МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 5-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Так как парабола задана функцией $y=2x^2$, значит середины отрезков, отсекаемых от прямых $y=98$, $y=18$ и $y=a$ лежат на оси OY.

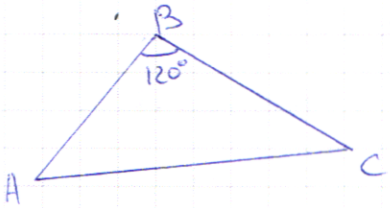
$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=98 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=98 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-7 \Rightarrow$ длина данного отрезка:

$x_1-x_2=14$

$\begin{cases} y=2x^2 \\ y=18 \end{cases} \Rightarrow 2x^2=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_1=3;\ x_2=-3 \Rightarrow$ длина данного отрезка:

$x_1-x_2=6$

I



$|AB|=14$
$|BC|=6$ $\quad |AC|-?$

По теореме косинусов: $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2-2|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 120°=$

$=196+36+2\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot14=196+36+84=316$

$|AC|=\sqrt{316}=2\sqrt{74}$

$|AC|$ – длина отсекаемого отрезка от прямой $y=a$

Т.к. середина AC лежит на оси OY, значит парабола $y=2x^2$ пересекает прямую $y=a$ в точках $\pm\frac{2\sqrt{74}}{2}=\pm\sqrt{74} \Rightarrow x^2=74 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2=148 \Rightarrow a=148$

II

$|AB|=6$ $\quad |BC|-?$
$|AC|=14$

(сторона длиной 6 не может лежать напротив угла 120°, когда в треугольнике есть сторона большая по длине (14), это следует из теореме о неравенстве треугольника)

Пусть $|BC|=t$

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2\,|AB|\cdot|BC|\cdot\cos 120^\circ$$

$$196 = 36 + t^2 + 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 6\cdot t$$

$$t^2 + 6t - 160 = 0$$

$$t = -3 \pm \sqrt{9+160}$$

$$t = -16 \;\vee\; t = 10 \Rightarrow |BC| = 10$$

н.к. (сторона не может иметь отрицательную длину)

Парабола пересекает прямую $y=a$ в точках $\pm\frac{10}{\sqrt{2}} = \pm 5$ (аналог. I п.)

$$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow 2x^2 = 50 \Rightarrow a = 50$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a = 148 \\ a = 50 \end{array}\right.$

N3.

Рассмотрим такое число:

1	1	1	1	1	1	1										
	1	1	1	1	1	1	1									
		1	1	1	1	1	1	1								
			1	1	1	1	1	1	1							
				1	1	1	1	1	1	1						
					1	1	1	1	1	1	1					
						1	1	1	1	1	1	1				
							1	1	1	1	1	1	1			
								1	1	1	1	1	1	1		
									1	1	1	1	1	1	1	
										1	1	1	1	1	1	1

Варианты того, как могут быть расположены 7 восьмерок идущих подряд

Всего 11 вариантов

Первой цифрой в числе может быть либо 7 либо ~~…~~ 8.

1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1

В остальных клетках по два варианта (0 или 7)

То есть всего вариантов ~~…~~ составить такое число:

$$(2^{10}-2) + 10\,(2^9-1)$$

мы вычитаем два варианта, когда в числе 7 восьмерок и либо 10 нулей, либо 10 „7"

вычитаем 1 вариант когда в числе только „7" и „8"

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2^{10}-2)+10(2^9-1) = 1024-2+10(512-1)=1022+5110=6132$

вариант, когда в начале числа ~~все~~ 7 восьмерок

вычитать вариант, когда все нули не надо, потому что в начале числа всегда присутствует ~~восьмерка~~ семерка

Ответ: 6132

N5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x)\geq 0$

$\sqrt{x+7}-x-1=0$ $\quad x\geq -1$ $\qquad 2x+4-\sqrt{x+7}=0$

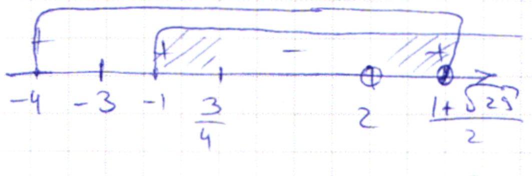
$x=2 \quad x=-3$ $\qquad 2x+4=\sqrt{x+7} \quad x\geq -2$

$4x^2+16x+16=x+7$

$4x^2+15x+9=0$

$x=\frac{-15\pm\sqrt{81}}{8}$

$x=-3 \qquad x=\frac{3}{4}$



ОДЗ

$x+7\geq 0$

$x\geq -7$

$x+4 > 0$

$x>-4$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x$

$x\leq 0 \quad x>0:$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$x\in\left(0;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$\sqrt{x+7}\neq x+1 \qquad x\geq -1$

$x+7\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6\neq 0$

$x\neq\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$

$x\neq 2 \qquad x\neq -3$ н.к.

$x\in\left(-4,\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)\setminus\{2\}$

Ответ: $x\in\left[-1;\frac{3}{4}\right]\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

N7. У Пинокkио было 5 промежутков по 45 чисел в каждом. Так как разность ~~двух~~ двух любых из выбранных 30 чисел не была равна 45, значит данные числа ~~занимали~~ занимали разные места в своих промежутках.

Если рассмотреть каждый промежуток как последовательность, то:

$[1;45]: x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 \dots x_{45}$
$\quad\quad\quad\;\; 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad\; 45$

$[46;90]: a_1; a_2; a_3; a_4; a_5 \dots a_{45}$
$\quad\quad\quad\;\; 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50 \quad\; 90$

$[91;135]: y_1; y_2; y_3; y_4; y_5 \dots y_{45}$
$\quad\quad\quad\;\; 91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95 \quad\; 135$

$[136;180]: t_1; t_2; t_3; t_4; t_5 \dots t_{45}$
$\quad\quad\quad\;\; 136 \quad 137 \quad 138 \quad 139 \quad 140 \quad\; 180$

$[181;225]: b_1; b_2; b_3; b_4; b_5 \dots b_{45}$
$\quad\quad\quad\;\; 181 \quad 182 \quad 183 \quad 184 \quad 185 \quad\; 225$

Понятно, что разность между членами одной последовательности не будет превышать 45, а значит не будет делиться на 45. Разность между членами ~~с~~ ~~...~~ разных прогрессий с одинаковым номером ~~равна 45, т.к.~~ кратна 45, т.к. в каждой последовательности 45 членов, разность между двумя соседними, и первый член следующей последовательности минус последний предыдущей равно 1.

Значит ~~Буратино~~ ~~б~~ Пиноккио брал числа с различными номерами. Чтобы сумма была минимальной, он должен был взять первые 6 членов пятой последовательности, вторые шесть - четвертой, третьи 6 - третьей и т.д.

То есть: $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + t_7 + t_8 + t_9 + t_{10} + t_{11} + t_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{16} + y_{17} + y_{18} + a_{19} + a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} + x_{29} + x_{30} = \frac{181+186}{2}\cdot 6 + \frac{142+147}{2}\cdot 6 + \frac{103+108}{2}\cdot 6 + \frac{64+69}{2}\cdot 6 + \frac{25+30}{2}\cdot 6 = 1101 + 867 + 645 + 399 + 165 = 3177$

Ответ: 3177

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = (\sin 3x)' \sin 7x + (\sin 7x)' \sin 3x - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)' =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\cos x \sin x - 2\cdot 5 \sin 5x \cos 5x =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= \frac{3}{2}\left(\sin(7x+3x) - \sin(3x-7x)\right) + \frac{7}{2}\left(\sin(7x+3x) - \sin(7x-3x)\right) - \sin 2x -$

$- 5\sin 10x = \frac{3}{2}\sin 10x + \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{7}{2}\sin 10x - \frac{7}{2}\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= \cancel{5\sin 10x} - 2\sin 4x - \sin 2x - \cancel{5\sin 10x} = -2\sin 4x - \sin 2x =$

$= -4\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = -\sin 2x(4\cos 2x + 1) = 0$

$\sin 2x = 0$ $\qquad$ $4\cos 2x + 1 = 0$

$2x = 0$ $\qquad$ $\cos 2x = -\frac{1}{4}$

$x = 0$ $\qquad$ $2x = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $2x = -\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

$x = \frac{\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}$ $\qquad$ $x = \frac{-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}$

$g(0) = \sin 0 \cdot \sin 0 - \sin^2 0 + \cos^2 0 + 4 = 5$

$g\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) = \sin \frac{3\arccos(-\frac{1}{4})}{2} \cdot \sin \frac{7\arccos(-\frac{1}{4})}{2} - \sin^2\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{5\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) + 4$

$g\left(-\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) \cdot \sin\left(-\frac{7\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) - \sin^2\left(-\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) + \cos^2\left(-\frac{5\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) + 4$

$\sin\left(\frac{3\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)\left(-\sin\left(\frac{7\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)\right)$

$\sin^2 \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2} = \sin^2\left(-\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)$ $\quad \Rightarrow$

$\cos^2\left(\frac{5\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{5\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)$

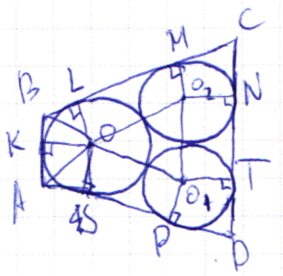
$\Rightarrow g\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right) = g\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{-2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \max(g(x)) = 5 \quad \min(g(x)) = g\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)$

Ответ: max = 5

$\min = g\left(\frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}\right)$

N4



O - центр ω_3

O_1 - центр ω_1 а) R-?

O_2 - центр ω_2 б) $\widehat{AOB}$ -?

По теореме о касательных к окружности:

$|AK| = |AS|$ $|CN| = |CM|$

$|DP| = |DT|$ $|BL| = |BK|$

Пусть $|AK| = |AS| = y$ $|CN| = |CM| = z$

$|DP| = |DT| = x$ $|BL| = |BK| = t$

$|SP| = l$ $|TN| = m$ $|ML| = k$

Тогда:

$\cancel{AB=}\ |AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 12$

$\cancel{y} + \cancel{x} + l + \cancel{t} + \cancel{z} + k - \cancel{y} - \cancel{t} - \cancel{x} - \cancel{z} - m = 12$

$l + k - m = 12$

$l + k = m + 12$

$l = k = m = 2R$ (т.к. SOO_1P - прямоугольник (две стороны равны, параллельны и перпендикулярны третьей), аналог. с TO_1O_2N и MO_2OL)

$2R + 2R = 2R + 12$

$2R = 12$

$R = 6$ Ответ: $R = 6$

б) $\triangle OO_1O_2$ - равносторонний $\Rightarrow \widehat{O_2OO_1} = 60°$

$\widehat{LOO_2} = 90°$

$\widehat{SOO_1} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{LOS} = 360° - 60° - 90° - 90° = 120°$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Delta BOK = \Delta BOL$ (BO - общая; $|KO| = |LO| = R$; $|BK| = |BL| = t$)
$\Delta KOA = \Delta SOA$ (AO - общая; $|OK| = |OS| = R$; $|AK| = |AS| = y$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\widehat{LOB} = \widehat{BOK}$, $\widehat{KOA} = \widehat{SOA}$ $\Rightarrow$ $\widehat{BOA} = \frac{1}{2}\widehat{LOS} = 60°$

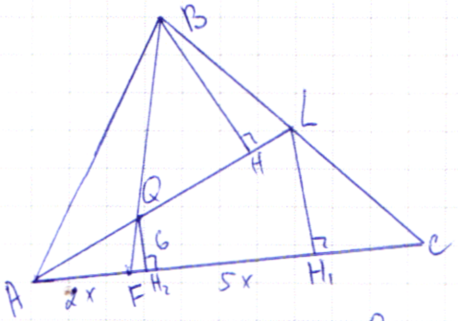
Ответ: 60°

в) $S_{AOB} = \frac{1}{2}|AO| \cdot |BO| \cdot \sin 60°$
$S_{AOB} = \frac{1}{2}|OK| \cdot |AB|$ $\Rightarrow |AO| \cdot |BO| \cdot \sin 60° = |OK| \cdot |AB|$

$$|AB| = \frac{|AO||BO|\sin 60°}{|OK|} = \frac{58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{29\sqrt{3}}{6}$$

Ответ: $|AB| = \frac{29\sqrt{3}}{6}$

N 6.



$\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{2}{5}$ $\quad \frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$\Delta AQH_2 \sim \Delta ALH_2 \Rightarrow$ (по трем углам)

$\Rightarrow \frac{QH_2}{LH_1} = \frac{AQ}{AL}$

$S_{BQL} = \frac{1}{2}|BH| \cdot |QL|$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}|BH| \cdot |AL| + \frac{1}{2}|LH_1| \cdot |AC|$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{|BH| \cdot |QL|}{|BH||AL| + |LH_1||AC|} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{S_{ABQ}}{S_{ABL}} = \frac{S_{ABL} - S_{BQL}}{S_{ABL}} = 1 - \frac{S_{BQL}}{S_{ABL}} = 1 - \frac{BQ}{AB}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

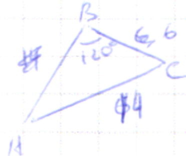
$y=2x^2$ $\quad 2x^2=98 \quad 2x^2=18$

$y=98 \quad x^2=49 \quad x^2=9$

$y=18 \quad x=7 \quad x=-7 \quad x=3 \quad x=-3$

$y=a \quad \cdot 14 \quad 6$

$2x^2=632$



$|AC|^2 = 36+14^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 120$
$\quad + 6\cdot 14$

$a=632 \quad |AC|^2=316$

$36+196+84$

$\times\, 14 \cdot 14 = 56 + 14 = 196 \quad \times\, 14\cdot 6 = 84$

$x^2=74$
$2x^2=148$

$\boxed{a=148 \quad a=50}$

$2x^2=50$

$316 \mid 2$
$158 \mid 2$
$74 \mid 2$
37

$2\sqrt{74}$
$\sqrt{74}$

$x^2+196+14x=36$
$x^2+14x+160=0$
$x=-7\pm\sqrt{49-160}$

$x^2+36+6x=196$
$x^2+6x-160=0$
$x=-3\pm\sqrt{9+160}$
$x=-3+13$
$x=10$

$2\cos 5x$
$-10\sin 5x$

$(\cos^2 5x)' - 5\cdot \sin 5x$

$u(x)=5x$
$f(u)=\cos^2 u$

$5 \quad f'(u)=2\cos u\cdot(-\sin u)$
$f'(x)=5$

$u(x)=5x$
$t(u)=\cos u$
$f(t)=t^2$

$(\sin^2 x)'$
$u(x)=\sin x$
$f(u)=u^2$
$f'(x)=\cos x\cdot 2u$

$(\sin 3x)'$
$u(x)=3x$
$f(u)=\sin u$
$f'(u)=3\cos 3x$

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=(\sin 3x)'\sin 7x+(\sin 7x)'\sin 3x-(\sin^2 x)'+(\cos^2 5x)'=$

$=3\cos 3x\cdot\sin 7x+7\cos 7x\cdot\sin 3x-\cos x\cdot 2\sin x + 10\sin 5x\cdot\cos 5x$

$=3\cos 3x\cdot\sin 7x+7\cos 7x\cdot\sin 3x-\sin 2x+5\sin 10x=0$

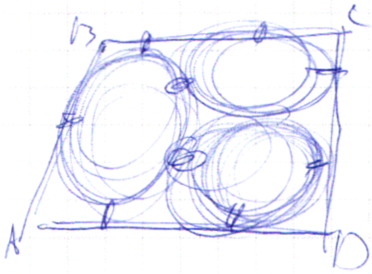
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

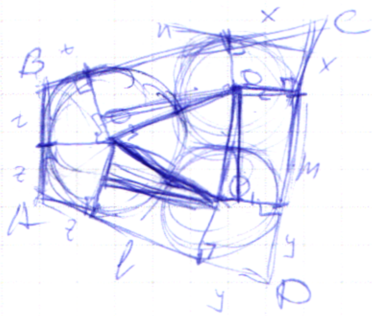
8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 $\quad -2 \quad 2^{10}-2$
1 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 2 2 2 2 2 $\quad -1 \quad 2^9-1$
1 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 2 2 2 2 $\quad -1 \quad 2^9-1$
1 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 2 2 2 $\quad -1$
1 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 8 2 $\quad -1$
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 8 8 8 8 8 8 8 $\quad -1$

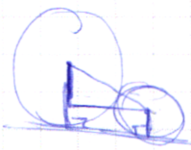
$2^{10}-2+10(2^9-1)$

$1024-2+10(512-1)=$

$=1022+5110=6132$







$AB + BC = AB + CD + 12$

$\cancel{x} + n + \cancel{t} + \cancel{y} + l + \cancel{z} = \cancel{t} + \cancel{z} + \cancel{x} + m + \cancel{y} + 12$

$n + l = m + 12$

$\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} = \sin\alpha \quad n =$

$n = \sqrt{(R_3+R_2)^2 - (R_3 - R_2)^2} =$

$= \sqrt{R_3^2 + 2R_3R_2 + R_2^2 - R_3^2 + 2R_3R_2 - R_2^2} =$

$= 2\sqrt{R_3R_2}$

$m = 2\sqrt{R_1R_2} \qquad l = 2\sqrt{R_1R_3}$

$\sqrt{R_3R_2} + \sqrt{R_3R_1} = \sqrt{R_1R_2} + 6$

$\sqrt{R_3} = \frac{\sqrt{R_1R_2} + 6}{\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1}}$

$\sqrt{x+7} - x > 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$

$\sqrt{x+7} > x$

$x \le 0 \quad x > 0$

$x + 7 > x^2 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x^2 - x - 7 < 0$

$\log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) \geq 1$

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(2x + 4 - \sqrt{x+7}) \geq 0$

ОДЗ

$x \geq -7$

$x + 4 > 0$

$x > -4$

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$x \le 0 \quad x \geq 0$

$x + 7 > x^2$

$x^2 - x - 7 \le 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+28}}{2}$

$x = 3 \quad x = -2$

$x \in (0; 3)$

$\times 16$, 9, 144

$225 - 144 = 81$

$\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, 2

$4 < 1 + \sqrt{29}$

$3 < \sqrt{29}$

$3 < 29$

$\sqrt{x+7} = x + 1$

$\cancel{x + 7 = x^2}$

$x = 2 \quad x = -3$

$\sqrt{x+7} = 2x + 4 \quad x \geq -2$

$x + 7 = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 + 15x + 9 = 0$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 144}}{8}$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8}$

$x = -3 \qquad x = \frac{3}{4}$

$+ \quad - \quad -3 \quad -1 \quad \frac{3}{4} \quad 2 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x \in [-1; \frac{3}{4}] \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$\sqrt{x+7} \neq x + 1 \qquad x \geq -1$

$x + 7 \neq x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 6 \neq 0$

$x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$x \neq 2 \qquad x \neq -3$

☒ черновик ☐ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

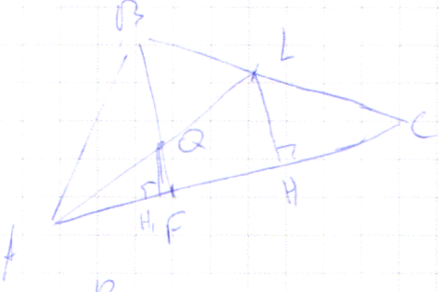
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-016

ШИФР

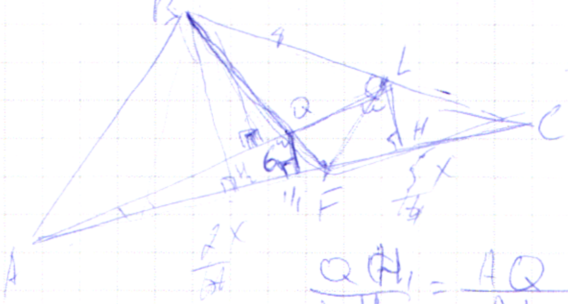
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAL}} = \frac{5}{12}$



$\frac{AH_1}{AH} = \frac{AQ}{AL}$ $\frac{QL}{AL} = \frac{HH_1}{AH}$

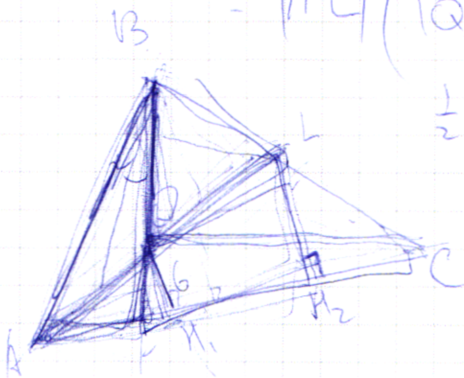
$\frac{AF}{AC} = \frac{2}{7}$

$\frac{QH_1}{LH} = \frac{AQ}{AL}$ $\frac{6}{x}$ $|LH| = \frac{6|AL|}{|AQ|}$

$\frac{S_{ABC} = \frac{1}{2}|BH_2|\cdot|AL| + \frac{1}{2}|LH|\cdot|AC|}{S_{BQL} = \frac{1}{2}|BH_2|\cdot|QL|} = \frac{12}{x}$

$\frac{AL}{QL} + \frac{|LH|\,|AC|}{|BH_2|\,|QL|} =$

$= |AL|\left(\frac{1}{|QL|} + \frac{6|AC|}{|BH_2|\,|QL|\,|AQ|}\right)$



$\frac{1}{2}|LH_2|\,|AC| + \frac{1}{2}|BH|\,|AL|$

$\frac{BH_1}{BH_2}\,\frac{LQ}{AC} = \frac{5}{12}$

12 $\frac{\frac{5}{7}S_{ABC}}{}$ $\frac{S_{BQL}}{\frac{5}{7}S_{ABC}} = \frac{5\cdot 7}{5\,12} = \frac{7}{12}$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{S_{ABQ}}{S_{ABL}}$ $\frac{h}{h_1}\frac{QL}{FC} = \frac{7}{12}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{12}$

$\frac{S_{ABL} - S_{BQL}}{S_{ABL}} = 1 - \frac{S_{BQL}}{S_{ABL}}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{ABL}} = \frac{BQ}{AB}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 13
(Нумеровать только чистовики)

[1; 45]   25 26 27 28 29 30

[46; 90]   64 65 66 67 68 69 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

[91; 135]   103 104 105 106 107 108

[136; 180]   142 143 144 145 146 147

[181; 225]   181 182 183 184 185 186

$$\begin{array}{r} 69 \\ +64 \\ \hline 133 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 181 \\ +186 \\ \hline 367 \end{array}$$

25	26	27	28	29	30
64	65	66	67	68	69
103	104	105	106	107	108
142	143	144	145	146	147
181	182	183	184	185	186

$\frac{55}{2}\cdot 6 = 55\cdot 3$

$133\cdot 3$

$215\cdot 3$

$289\cdot 3$

$367\cdot 3$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 3 \\ \hline 867 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 367 \\ \times 3 \\ \hline 1101 \end{array}$$

$165+399+645+867+1101=$

$=1500+810+867=1500+1677=3177$

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=(\sin 3x)'\cdot\sin 7x+(\sin 7x)'\sin 3x-((\sin x)'\sin x+(\sin x)'\sin x)+$
$+(\cos 5x)'\cos 5x+(\cos 5x)'\cos 5x+(4)'=$

$=3\cos 3x\sin 7x+7\cos 7x\sin 3x-2\cos x\sin x-2\cdot 5\sin 5x\cos 5x=$

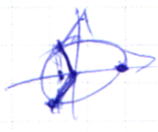
$=3\cos 3x\sin 7x+7\cos 7x\sin 3x-\sin 2x-5\sin 10x$

$\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$

$=\cos\alpha\sin\beta$

$\frac{3}{2}(\sin 10x+\sin 4x)+\frac{7}{2}(\sin 10x-\sin 4x)-\sin 2x-5\sin 10x=0$

$\cancel{5\sin 10x}-2\sin 4x-\sin 2x\cancel{-5\sin 10x}=0$



$2\sin 4x+\sin 2x=0$

$4\sin 2x\cos 2x+\sin 2x=0$

$\sin 2x(4\cos 2x+1)=0$

$\sin 2x=0$

$2x=\pi k$

$x=\frac{\pi}{2}k$

$\cos 2x=-\frac{1}{4}$

$2x=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2\pi k$

$\pi-\arccos\frac{1}{4}$

$\arccos\frac{1}{4}-\pi+2\pi k$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-016

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 0 \cdot \sin 0 - \sin 0 + \cos 0 + 4 = 5$

$\sin\left(\frac{3}{4}\right)\sin\left(-\frac{1}{4}\right)$

$\sin\left(\frac{3\arccos\frac{1}{4}}{2}\right)\sin\left(\frac{7\arccos\left(\frac{1}{4}\right)}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{5\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\right) + 4 =$

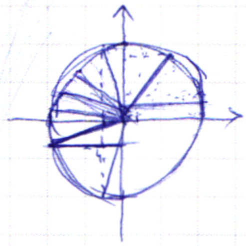
$=$

$\frac{\pi}{3}$ $\cos = \frac{1}{2}$ $\arccos\frac{1}{2}$ $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{\arccos\frac{1}{2}}{2}\right)$

$\frac{\pi}{6}$ $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{16}$

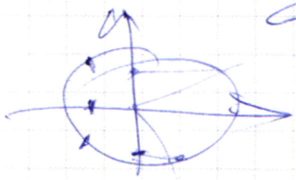
$\sin\left(\frac{\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\right)$

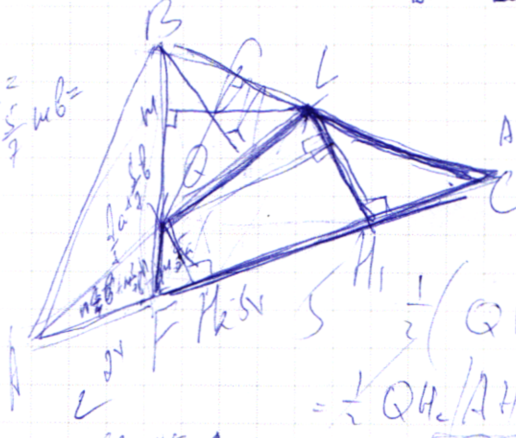


$\sin\left(45° + \frac{\arcsin\frac{1}{4}}{2}\right)$

14:00

18:00





$BQ = \frac{2}{7}ma + \frac{5}{7}mb =$

$\frac{1}{2}\left(QH_2 + LH_1\right)H_2H_1 + \frac{1}{2}LH_1 CH_1 + \frac{1}{2}QH_2 AH_2 =$

$= \frac{1}{2}QH_2\left(AH_1\right) + \frac{1}{2}\left(LH_1\right)CH_2 = \frac{1}{2}LH_1 \cdot CA$

$\frac{1}{2}BH\frac{5}{7}AC = S_{BQL} +$

$\frac{5 \cdot 12}{7 \cdot 9} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = S$

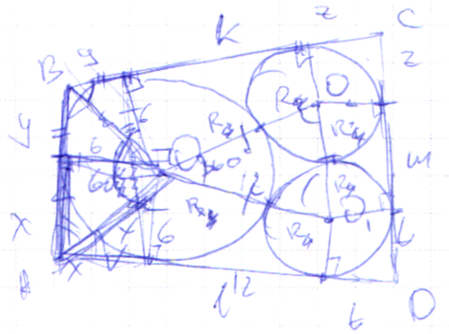
$\frac{5}{7}S_{BAC} = S_{BQL} + \frac{1}{2}\left(LH_1 \cdot CH_1 + LH_1 H_1H_2 + QH_2 \cdot H_1H_2 + QH_2 + H_2F\right)$

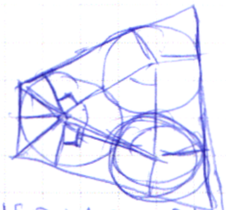
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

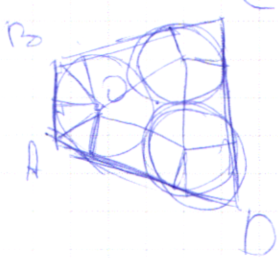
(Нумеровать только чистовики)





$180+60=240$

$360-240=120$



$l+k=m+12$

$\sqrt{R^2}+\sqrt{R^2}=\sqrt{R^2}+6$

$2R=R+6$ $\qquad |AO|=s$

$R=6$ $\qquad |BO|=\frac{58}{s}$

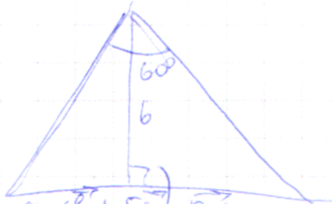
$|AO|\cdot|BO|=58$ $\qquad x=\sqrt{s^2-36}$

$y=\sqrt{\frac{58^2}{s^2}-36}$

$|AB|^2=|AO|^2+|BO|^2-|AO||BO|$ $\qquad \sqrt{s^2-36}+\frac{\sqrt{58^2-36s^2}}{s}$

$|AB|^2=(|AO|+|BO|)^2+|AO||BO|$

$\vec{QL}=\vec{QB}+\vec{BL}=n\vec{FB}+x\vec{BC}=-\frac{2n}{7}\vec{b}-\frac{5n}{7}\vec{a}+x\vec{b}$



$S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

$S=\frac{1}{2}h\cdot c$ $\qquad \vec{AL}=-\vec{a}+x\vec{b}$

$LH_1=\frac{6\,AL}{AQ}$

$hc=ab\sin\alpha$

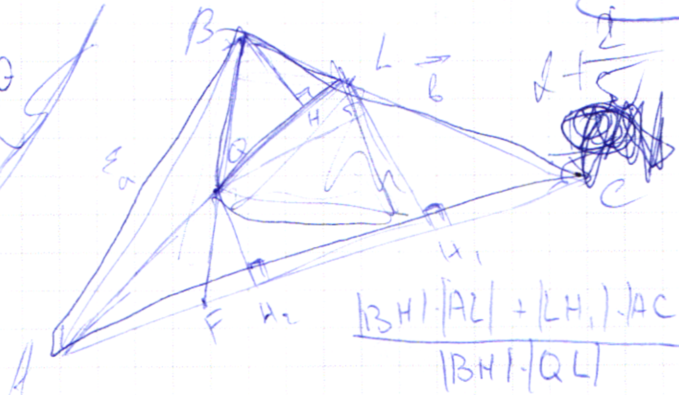
$LH_1=\frac{\left(12x\vec{b}-\frac{12\cdot2n}{7}\vec{b}-\frac{12\cdot5n}{7}\vec{a}-5x\vec{b}+5\vec{a}\right)\vec{BH}}{5\vec{b}-5\vec{a}}$

$h=\frac{ab\sin\alpha}{c}$

$\vec{AC}=\vec{b}-\vec{a}$

$\sqrt{36\cdot4x^2}$

$\sqrt{9-x^2}$ AQ



$\frac{QH_2}{LH_1}=\frac{AQ}{AL}=\frac{AH_2}{AH_1}$

$\vec{AQ}=x\vec{AL}$

$\vec{AQ}=\vec{AF}+\vec{FQ}$

$\frac{|BH|\cdot|AL|+|LH_1|\cdot|AC|}{|BH|\cdot|QL|}=\frac{12}{5}$

$12|BH|\cdot|QL|=5|BH||AL|+5|LH_1||AC|$

$\vec{BF}=\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{5}{7}\vec{a}$

$(12QL-5AL)|BH|=5LH_1\,AC$