

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

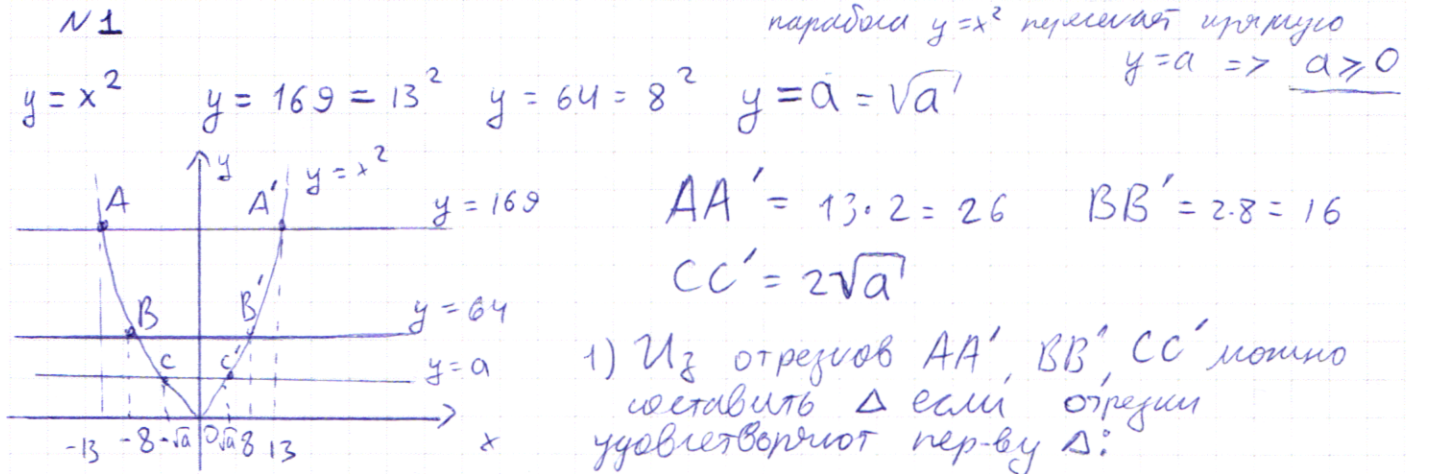
8-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} 21 > \sqrt{a} \\ \sqrt{a} > -5 \\ \sqrt{a} > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AA' + BB' > CC' \\ AA' + CC' > BB' \\ BB' + CC' > AA' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 + 16 > 2\sqrt{a} \\ 26 + 2\sqrt{a} > 16 \\ 16 + 2\sqrt{a} > 26 \end{cases}$$

с учётом  $a \geq 0$  Получаем:  $5 < \sqrt{a} < 21 \Rightarrow 25 < a < 441$

Напротив большего угла в  $\Delta$  лежит большая сторона;  
Заметим, что против угла  $120^\circ$  могут лежать только отрезки  $AA'$  или  $CC'$

2) По теореме косинусов:

$$\begin{cases} AA'^2 = CC'^2 + BB'^2 - 2CC' \cdot BB' \cdot \cos 120^\circ \\ CC'^2 = AA'^2 + BB'^2 - 2BB' \cdot AA' \cdot \cos 120^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26^2 = 4a + 16^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot (-0,5) \\ 4a = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot (-0,5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 420 = 4a + 32\sqrt{a} \\ 4a = 1342 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 8\sqrt{a} - 105 = 0 \\ a = 335,5 \end{cases} \begin{matrix} \text{замена:} \\ \sqrt{a} = t \quad t \geq 0 \\ a = t^2 \end{matrix}$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

Обратный дискриминант:  
 $\sqrt{a} = 7$

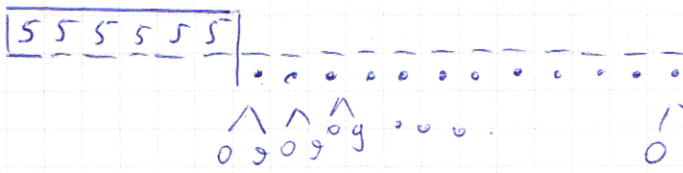
$$D = 64 + 4 \cdot 105 = 484 = (22)^2$$

$$a = 49$$

$$t_1 = \frac{-8 + 22}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{-8 - 22}{2} = -15 \text{ не подходит т.к. } t \geq 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} a = 49 ; \\ a = 335,5 ; \end{array} \right.$ 
 $a = 49$  и  $a = 335,5$  удовлетворяют условиям.  
 $25 < a < 441$ ; Ответ:  $a = 49$ ;  $a = 335,5$   
**N3**



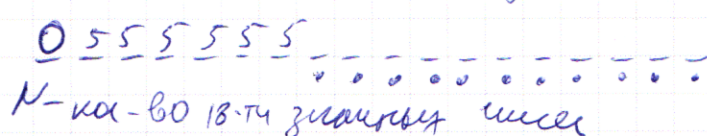
Расположим в ряд 18 ячеек. рассмотрим такое составные шестерки,

в котором ровно 6 пятёрок идут подряд.

Планих систем всего 13 (минимально мы видим 1-ю систему, каждое помещующее получает сдвиги по всей пятёрке) равно т.е.  $1 + (18 - 6) = 1 + 12 = 13$

В каждой такой системе найдем кол-во способов заполнить оставшиеся ячейки. Их можно заполнить только цифрами "0" и "9". В каждой из 12 свободных можно выбрать 0 или 9 и всего получаем:  $2^{12}$  способов. Для всех составных тогда  $13 \cdot 2^{12}$ .

Заметим, что мы использовали такие числа, начинающиеся на 0, этого делать нельзя, поэтому отнимем от получившегося числа кол-во комбинаций с 0 на 1-ом месте:



систем:  $12 \cdot (18 - 6 - 1) + 1 = 12$   
 вариантов заполнить ячейки  $2^{11}$  (11 свободных и в них выбор между двумя).

$$N = 13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} = 2^{11} (13 \cdot 2 - 12) = 4 \cdot 2^{12}$$

Ответ:  $4 \cdot 2^{12}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

$$\sqrt{x+3}-x \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x - \sqrt{x+3} + 5 \geq 0$$

$$2x - \sqrt{x+3} + 5 = 0$$

$$2x + 5 = \sqrt{x+3}$$

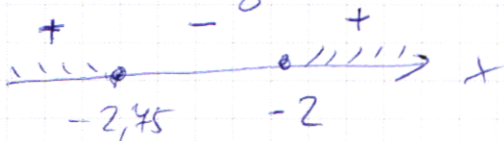
$$4x^2 + 25 + 20x = x + 3$$

$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19 + 3}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19 - 3}{8} = -2,45$$



С учётом ОДЗ:  $x \in (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

Ответ:  $x \in (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

№7

Число делится на 35, если оно делится на 4 и на 5.

Число делится на 5, если оно заканчивается на 5 или 0.

Чтобы это было возможно, все числа должны иметь равный остаток от деления на 35.

ОДЗ:

$$x+5 > 0$$

$$\sqrt{x+3}-x > 0$$

$$\sqrt{x+3}-x \neq 1$$

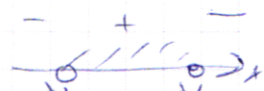
$$x+3 \geq 0$$

$$\sqrt{x+3}-x = 0$$

$$x+3 = x^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$



$$\sqrt{x+3}-x = 1$$

$$x+3 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_3 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1$$

$$x_4 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

ОДЗ:  $x \in (1 - \frac{\sqrt{13}}{2}; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2})$

Вернём к самому большому промежутку шара

141, 142, 143, 145, 146

N 2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3 \quad g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \frac{1 - \cos 14x}{2} - \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3$$

$$\sin^2 4x = \frac{1 - \cos 14x}{2}$$

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x + \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$g'(x) = 5 \cos 5x \cdot \sin 9x + 9 \cos 9x \cdot \sin 5x - 7 \sin 14x + \sin 2x$$

$$g'(x) = 5 \sin(14x) + 4 \cos 9x \cdot \sin 5x - 7 \sin 14x + \sin 2x$$

$$g''(x) = 4 \cos 9x \cdot \sin 5x - 2 \sin 14x + \sin 2x \quad g'(x) = 0$$

$$4 \cos 9x \cdot \sin 5x - 2 \sin 14x + \sin 2x = 0 \quad | : 2$$

$$2 \cos 9x \cdot \sin 5x - \sin 14x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \cos 9x \cdot \sin 5x - \cos 9x \cdot \sin 5x - \sin 9x \cdot \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 9x \cdot \sin 5x - \sin 9x \cdot \cos 5x + \frac{1}{2} \sin 2x = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\sin 9x \cdot \cos 5x - \sin 5x \cdot \cos 9x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\sin(9x - 5x) - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (2 \cos 2x - \frac{1}{2}) = 0$$

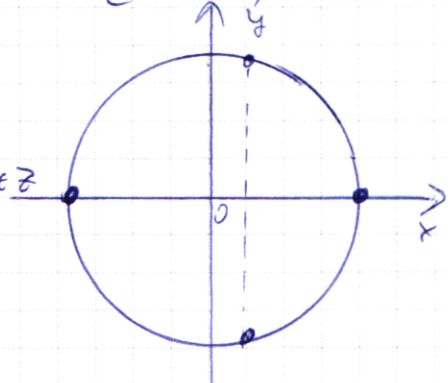
$$\sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2 \cos 2x - \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

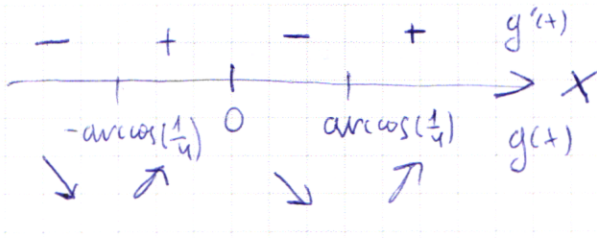
$$2 \sin 2x \cdot \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = 0$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm \arccos(\frac{1}{4}) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos(\frac{1}{4}) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

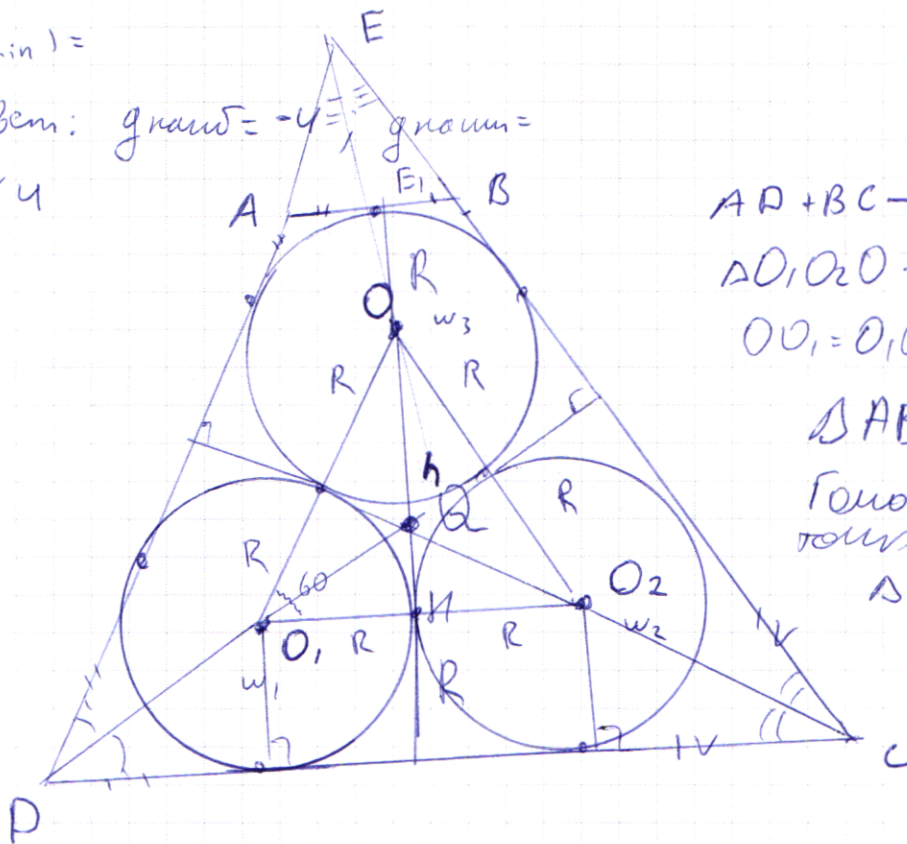


Рассмотрим промежутки, изображённые слева.  
 $x_{\max} = 0$   
 $x_{\min} = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$   
 $x_{\min} = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}$

$$g(0) = \sin 0 \cdot \sin 0 - \sin^2 0 - \cos^2 0 - 3 = -4$$

$$g(x_{\min}) =$$

Ответ:  $g_{\max} = -4$ ,  $g_{\min} =$   
 $\sqrt{4}$



$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$\triangle O_1 O_2 O_3$  - равносторонний

$$OO_1 = O_1 O_2 = O_2 O_3 = 2R$$

$$\triangle ABE \sim \triangle DEC$$

Гомология относительно точки  $O_1$

$$\triangle O_1 O_2 O_3$$

$$\triangle PEC$$

$OH$  - высота  $\triangle O_1 O_2 O_3$ ,  $OH = 2R \cdot \sin 60 = R\sqrt{3}$

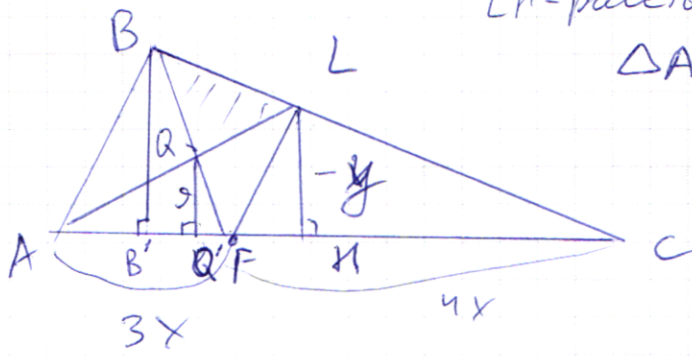
$x = EF_1$  - высота  $\triangle AEB$

$$\frac{x}{x + 2R + R\sqrt{3}} = \frac{AB}{DC}$$

$$OO_1 = R \cdot DC$$

б)  $\angle AOB = \alpha$      $AO \cdot BO = 42$     но теореме косинусов  
 $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos \alpha$

№ 6



LH - расстояние от L до AC

$$\triangle AQQ' \sim \triangle ALH$$

$$\frac{g}{AQ'} = \frac{LH}{AH}$$

$$AQ' = AF - QF$$

$$S_{\triangle ABC} = BB' \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{\triangle BQL} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle FLC} - S_{\triangle FQL}$$

$$\triangle QQ'F \sim \triangle BFB'$$

$$\frac{g}{Q'F} = \frac{BB'}{FB'}$$

$$-\frac{15}{16} S_{\triangle ABC} = -S_{\triangle ABF} - S_{\triangle FLC} - S_{\triangle FQL}$$

$$\frac{15}{16} \cdot BB' \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BB' - \cancel{y} \cdot FC \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{16} BB' \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$BB' \cdot AC = AF \cdot BB' - \cancel{y} \cdot FC$$

$$\frac{y \cdot FB'}{Q'F} = \cancel{3x} \cdot BB'$$

$$AQ' - AF = -\frac{FC}{BB'} \cdot y$$

$$\frac{4x \cdot BB'}{FC} = y =$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x)$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x$$

||

$$\frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x)$$

$$- 2 \sin 4x$$

$$\sin 14x \cos 9x$$

$$- 2 \cos 5x \sin 9x$$

$$\sin 5x =$$

$$\sin 9x = \sin(5x + 4x) = \sin 5x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x$$

$$\sin 5x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 5x$$

$$4 \cos 9x \cdot \sin 5x = 4 \sin 4x - 4 \sin 14x \cdot \cos 5x$$

5200

$$2 \sin 4x - 4 \sin 9x \cdot \cos 5x + \sin 14x = 0$$

$$\sin 5x \cdot \cos 9x = \frac{1}{2} (\sin 14x - \cos 2x)$$

$$0,0001 = \frac{1}{2} \approx 0,$$

12

~~12~~

$$4 \cos 9x \cdot \sin 5x - 2 \sin 4x + \sin 14x = 0$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$4 \cos 9x \cdot \sin 5x - 4 \sin 4x \cdot \cos 5x$$

$$- 2 \sin 4x \cdot \cos 9x$$

$$2 \cos 5x + 2 \cos 9x = 2 \sin 4x$$

$$\sin 4x$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log \sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$$

$$\log_a b \quad \text{DPS}$$

$$b > 0$$

$$a > 0 \quad a \neq 1$$

$$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5) \geq 1$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ$$

$$[1; 35]$$

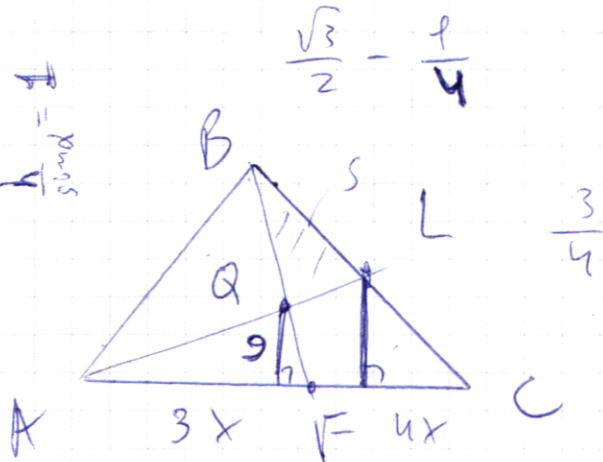
$$[36; 70]$$

$$[71; 105]$$

$$[106; 140]$$

$$[141; 175]$$

$$\cos 21^\circ = \frac{1}{4}$$



$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16}$$

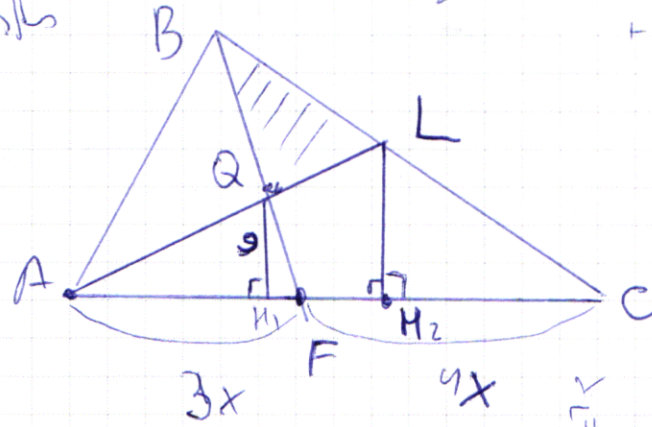
$$\frac{1}{5} \frac{LH}{AF+FH_2} = \frac{9}{AH_1}$$

$$\sin 54^\circ \cdot \sin 91^\circ + \frac{1}{2} \cdot \cos 14^\circ - \frac{1}{2} \cdot \cos 14^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{91+54}{2} \cdot \cos \frac{91-54}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{16}{10}$$

$$\frac{h}{4x} = \frac{9}{5}$$



$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x + 5 = x^2$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{13}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$(1-0,25) = 8 + 16$$

$$3 + 16 = 2$$

$$24 - 2 = 22$$

$$\frac{11}{30} \cdot \frac{4}{2,45}$$

$$\frac{-8}{-28} = \frac{20}{20}$$

$$72 - 22 = -14$$

$$B = -1$$

$$1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{-16}$$

$$= a \log_a b = B$$

$$\log_{1+3} (1+16)$$

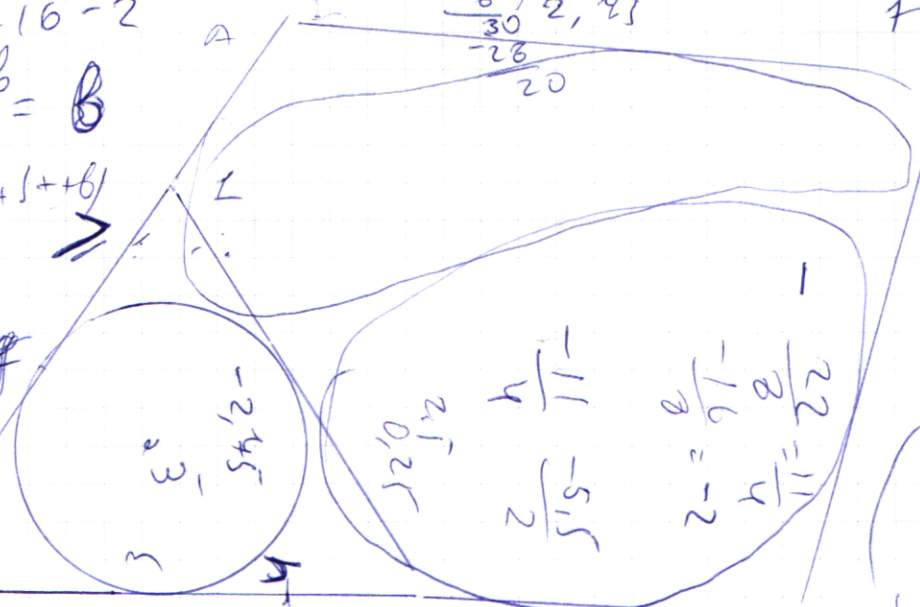
$$\sqrt{x+3} - x$$

$$(x+5) \rightarrow \log$$

$$\sqrt{x+3} - x$$

$$\frac{1-y}{2}$$

D



$$L > T$$

$$19^2 - 16 \cdot 22$$

$$22 \cdot 91 - 22$$

$$\log$$

$$\frac{1+y}{2} = \frac{1+y}{2}$$

$$\frac{1+y}{2} = \frac{1+y}{2}$$

$$\frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{32}$$

$$\frac{1}{32}$$

$$AD + BC$$

$$-AB - CD = 0$$

$$\frac{1-y}{2}$$

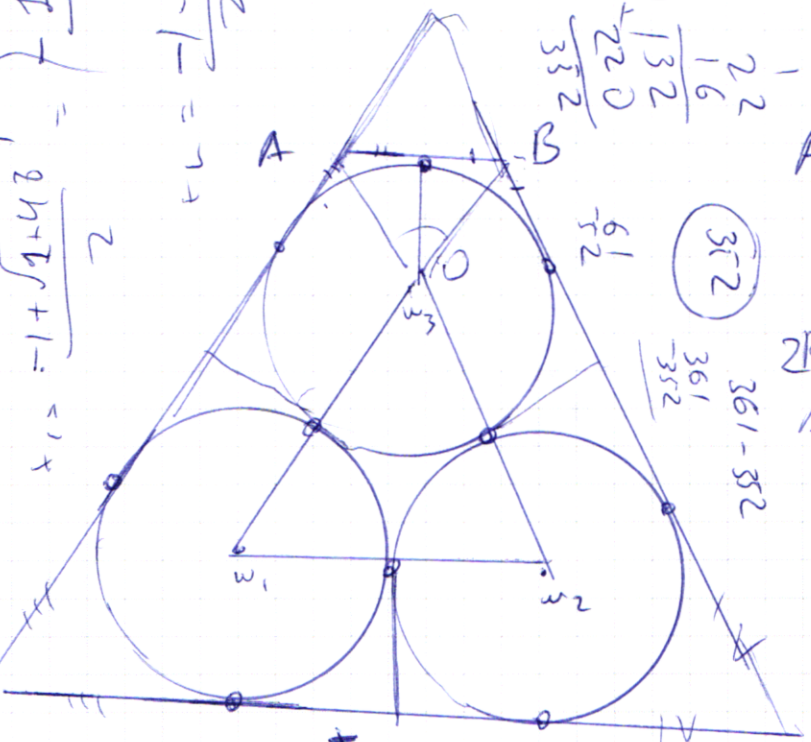
$$1 + 3 = (1 + 1)^2$$

$$x + 13 = x^2 + 1 + 2x$$

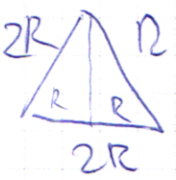
$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$$

D



$$352$$



$$h^2 + R^2 = 4R^2$$

$$R^2 = 3R^2$$

$$C. h = R\sqrt{3}$$

$$19^2 - 16 \cdot 22$$

$$22 \cdot 91 - 22$$

$$1 + 6$$

$$8 + 1 + 13$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

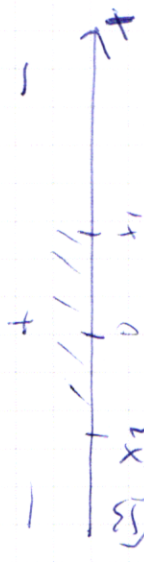
$$x + 3 = x^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$$



$$S = (R\sqrt{3} + 2R) \cdot (AB + DC)$$

$$\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$6 > 1 + \sqrt{13}$$

$$36 > 1 + 13$$

$$+ 2\sqrt{13}$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$y = x^2$

$\cos 4x = \frac{1}{2}$

$y = 169$      $y = 64$      $y = 4$

$13 \cdot 4 = 52$      $11 \cdot 4 = 44$

$26(16+26) + 16^2$   
 $26 \cdot 42 + 16^2$   
 $13^2 = 130 + 39 = 169$

$a < 169 + 64$   
 $169 < a + 64$   
 $64 < a + 169$

Нам нужны большие стороны  
больше угла

$26^2 + 16^2 - 30$   
 $+ 16 \cdot 26$

$(26-16)(26+16)$   
 $10 \cdot (42)$   
 $420$   
 $1092$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 4x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin(4x + 2x) - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 4x \cdot \cos 2x + \sin 2x \cdot \cos 4x - \sin^2 4x - \cos^2 x - 3$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 4x = \frac{1 - \cos 8x}{2}$

$g'(x) =$

$\cos(120) = \frac{1}{2}$   
 $\cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$335,5$

$1092$   
 $250$   
 $1342$

$21 > \sqrt{a}$   
 $2\sqrt{a} > 10$   
 $210 \neq 24, 6 + 10 > 16$   
 $10 > -2\sqrt{a}$   
 $-5 < \sqrt{a}$

$641$

~ 2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin 7x \cdot \sin 7x - \cos 1 - \cos x - 3$$

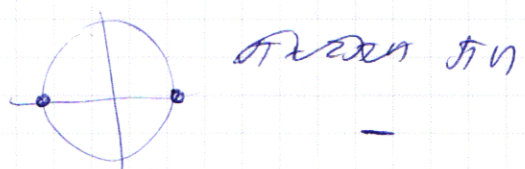
$$g'(x) = \cos 5x \cdot 5 \cdot \sin 9x + 9 \cos 9x \cdot \sin 5x - 2 \sin 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 - 2 \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$g'(x) = 5 \sin 9x \cdot \cos 5x + 9 \sin 5x \cdot \cos 9x - 7 \sin 14x + \sin 2x = 0$$

$$g'(x) = 5 \sin(14x) + 4 \sin 5x \cdot \cos 9x - 7 \sin(14x) + \sin 2x = 0$$

$$g'(x) = -2 \sin(14x) + 4 \sin 5x \cdot \cos 9x + \sin 2x = 0$$

$\sin 2x = 0$



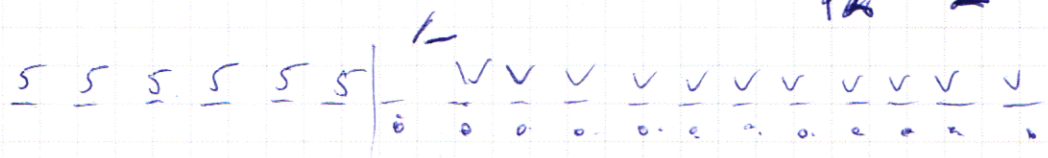
cos 2x = 1/4

$$g'(x) = 4 \sin(14x) - 4 \sin 9x \cdot \cos 5x + \sin 2x = 0$$

$$g'(x) = 2 \sin(14x) - 4 \sin 9x \cdot \cos 5x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\sin(14x) - 2 \sin 9x \cdot \cos 5x + \sin x \cdot \cos x = 0$$

~~2~~  $2^{12} + 12 \cdot 2^{11}$



$2^{11}(12+2) = 2^{11} \cdot 14$

0 0 5 5 9

шесть

12

$2^{12} \cdot 12 - 11 \cdot 2^{11}$

$26 \cdot 2^{12.4}$

$\frac{26}{12} \cdot 2^{12.4}$

$\frac{14}{14}$

$$2^{11}(2 \cdot 12 - 11) = 2^{11}(24 - 11) = 2^{11} \cdot 13$$

sin 5x = sin(14x) + cos 9x