МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 11-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

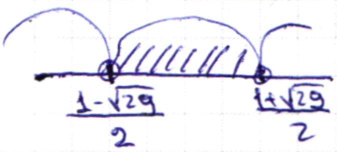
$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

1) $\begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 \\ x+4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ x+4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases}$

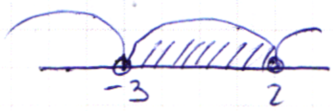
1 1.1) $\sqrt{x+7}-x > 0$

$x^2 - x - 7 < 0$

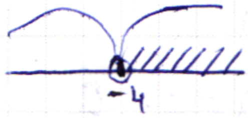


1.6) $\sqrt{x+7}-x < 1$

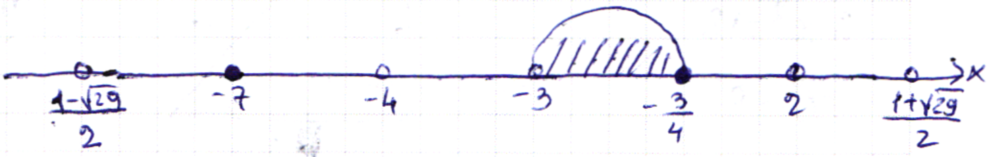
$x^2 + x - 6 < 0$



1.2)



1.3)



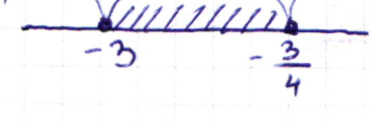
$x \in \left(-3; -\frac{3}{4}\right]$

1.4) $x^2 + x - 6 \neq 0$

$x \neq 2;\ x \neq -3;$

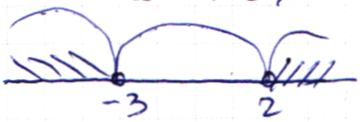
1.5) $2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

$4x^2 + 15x + 9 \leq 0$

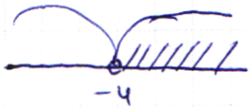


(2) 2.1) $\sqrt{x+7}-x>1$

$x^2+x-6>0$

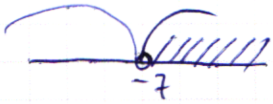


2.2)



$x\in(-4\ -3)\cup(2;+\infty)$

2.3)



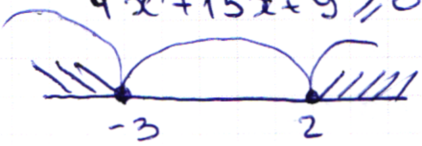
(3) $\left[\begin{array}{l} x\in\left(-3;-\frac{3}{4}\right] \\ x\in(-4;-3)\cup(2;+\infty) \end{array}\right.$

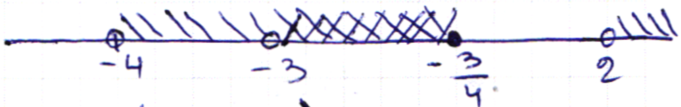
2.4) $x^2+x-6\neq0$

$x\neq2;\ x\neq-3$

2.5) $x+4\geqslant\sqrt{x+7}-x$

$4x^2+15x+9\geqslant0$





$x\in(-4;-3)\cup\left(-3;-\frac{3}{4}\right]\cup(2;+\infty)$

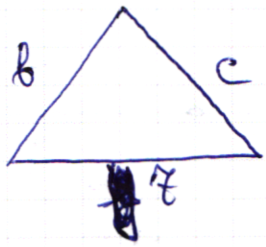
Ответ: $(-4;-3)\cup\left(-3;-\frac{3}{4}\right]\cup(2;+\infty)$.

№2

$2x^2=18$

$x^2=9$

$x=\pm3$



$a=2x^2$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$7=\sqrt{2a}$

$b=3-(-3)=6$

$2x^2=98$

$x^2=49$

$x=\pm7$

$c=7-(-7)=14$

$\begin{cases} 7<14+6 \\ 7+6>14 \\ 7+14>6 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \sqrt{2a}<20 \\ \sqrt{2a}>8 \\ \sqrt{2a}>-8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a<200 \\ a>32 \\ a>32 \end{cases}\quad a\in(32;200)$

1) $\sqrt{2a}=14^2+6^2-2\cdot14\cdot6\cdot\frac{1}{2}$

$a=74$ ✓

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-008

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $14^2 = 2a + 6^2 - \cancel{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{2a} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$2a - 6\sqrt{2a} - 160 = 0 \quad t = \sqrt{2a}$

$t^2 - 6t - 160 = 0$

$D = 36 + 640 = 676 = 26^2$

$t_1 = \frac{6+26}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$t_2 =$ п.к

$\sqrt{2a} = 16$

$2a = 256$

$a = 128$ ✓

3) $6^2 = 2a + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot \sqrt{2a} \cdot \frac{1}{2}$

$2a - 14\sqrt{2a} + 160 = 0$

$\sqrt{2a} = t$

$t^2 - 14t + 160 = 0$

$D < 0$ Нет корней

Ответ: при $a = 74$ и $a = 128$

№2

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 0.$

$(\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4)' = (\sin 3x \cdot \sin 7x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)'$

$(\sin 3x \cdot \sin 7x)' = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x$

$(\sin^2 x)' = 2\sin x \cos x = \sin 2x$

$(\cos^2 5x)' = -10\sin 10x$

$3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x + \sin 2x - 10\sin 10x = 0$

$3\cos 3x \sin 7x = \frac{3}{2}(\sin 10x + \sin 4x)$

$7\cos 7x \sin 3x = \frac{7}{2}(\sin 10x - \sin 4x)$

$\frac{3}{2}(\sin 10x + \sin 4x) + \frac{7}{2}(\sin 10x - \sin 4x) + \sin 2x - 10\sin 10x = 0$

$\frac{3\sin 10x + 3\sin 4x + 7\sin 10x - 7\sin 4x}{2} + \sin 2x - 10\sin 10x = 0$

$\frac{10\sin 10x - 4\sin 4x}{2} + \sin 2x - 10\sin 10x = 0$

$5\sin 10x - 2\sin 4x + \sin 2x - 10\sin 10x = 0$

$\sin 2x - 2\sin 4x - 5\sin 10x = 0$

$\sin 2x - 2\sin 4x = 5\sin 10x$

$\sin 2x - 2\sin 4x = 0 \qquad 5\sin 10x = 0$

$\sin 2x - 4\sin 2x\cos 2x = 0$

$\sin 2x(1 - 4\cos 2x) = 0$

$\sin 2x = 0 \qquad 1 - 4\cos 2x = 0$

$2x = \pi k \qquad \cos 2x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{\pi k}{2};$

$2x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$

$x = \pm \frac{\arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi k$

$g(0) = \sin 0 \cdot \sin 0 - \sin^2 0 + \cos^2 0 + 4 = 1 + 4 = 5$

$g(0) = 5$

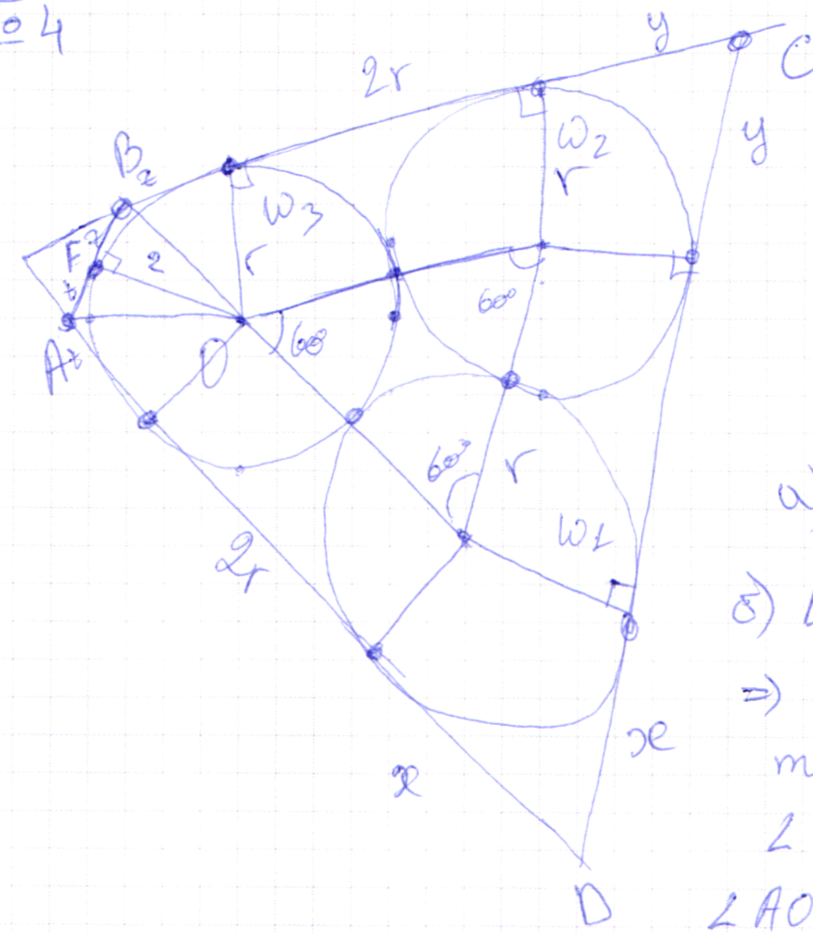
$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 1 + 0 + 4 = 2$

$g_{max} = 5$

$g_{min} = 2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $AD+BC-AB-CD=12$

$\cancel{z}+\cancel{x}+2r+\cancel{y}+\cancel{t}+2r-\cancel{z}-\cancel{t}-$
$-\cancel{x}-\cancel{y}+2r=12$

$6r=12$

$r=2$

а) $r=2$

б) ΔAOB равнобедренный $\Rightarrow AF=BF=2 \Rightarrow \Delta FBO$ тоже равнобедренный

$\angle FOB=45°$

$\angle AOB=2\cdot\angle FOB=2\cdot 45°=90°$

$\angle AOB=90°$

в) Так как $AB=AF+BF$ и $AF=BF=2 \Rightarrow AB=2\cdot 2=4$

$AB=4$

Ответ: а) $r=2$; б) $\angle AOB=90°$ с) $AB=4$