МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 14-CO1

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

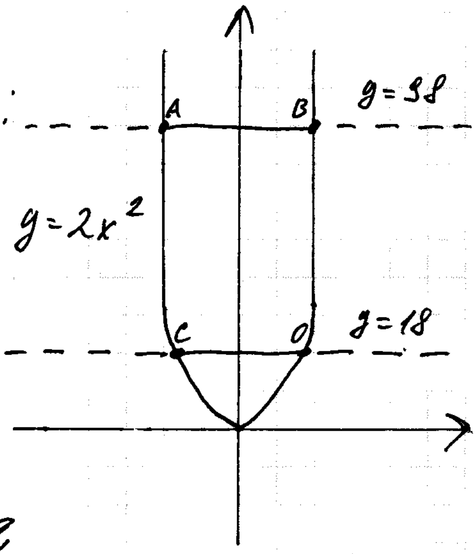
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

© МФТИ, 2017

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



Найдём длины отрезков AB и CD:

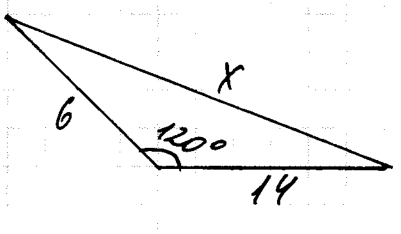
$98 = 2x^2$ $\qquad$ $18 = 2x^2$

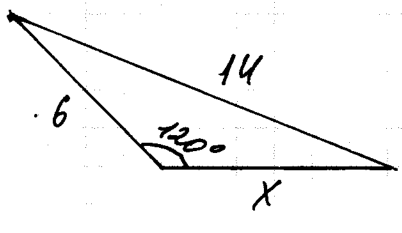
$x = \pm 7$ $\qquad$ $x = \pm 3$

$AB = 7-(-7) = 14$ $\qquad$ $CD = 3-(-3) = 6$

Итак, известны стороны двух отрезков треугольника, причём понятно, что сторона длины 6 не может лежать против ~~(д)~~ угла 120°.

Есть две возможности.





По теореме косинусов найдём

$x^2 = 36 + 196 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 316$

$196 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = 10$

Находим соответствующие значения параметра:

1. $2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{316}$ $\qquad$ 2. $2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = 10$

$a = 158$ $\qquad$ $a = 50$

Ответ: 50; 158

№ 2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Переобразуем выражение

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1) = \cos^2 2x - \cos^2 5x$

Функция принимает вид:

$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 =$

$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2} = (\cos 2x + \frac{1}{4})^2 + \frac{55}{16}$

Наибольшее значение функция примет при $\cos 2x = 1$, т.е. $g_{max} = 5$

Наименьшее значение функция примет при $\cos 2x = -1/4$, т.е $g_{min} = 3{,}4375$

Ответ: 5; 3,4375

№ 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	8	8	8	8	8	8	8										
2	7	8	8	8	8	8	8	8									
3	7		8	8	8	8	8	8	8								
4	7			8	8	8	8	8	8	8							
5	7				8	8	8	8	8	8	8						
6	7					8	8	8	8	8	8	8					
7	7						8	8	8	8	8	8	8				
8	7							8	8	8	8	8	8	8			
9	7								8	8	8	8	8	8	8		
10	7									8	8	8	8	8	8	8	
11	7										8	8	8	8	8	8	8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для первого вида имеем 10 свободных позиций, причем одна обязательно занята цифрой 0 => кол-во таких чисел будет $2(2^9-1)$.
Для остальных десяти видов 9 свободных позиций для цифр 0 и 7, причём цифра 0 обязательно должна быть, => кол-во чисел каждого из этих видов равно 2^8.
Получается: $2^9-2+10\cdot 2^8=3070$
Ответ: 3070

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

ОДЗ

$x+4>0$ $\quad$ $x>-4$

$\sqrt{x+7}-x>0$ $\quad$ $-7\leq x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$ $\quad$ $x\neq 2$

$-4<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x\neq 2$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1.\ \sqrt{x+7}-x-1>0\\2.\ x+4-\sqrt{x+7}+x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}3.\ \sqrt{x+7}-x-1<0\\4.\ x+4-\sqrt{x+7}+x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

1. $\sqrt{x+7}-x-1>0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>x+1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7\geq 0\\ x+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\geq 0\\ x+7>x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}-7\leq x<-1\\ -1\leq x<2\end{cases} \Rightarrow -7\leq x<2$$

2. $2x+4-\sqrt{x+7}\geq 0 \Rightarrow 2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7\geq 0\\ x+1<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\geq 0\\ x+7>x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}-7\leq x<-1\\ -1\leq x<2\end{cases} \Rightarrow -7\leq x<2$$

$$\begin{cases}x+7\geq 0\\ 4x^2+16x+16\geq x+7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x\leq -3\end{cases} \quad x\geq -\frac{3}{4} \Rightarrow x\geq -\frac{3}{4}$$

3. $\sqrt{x+7}-x-1<0 \Rightarrow x+1>\sqrt{x+7}$

$$(\cancel{x\geq -1})\begin{cases}x+7\geq 0\\ x^2+2x+1>x+7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x<-3\end{cases} \quad x>2 \Rightarrow x>2$$

4. $2x+4-\sqrt{x+7}<0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>2x+4$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7\geq 0\\ 2x+4<0\end{cases}\\ \begin{cases}2x+4\geq 0\\ x+7>4x^2+16x+16\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-7\leq x<-2\\ \begin{cases}x\geq -2\\ -3<x<-\frac{3}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}-7\leq x<-2\\ -2\leq x<-\frac{3}{4}\end{cases} \Rightarrow -7\leq x<-\frac{3}{4}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-СС1

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 1.\ \sqrt{x+7}-x-1 > 0 \\ 2.\ x+4-\sqrt{x+7}+x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 \leq x < -2 \\ x \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{4} \leq x < 2$$

$$\begin{cases} 3.\ \sqrt{x+7}-x-1<0 \\ 4.\ x+4-\sqrt{x+7}+x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ -7 \leq x < -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

Окончательно исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} -4 < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x \neq 2 \\ -\frac{3}{4} \leq x < 2 \end{cases}$$

Видим, что $\sqrt{29} > 5$, $\Rightarrow \frac{1+\sqrt{29}}{2} > 3$, поэтому решением неравенства будет множество $-\frac{3}{4} \leq x < 2$

Ответ: $[-0,75; 2)$.

№ 4

1) $AD+BC-AB-CD = R\sqrt{3}+2R+2R+R\sqrt{3}-2R\sqrt{3}-2R = 12$. $R=6$

2) AO и BO - биссектрисы, а сумма углов A и B четырехугольника равна $360°-120° = 240°$, то

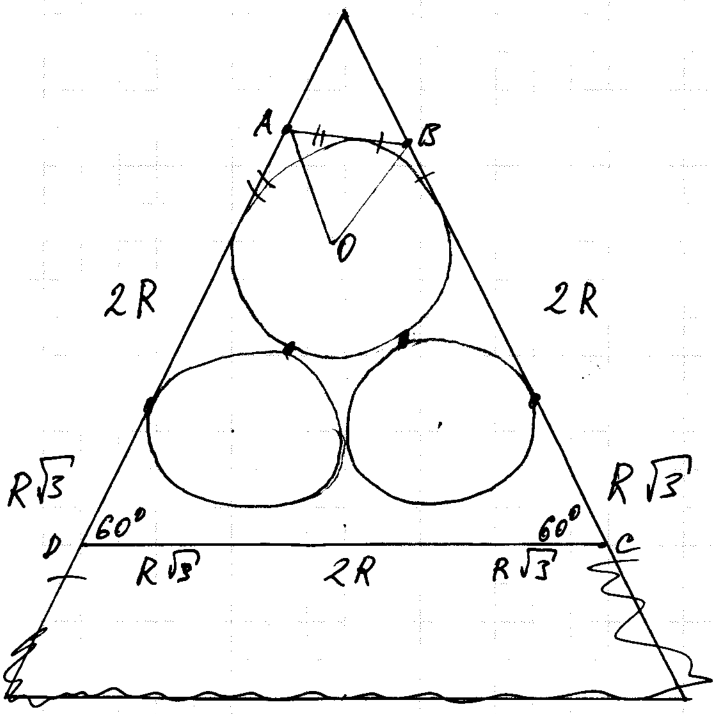
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle AOB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2} = 60°$

3) Используем две формулы S_Δ:

$AO \cdot BO \cdot \sin 60° = AB \cdot h = AB \cdot R$

$AB = \frac{AO \cdot BO \cdot \sin 60°}{R} = \frac{58\frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{29\sqrt{3}}{6}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\log_{8x+7}(1-x)(x+4)\geq 4$~~

№2

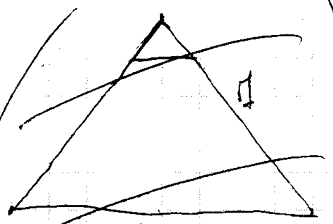
$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

Переобраз. выражен

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 -$
$- 2\cos^2 5x + 1) = \cos^2 2x - \cos^2 5x$

Функция примет вид:

$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4 = \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 =$
$= \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{7}{2} = \left(\cos 2x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{55}{16}.$



~~$D = 169 - 420 < 0$~~

Наиб. значен. функция примет при $\cos 2x = 1$, т.е. $g_{max} = 5$

Наим знач. функция примет при $\cos 2x = -1/4$, т.е $g_{min} = 3{,}4375$

Ответ: 5; 3,4375

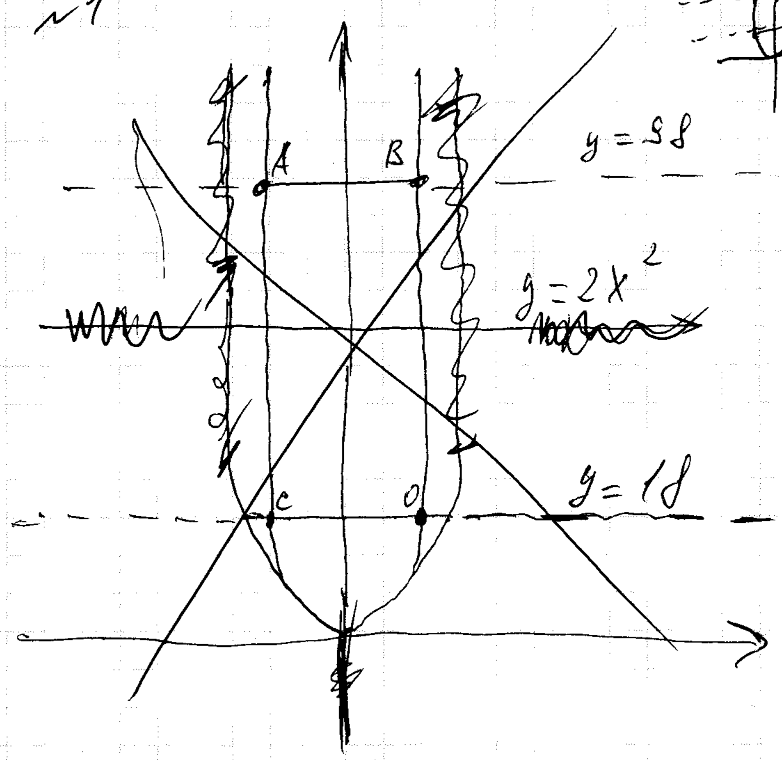
☑ черновик ☐ чистовик

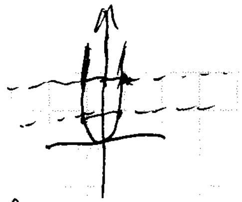
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1





Найдем длины отрезков AB и CD

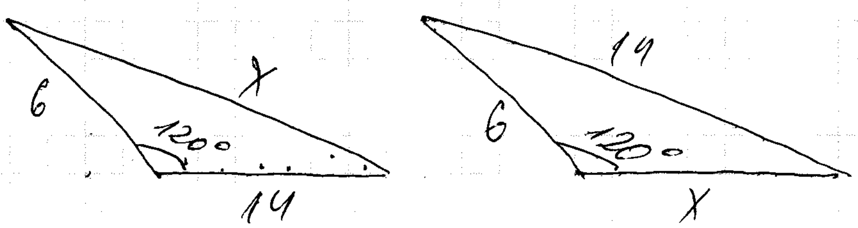
$98 = 2x^2 \quad x = \pm 7$

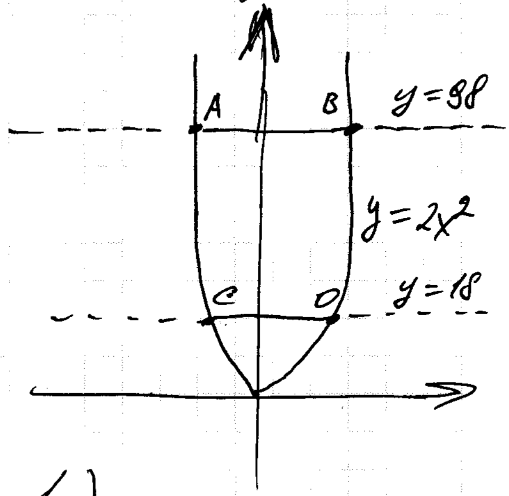
$AB = 7 - (-7) = 14$

$18 = 2x^2 \quad x = \pm 3$

$CD = 3 - (-3) = 6$

Итак, известны стороны двух отрезков Δ, причем понятно, что сторона длины 6 не может лежать против угла 120°. Есть 2 возможности.





По Т. Косинусов найдем

$x^2 = 36 + 196 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x^2 = 316$

$196 = 36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = 10$

Находим соответствующие ~~длины~~ значен парам. опр.

1. $2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{316} \quad a = 158$ 2. $2\sqrt{\frac{a}{2}} = 10 \quad a = 50$

Ответ: 50; 158.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

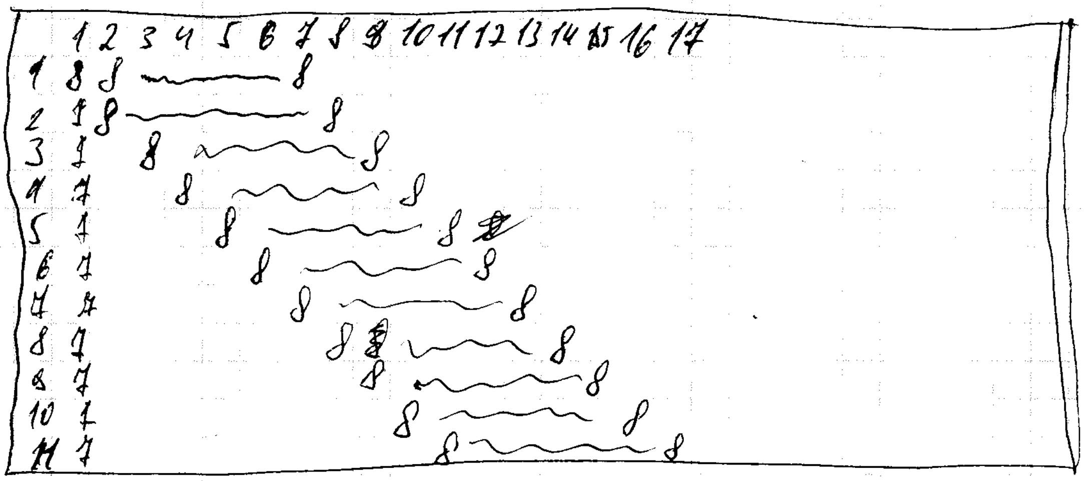
11-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3



~~Не может начинаться на 0 => после 1ой колонки~~

для 1-ого вида имеем 10 свободных ~~чисел~~ позиций, причем одна обязательно занята цифрой 0 => кол-во таких чисел будет $2(2^8-1)$.

Для остальных десяти видов 8 свободных позиций для цифр 0 и 7, причем цифра 0 обязательно должна быть, поэтому кол-во чисел ~~каждого~~ каждого из этих видов равно 2^8

Итого: ~~$2^9+10\cdot 2^8=3072$~~ $2^9-2+10\cdot 2^8=3070$

Ответ: ~~3072~~ 3070

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№~~4~~5 №1,2,3,5

ОДЗ

$$\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-4 \\ -7\le x<\frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4<x<\frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x\neq 2 \end{cases}$$

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (1)\ \sqrt{x+7}-x-1>0 \\ (2)\ x+4-\sqrt{x+7}+x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (3)\ \sqrt{x+7}-x-1<0 \\ (4)\ x+4-\sqrt{x+7}+x\le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

1. $\sqrt{x+7}-x-1>0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>x+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+7\ge 0 \\ x+1<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+7>x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -7\le x<-1 \\ -1\le x<2 \end{array}\right. \Rightarrow -7\le x<2$$

2.

$2x+4-\sqrt{x+7}\ge 0 \Rightarrow 2x+4\ge\sqrt{x+7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+7\ge 0 \\ 4x^2+16x+16\ge x+7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -7 \\ x\le -3 \end{cases} \quad x\ge -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\ge -\frac{3}{4}$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)