

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

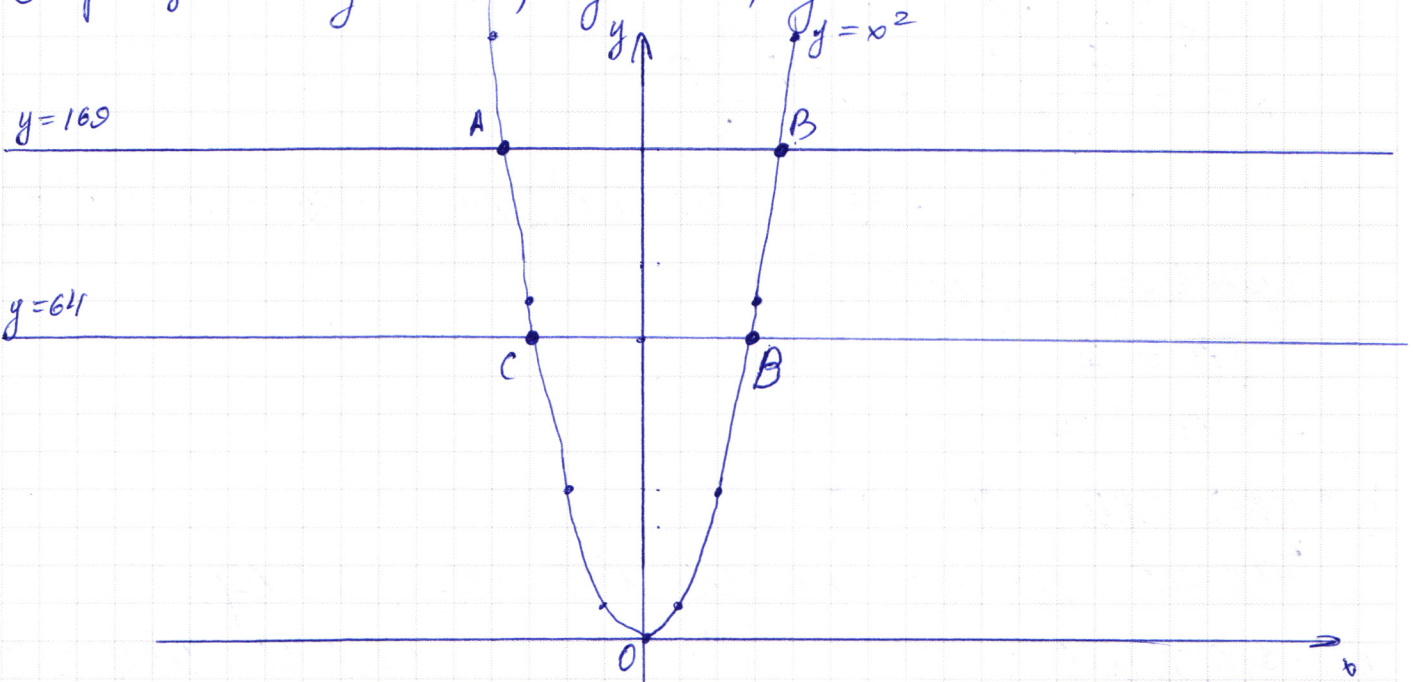
9-16

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Построим график, на котором будут изображены функции  $y = x^2$ ;  $y = 169$ ;  $y = 64$ .



при пересечении прямых  $y = 169$  и  $y = 64$  параболы  $y = x^2$  отсечаются отрезки  $AB$  и  $CB$ . Найдем точки пересечения прямых с параболой:

1)  $x_1^2 = 169$ , 2)  $x_2^2 = 64$  ; отсюда мы найдем расстояния  $x_1 = \pm 13$ ,  $x_2 = \pm 8$ ; где между полученными точками т.е. длину каждого отрезка, 3)  $x_3^2 = a$ ;  $x_3 = \pm \sqrt{a}$

$$AB = 2|x_1| = 26; \quad CB = 2|x_2| = 16; \quad AC = 2|\pm\sqrt{a}| = 2\sqrt{a}$$

т.к. угол  $120^\circ$  в треугольнике самый большой по значению (т.к. сумма углов в т-ке равна  $180^\circ$ ), то напротив него лежит наибольшая сторона —  $AB = 26$ .  
Применим теорему косинусов ( $AC = 2a$ )

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \alpha$$

Противоположная сторона  $AC = 2\sqrt{a}$ ;  $\cos \alpha = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$26^2 = 4a + 16^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$4a + 32\sqrt{a} + 16^2 - 26^2 = 0; \rightarrow 4a + 32\sqrt{a} + (16-26)(16+26) = 0$$

$$4a + 32\sqrt{a} + (-420) = 0 \quad | :4$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0; \text{ Замена } \sqrt{a} = t$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484; \sqrt{D} = 22$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm 22}{2} = \frac{-8 \pm 22}{2}$$

$$t_1 = 7; \quad t_2 = -15 - \text{ не можем быть, т.к. } \sqrt{a} \geq 0$$

Обратная замена

$$\sqrt{a} = 7$$

$$\Rightarrow a = 49$$

1) Ответ: при  $a = 49$

Можно также применить м. косинусов по-другому: если  $\angle C$  будет некоем углом  $120^\circ$ .

$$AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2AB \cdot CB \cos 120^\circ$$

$$(2\sqrt{a})^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$4a = 676 + 256 + 416$$

$$4a = 1348$$

$$\Rightarrow a = 337$$

$$2) a = 337$$

Ответ: из трёх случаев можно выделить два случая с углом  $120^\circ$  при  $a = 49$  и  $a = 337$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

Чтобы найти min и max функции, нужно  
для начала найти её производную и <sup>прирав-</sup> нулить её к 0.

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\begin{aligned} \sin 5x \cdot \sin 9x &= \frac{1}{2} (\cos(5x - 9x) - \cos(5x + 9x)) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x) \end{aligned}$$

Известно, что если  $f(x) = \sin x$ ;  $\varphi(x) = \cos x$

$$\Rightarrow f'(x) = \cos x; \quad \varphi'(x) = -\sin x$$

$$f(x) \cdot \varphi(x) = f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x)f(x)$$

$$f(x) = \sin^2 7x = \sin 7x \cdot \sin 7x$$

$$f'(x) = \cos 7x \sin 7x \cdot \cos 7x \sin 7x = 2 \sin 7x \cos 7x = \sin 14x$$

$$f(x) = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \cos x + \cos x(-\sin x) = -2 \sin x \cos x = \\ &= -\sin 2x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x); \quad f'(x) = \sin 14x - \sin 4x$$

$$g'(x) = \sin 14x - \sin 4x - \sin 14x + \sin 2x$$

$$g'(x) = \sin 2x - \sin 4x$$

$$\sin 2x - \sin 4x = 0$$

$$\sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha (1 - 2 \cos 2\alpha) = 0$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

5.  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$$\frac{(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-1)}{(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-1)} \geq 0$$

$$\frac{1}{1} \geq 0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3} \geq 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} > x \\ \sqrt{x+3} \neq x+1 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$x+3 \neq x^2+2x+1$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$x_1 + x_2 = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

ОДЗ  $\begin{cases} x_1 \neq -2 \\ x_2 \neq 1 \end{cases}$

$$x+3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13 \quad \sqrt{D} = \sqrt{13}$$

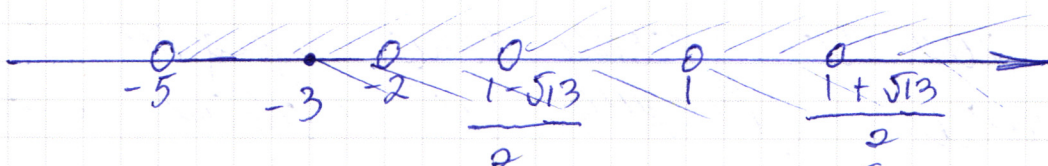
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\left(x - \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) < 0$$

ОДЗ  $\left\{ x \in \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \right\}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

М.е. векта  $ODZ$  будет иметь все



Область все  $ODZ$ :  $x \in \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\text{все } \sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$$

$$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5-1) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+4) \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+3} = x+1$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -1$$

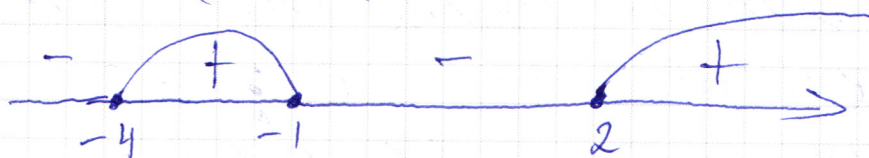
$$x_1 \cdot x_2 = -2$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$x^2 + x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2)(x+4) \geq 0$$



$$x \in [-4; -1] \cup [2; +\infty)$$

т.е. такие варианты (по кол-ву)  $(11)$   
 Также цифры "0" и "9" могут помещаться в произвольная груп от групп помещены и в любом из порядков. Т.е. наоборот размещены.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Также нужно учесть, что цифра "0" в начале числа ставить не можем и в конце во варианте, в котором это запрещено. Пусть это будет в  $N$  вариантах  
 $\Rightarrow$  кол-во 18-значных чисел, удовлетворяющих условиям будет равно:

$$11 \cdot 13 \cdot A - N$$

Ответ:  $11 \cdot 13 \cdot A - N$ .

(7.) Дано: 5 промежутков  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$

Если из этих промежутков брать какое-либо число, то получим один промежуток  $[1; 175]$ .

Т.к. разность любых двух выбранных чисел не делится на 35. Следовательно точно не мож выбрать такие пары чисел.  
 $\Rightarrow$  выполняется условие  $a - b = c \div 35$   
 ( $\div$  - делится нацело без остатка);

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

подставляя найденную ветвь в ОДЗ  
и получаем начальный ответ

$$x \in \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; -1 \right] \cup \left[ 2; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$$

Ответ:  $x \in \left( \frac{1 - \sqrt{13}}{2}; -1 \right] \cup \left[ 2; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right)$

3. Нам дано 18-значное число, которое в  
каждом месте имеет 18 цифр. Известно, что  
цифра "5" ровно имеет, и она имеет  
порядок.

5	5	5	5	5	5												
---	---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- возможное размещение  
цифры "пятирок"

Подобное размещение "пятирок" (считая  
это) составляет (13).

Получается, что в месте "пятирок" остаются  
еще 12 цифр "0" и "9", при этом что  
каждая цифра встречается ровно один  
раз, но есть не можем быть 12 девяток  
или 12 нулей.

Варианта возможного нач-ва девятки и нули

нули	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
девятки	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1



35; 70; 105; 140; 175 — это числа, которые можно разделить на 35

Сумма по величине из 1 промежутка (т.к. сумма всех промежутков) он составил

1, 2, 3, 4, 5

Из второго — 41, 42, 43, 44, 45

Из третьего — 81, 82, 83, 84, 85

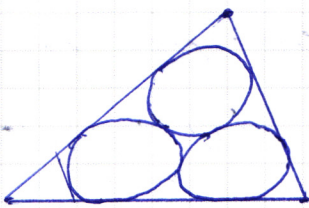
Из четвертого — 121; 122; 123; 124; 125

Из пятого — 161; 162; 163; 164; 165

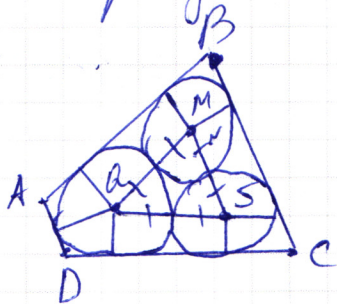
$$\Rightarrow S = 2075$$

Ответ:  $S = 2075$ .

4. Для поиска построим треугольник, внутри которого разместим три попарно касающиеся окружности, при этом каждая из них касается двух сторон



Средствами, или отсюда 1 угол у этого треугольника, и эта окружность будет соприкасаться со стороной, но начертим перпендикуляр



Средствами, или отсюда 1 угол у этого треугольника, и эта окружность будет соприкасаться со стороной, но начертим перпендикуляр

В центре ~~треугольника~~ <sup>четырехугольника</sup>  $ABED$  начертан ромб  $DM$ , образованный вершинами — центрами окружностей с равными радиусами, отмеченных в  $ABED$

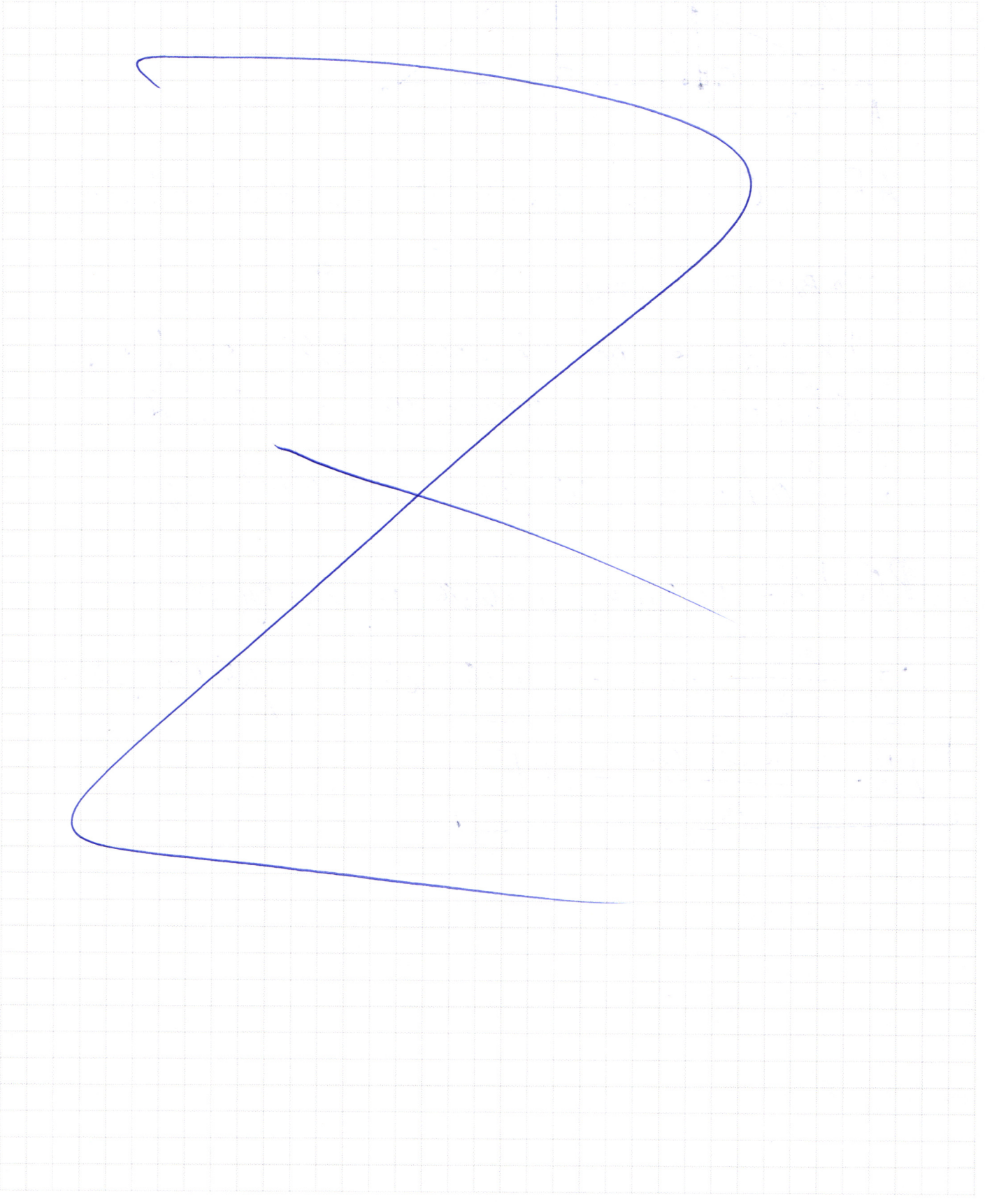


9-16

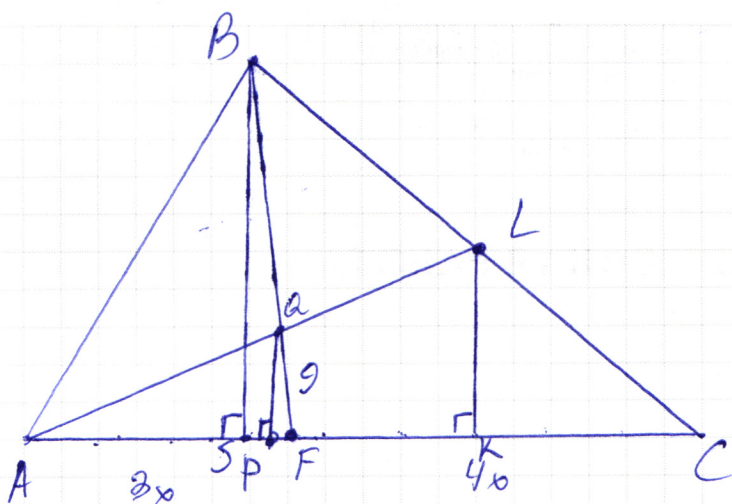
ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



6.



$$AF : FC = 3x : 4x ; \Rightarrow \angle APF : \angle CPF = 3 : 4$$

$$S_{\triangle BAC} = 16 S_{\triangle BAL} ; AF = g$$

$LK \perp AC$ ;  $LK$  - расстояние от  $L$  к  $AC$   
 $AP \perp AC$ ;  $AP$  - расстояние от  $A$  к  $AC$

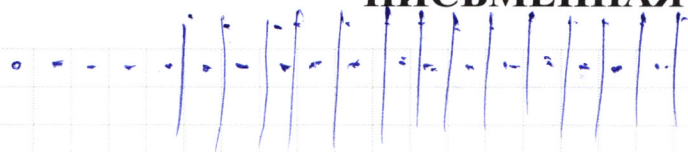
$S = \frac{1}{2} a h_a$  - площадь треугольника

$PQ$   $LK$  - прямоугольная проекция

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$  - площадь трапеции

$$LK = \frac{2 S_{\triangle PALK}}{h} - AP$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



059

в к. не м.б. 0

10" и "9" .12

1	17
2	10
3	9
4	8
5	7
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1

6-6 ко-ва

6-6 кажема  
555555

A

$$x = \sqrt{a}$$

$$R = 25a$$

$$2b^2 = 4a + 16^2 - 2 \cdot 25a - 16 \cdot (-\frac{1}{2}) \neq$$

$$4a + 16^2 + 325a - 2b^2$$

$$4a + 325a - 420 = 0 \quad | :4$$

$$a + 81a - 105 = 0$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484$$

$$\sqrt{D} = 22$$

$$t_{1,2} = \frac{-8 \pm 22}{4}$$

$$\sqrt{a} = 3,5$$

$$a = 12,25$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 375 \\ 35 \quad 525 \\ \hline 30 \quad 5625 \\ \hline \sqrt{484} \\ 22 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$\sqrt{a} = 3,5$$

$$a = 12,25$$

$$t_1 = 3,5$$

$$t_2 = -7,5 - \text{не м.б.}$$

$$(2\sqrt{a})^2 = 20^2 + 16^2 - 2 \cdot 20 \cdot 16 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$400 = 676 + 256 + 416$$

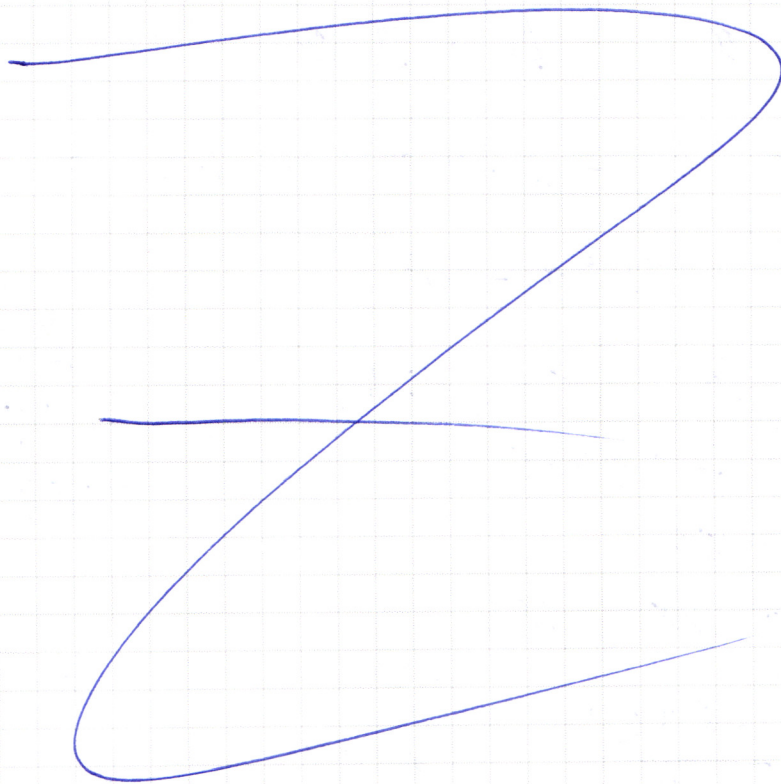
$$400 = 1348$$

$$a = 337$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x$$

произведение

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $y = x^2$       $y = 13^2$       $y = 8^2$       $y = a$   
 $y = kx$       $k = \tan \alpha$       $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

$$\sin 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \cos^2 2\alpha = 0$$

$$\sin 2\alpha (1 - 2 \cos^2 2\alpha) = 0$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{2}$$

$$2 \cos 2\alpha = 1$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$2\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k$$

2.  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) \cdot g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 5 \cos 5x \sin 9x + 9 \sin 5x \cos 9x = \sin 5x + \sin 9x$$

$$\sin 7x - \sin 7x = \cos 7x \sin 7x + \cos 7x \sin 7x = 2 \sin 7x \cos 7x = \sin 14x$$

$$\cos x - \cos x = \cos x \sin x + \cos x \sin x = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

$$\sin 5x + \sin 9x - \sin 14x - \sin 2x = 0$$

$$(\sin 5x - \sin 2x) + (\sin 9x - \sin 14x) =$$

$$= \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x$$

$$\sin 14x$$

$$- \sin 4x - \sin 4x$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

5.  $\sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$

$$\begin{cases} (\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5 - 1) \geq 0 \\ (\sqrt{x+3} - x - 1)(x+4) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} \geq 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - x - 1 &= 0 & x+3 &\geq 0 \\ \sqrt{x+3} &= x+1 & x &\geq -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+3 &= x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 \cdot x_2 &= -2 \\ x_1 &= -1 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

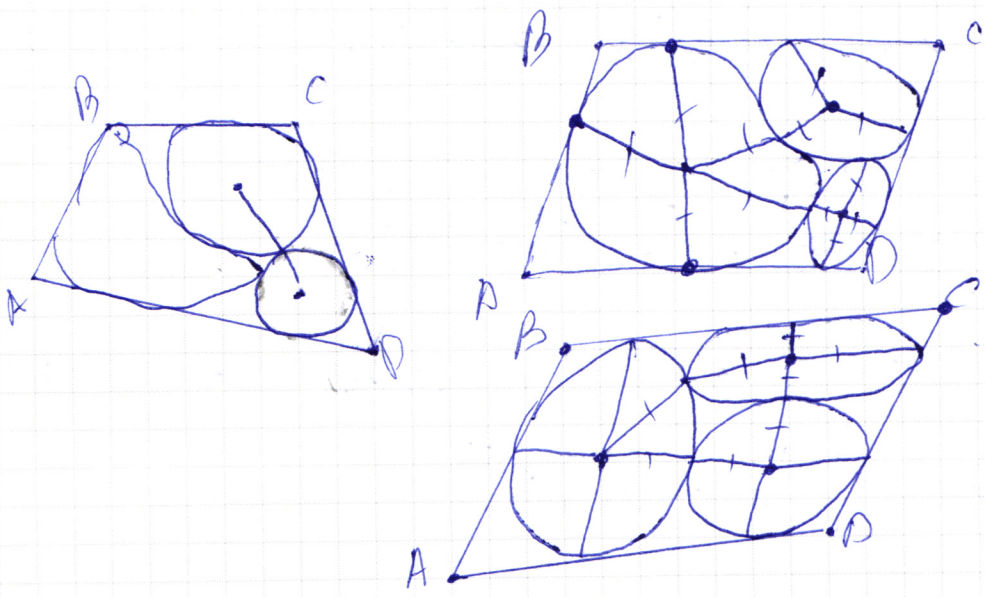
$$(x+1)(x-2)(x+4) \geq 0$$

3.  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15!} = 816$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 48 \\ \hline 136 \\ 68 \\ \hline 816 \end{array}$$

$$A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$$

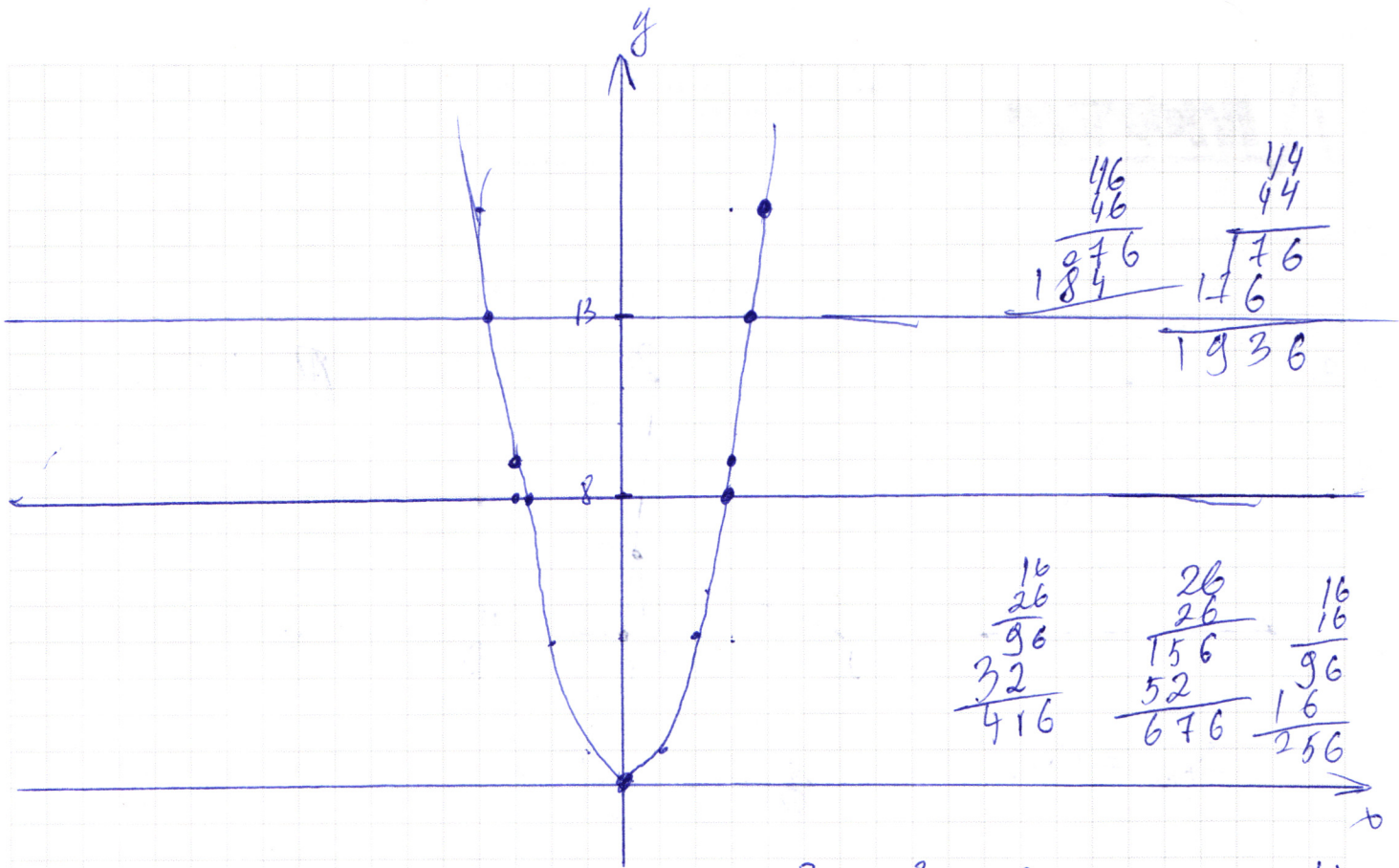
4.



$$AD + BC - AB - CD = 0$$







$$y = x^2 = 169$$

$$x = \pm 13$$

$$y = x^2 = 64$$

$$x = \pm 8$$

$$d_1 = 26$$

$$d_2 = 16$$

$$a^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 676 + 256 + 416 = 1348$$

-10

42

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ 38 \\ \hline 76 \\ 304 \\ \hline 114 \\ 36 \\ 36 \\ \hline 72 \\ 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 420 \\ 4 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$26^2 = a^2 + 16^2 - 2 \cdot a \cdot 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 + 16a + 16^2 - 26^2 = 0$$

$$a^2 + 16a + (16-26)(16+26) = 0$$

$$a^2 + 16a - 420 = 0$$

$$D = 256 + 1680 = 1936 \quad \sqrt{D} = 44$$

$$a_{1,2} = \frac{16 \pm 44}{2}$$

$$a = 14$$

~~30~~ - не м.с.