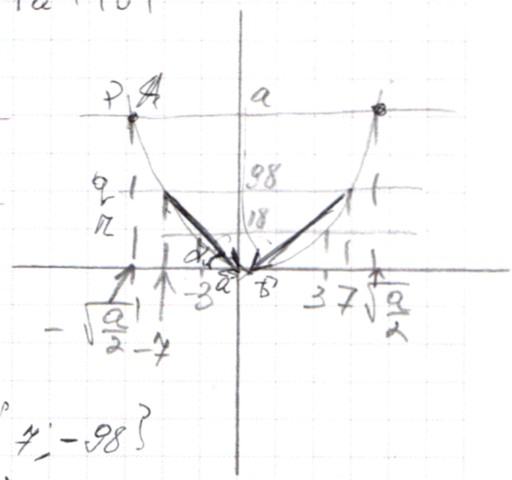
№1. $y=2x^2$ $y=98$ $y=18$ $y=a$ $a-?$ (треугольник с углом 120°)

$x=\sqrt{\frac{y}{2}}$

$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$



$\begin{array}{r} +196 \\ 81 \\ \hline 277 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 14 \\ 9 \\ \hline 126 \\ \times 2 \\ \hline 252 \end{array}$



$\cos\alpha_1=$

$\vec{a}_2=\{7;-98\}$

$\vec{b}_1=\{-7;$

$tg\alpha_2=\frac{98}{7}=14$

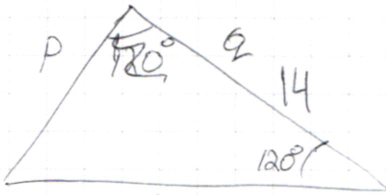
$tg\alpha_2=\frac{18}{3}=6$ $\quad tg\alpha_3=\frac{a}{\frac{\sqrt{a}}{2}}=a\cdot\frac{2}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}\cdot 2$ $\quad tg2\alpha_3=\frac{tg\alpha_3+tg\alpha_3}{1-tg\alpha_3 tg\alpha_3}=\frac{4\sqrt{a}}{1-4a}$

$\pi-2\alpha_3=120^\circ$ $\quad tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-ctg\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{1}=\sqrt{3}$

$tg120^\circ=-\sqrt{3}$

$tg\alpha_3=tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \sqrt{a}\cdot 2=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 6\sqrt{a}=\sqrt{3}$; $36a=3$

$a=\frac{1}{12}$



1) $p^2=81+196-2\cdot 9\cdot 14\cdot\cos 120^\circ=$

$=277+\cancel{252}\,126\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=277+126=403$

$p=\sqrt{403}$ $\quad 2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{403}$ $\quad 4\frac{a}{2}=403$

$2a=403$ $\quad \begin{array}{r} \times 29 \\ 29 \\ \hline 261 \\ +58 \\ \hline 41 \end{array}$

$a=$

2) $81=p^2+196+2\cdot p\cdot 14\cdot\frac{1}{2}=$

$=p^2+14p+196$

$p^2+14p+115=0$ $\quad D=49<0$

3) $196=81+p^2+2\cdot p\cdot 9\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow p^2+9p-115=0$ $\quad D=81+460=541$ $\quad \frac{1}{2}\left(1+\frac{541}{1}\right)=271$

$D=9+160=169$

$p_{1,2}=\frac{-3\pm13}{1}=-16;10$ $\quad \begin{array}{r} +186 \\ 120 \\ \hline 310 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1$ $\quad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos^2 5x = \frac{\cos 10x + 1}{2}$ $\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

№2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin 3x \sin 7x + (\cos 5x - \sin x)(\cos 5x + \sin x) + 4 =$

$\cancel{g'(x) = (\sin 3x)' \sin 7x + (\sin 7x)' \sin 3x - (\sin^2 x)'}$ $= \sin 3x \sin 7x + \frac{\cos 10x + 1}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 4 =$

$= \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cos 10x) + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 = \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x) + 4 =$

$= \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cancel{\frac{1}{2}} 2 \cos 6x \cos 4x) + 4 =$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\quad 2\sin\alpha + 2\sin\beta = (\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta + \sin\beta\cos\frac{\alpha}{2})(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta)$

$\Rightarrow 2\sin\alpha + 2\sin\beta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\beta + \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\beta\cos\beta +$

$+ \sin\beta\cos\beta\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\beta\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} =$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(\cos^2\beta + \sin^2\beta) + \sin\beta\cos\beta(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}) =$

$= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\beta\cos\beta = = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\beta$

$= \sin 3x \sin 7x + \cos 6x \cos 4x + 4$

$g'(x) = \cancel{3\cos}(\sin 3x)' \sin 7x + (\sin 7x)' \sin 3x + (\cos 6x)' \cos 4x + (\cos 4x)' \cos 6x + 4 =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x + (-6)\sin 6x \cos 4x - 4\sin 4x \cos 6x + 4 = \cancel{0} =$

$=$

$g(x) = \sin 3x \sin 7x + \frac{\cos 10x + 1}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 4 = \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cos 10x + \cos 2x) + 4$

$\cancel{g(x) = \sin 3x \sin 7x + (\cos 5x - \sin x}$

$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x + \frac{1}{2}(-\cos\sin 10x - 2\sin 2x) + 4 =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 5\sin 10x - \sin 2x + 4$

$\cancel{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta))) = \frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha -$

$- \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin\alpha(\cos\beta - \sin\beta) + \cos\alpha(\sin\beta - \cos\beta) =$

$= \frac{1}{2}(\cos\beta - \sin\beta)(\sin\alpha - \cos\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin(\beta - \frac{\pi}{4})\sqrt{2}\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sin(\beta - \frac{\pi}{4})\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) =$

$= (\sin\beta\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta)(\sin\alpha\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\beta - \cos\beta)(\sin\alpha - \cos\alpha)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-047

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $a_{16} \dots a_1 a_0$

~~Всего $9 \cdot 10^{16}$ чисел~~

$2 \cdot 3^{16}$ подходящих

~~1) $1 \cdot 8 \cdot 3^8 = 8 \cdot 3^8$~~

~~2)~~

1) первые 8
2) C 2
3) C 3
4) C 4
5) C 5
6) C 6
7) C 7
8) C 8
9) C 9
10) C 10
11) C 11

1) $1 \cdot 8 \cdot 2 = 8 \cdot 2$
2) $1 \cdot 8 \cdot 2^8 = 2^8$
3) 1 ·

1) $1^8 \cdot 2^9 = 2^9$
2) $1^9 \cdot 2^8 = 2^8$
3) $1^9 \cdot 2^8 = 2^8$
4) $1^9 \cdot 2^8$

1 раз $- 2^9$
11 раз $- 2^8$

Всего: $11 \cdot 2^8 + 2^9 =$
$= 2^8 \cdot (11 + 2) = \boxed{12 \cdot 2^8}$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$
$= \sin 3x \sin 7x + \frac{\cos 10x + 1}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + 4 \dots$
$= \sin 3x \sin 7x + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x)$
$\frac{1}{2}\sin 10x - \cos 4x + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x)$
$\sin 3x \sin 7x =$
$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) + \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 10x) =$
$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) =$
$= \frac{1}{2} \cdot 2(\sin 3x \sin x) =$
$g'(x) = \frac{1}{2}(-4\sin 4x + 2\sin 2x) =$
$= \frac{2}{2}(\sin 2x - 2\sin 4x) =$
$= \sin 2x (1 - 4\cos 2x)$

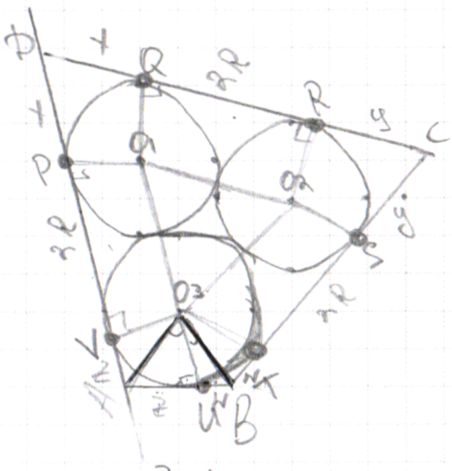
$\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1$
$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
$\cos 6x \cos 4x$
$= -6\sin 6x \cos 4x - 4\sin 4x \cos 6x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики) а) R-? $AD+BC-AB-CD=12$

$\cancel{z}+\cancel{x}+2R+\cancel{w}+2R+\cancel{y}-\cancel{z}-\cancel{w}-\cancel{x}-\cancel{y}-\cancel{2R}=12$

$2R=12 \Rightarrow R=6$



$z=w$

б) $\angle AO_3B$-? $\begin{cases} O_3B^2=R^2+w^2 \\ O_3A^2=R^2+z^2 \\ z+w=AB \end{cases}$ $O_3B^2+O_3A^2=2R^2+w^2+z^2$

$S=\frac{1}{2}R\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot AO_3\cdot O_3B\cdot\sin\alpha$

$AB^2=AO_3^2+BO_3^2-2\cdot AO_3\cdot BO_3\cdot\cos\alpha$

$12S$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{FA}{AC}=1$ $\frac{1}{2}$

$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}=\frac{7}{2}$

$a=\sqrt{R^2-w^2}$

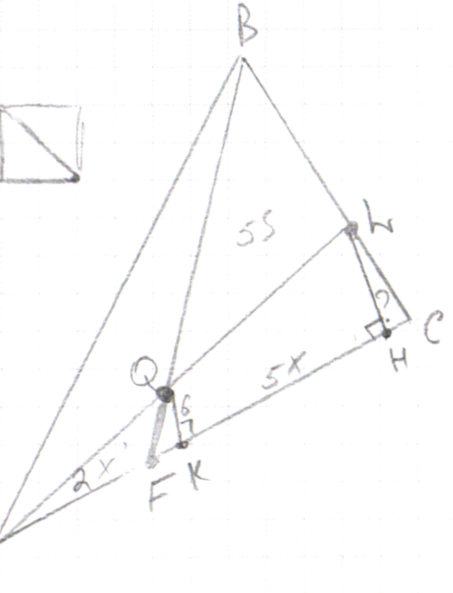
$R\sqrt{2}$

$a=\sqrt{w^2+R^2}$

$b=\sqrt{z^2+R^2}$

$\cancel{x+2R+y+w+z}$

$=\cancel{x+w+2R+y+z+2R}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-047

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ $\quad \frac{1}{\log_{x+4}}$ $\quad \sqrt{x+7} = t \Rightarrow x = t^2-7$, $x+4 = t^2-3$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4>0 \Rightarrow x>-4 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$

$\log_{t-t^2+7}(t^2-3) \geq 1$ $\quad \log_{-(t^2-t-7)}(t^2-3) \geq 1$ $\quad D = 1+2$

$\log_{t-t^2+7}(t^2-3) - \log_{t-t^2+7}(t-t^2+7) \geq 0$

$(t-t^2+6)\left(\frac{t^2-3}{t-t^2+7}-1\right) \geq 0$

$(t-t^2+6)\left(\frac{t^2-3-t+t^2-7}{t-t^2+7}\right) \geq 0$

$-(t^2-t-6)\left(\frac{2t^2-t-10}{t^2-t+2}\right) \geq 0$

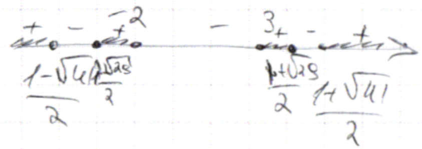
$(t^2-t-6)\left(\frac{t^2-t-10}{t^2-t-7}\right) \geq 0$

$(t^2-t-6)\left(\frac{t^2-t-10}{t^2-t-7}\right) \geq 0$

$D_1 = 1+24 = 25$ $\quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = 3; -2$

$D_2 = 1+40 = 41$ $\quad t = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$

$D_3 = 1+28 = 29$ $\quad t = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$



$\frac{1}{\log_{x+4}(\sqrt{x+7}-x)} \geq 1$

$\log_{x+4}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$(x+3)(\underbrace{\sqrt{x+7}}_{t}-(x+1)) \geq 0$

$x+7 \neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6 \neq 0$

$D = 1+24 = 25$

$t^2 = x+7$

$x+3 = t^2-4$ $\quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$

$x+1 = t^2-6$

~~$\sqrt{41} \vee \frac{1}{2}\left(1+\frac{41}{1}\right) = \frac{8}{22}$~~

$\sqrt{41} \vee 2$ $\quad \sqrt{41} \approx 6{,}5$

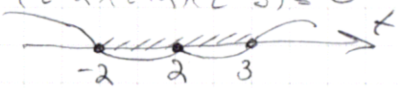
$\sqrt{29} = 5{,}3$

$(t^2-4)(t-t^2+6) \geq 0$

$(t^2-4)(t^2-t-6) \leq 0$

$D = 1+24 = 25$ $\quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = 3; -2$

$(t-2)(t+2)^2(t-3) \leq 0$



$-2 \leq t \leq 3$

$-2 \leq \sqrt{x+7} \leq 3$

$0 \leq \sqrt{x+7} \leq 3$

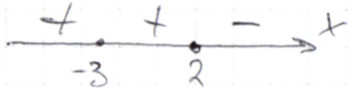
$0 \leq x+7 \leq 9$

$-7 \leq x \leq 2$

$\sqrt{x+7} = x+1$

$x+7 = x^2+2x+1$

$x^2+x-6 = 0$ $\quad D = 1+24 = 25$ $\quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$



$-4 < x \leq 2$

$-4 < x < 2$

$x \neq \{-3\}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ \sqrt{x+7} \geq x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \leq 0 \\ \sqrt{x+7} \leq x+1 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left(\sqrt{x+7}-(x+1)\right)\left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right)\geq 0$$

$\sqrt{x+7}=t$

$t^2=x+7$

$x+4=t^2-3$

$x+1=t^2-6$

$x=t^2-7$

$$\left(t-(t^2-6)\right)\left(\frac{t^2-3}{t-t^2+7}-1\right)\geq 0$$

$$(t-t^2+6)\left(\frac{t^2-3-t+t^2-7}{t-t^2+7}\right)\geq 0$$

$$-(t^2-t-6)\left(\frac{2t^2-t-10}{t-t^2+7}\right)\geq 0$$

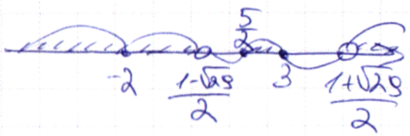
$$(t^2-t-6)\left(\frac{2t^2-t-10}{t^2-t-7}\right)\geq 0$$

$D=1+80=81 \quad t_{1,2}=\frac{1\pm 9}{4}=\frac{5}{2};-2$

$D=1+24=25 \quad t_{1,2}=\frac{1\pm 5}{2}=3;-2$

$D=1+28=29 \quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$\left(t-\frac{5}{2}\right)(t+2)^2(t-3)\ldots$



$$\left[\begin{array}{l} t<\frac{1-\sqrt{29}}{2} \\ 2{,}5\leq t\leq 3 \\ t>\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

$\sqrt{x+7}<\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$\frac{5}{2}\leq\sqrt{x+7}\leq 3$

$\sqrt{x+7}>\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)