МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 6-005

Заполняется ответственным секретарем

√ 1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

√ 3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

√ 5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

√ 7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Дано: Парабола $y=2x^2$ перес. прямые $y=36$; $y=18$ и $y=a$, отсекая на них отрезки. (пусть эти отрезки – m, n и k соотв.)

Найти: a – ? (m, n и k – стор. треуг. с $\angle=120°$)

Решение:

$y=2x^2$

$y=98$ (пусть m); $y=18$ (пусть n); $y=a$ (пусть k).

1) $2x^2=98 \Leftrightarrow x^2=49 \Rightarrow x_1=7;\ x_2=-7$.

Тогда $m=7-(-7)=14$

2) $2x^2=18 \Leftrightarrow x^2=9 \Rightarrow x_1=3,\ x_2=-3$

Тогда $n=3-(-3)=6$

3) $2x^2=a \Leftrightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow x_1=\sqrt{\frac{a}{2}};\ x_2=-\sqrt{\frac{a}{2}}$

Тогда $k=\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$.

4) Пусть $\angle\alpha=120°$, а $\angle\beta$ и $\angle\gamma$ – другие углы треугольника. Тогда $\angle\beta+\angle\gamma=60° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle\beta<60°;\ \angle\gamma<60° \Rightarrow \angle\alpha$ – наибольший.

5) n не может быть наиб. стороной треугольника, ибо $n<m$.

6) т.к. напр. наибольшего угла треуг. лежит наибольшая сторона, по т. косинусов:

$$\left[\begin{aligned} m^2&=n^2+k^2-2nk\cdot\cos 120° \\ k^2&=m^2+n^2-2mn\cdot\cos 120° \end{aligned}\right.$$

а) $196=36+k^2+2\cdot 6\cdot k\cdot\frac{1}{2}$

$k^2+6k-160=0$

$k_1=-16$ н.н.

$k_2=10 \Leftrightarrow \sqrt{2a}=10 \Leftrightarrow a=50$.

б) $k^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos 120°$

$k^2=196+36+49\cdot 6=232+294=526$

$2a=526$

$a=263$.

Ответ: $a_1=50$. $a_2=263$.

№3.

Дано: N семнадцатизначных чисел, сод. только цифры 0, 7 и 8. Цифр 8 ровно семь, и они идут подряд. Каждая цифра встр. хотя бы один раз.

Найти: N – ?

Решение:

$N = B + 10 \cdot A$, где A – кол-во вариантов расстановок 0 и 7 так, что на первом месте всегда 7, а B – кол-во вар. расст. 0 и 7 в любом порядке.

$A = \prod\limits_{m=1}^{8} \frac{9!}{m!(9-m)!} = \frac{(9!)^8}{(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 8!)^2} = \frac{6\cdot 7^2\cdot 8^3\cdot 9^4}{2^3\cdot 3^2\cdot 4} = 2^5\cdot 3^7\cdot 7^2$

$B = \prod\limits_{n=1}^{9} \frac{10!}{n!(10-n)!} = \frac{(10!)^9}{(1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 8!\cdot 9!)^2} = \frac{6\cdot 7^3\cdot 8^5\cdot 9^7\cdot 10^9}{2^7\cdot 3^5\cdot 4^3\cdot 5} = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^8\cdot 7^3$

$N = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^8\cdot 7^3 + 2^5\cdot 3^7\cdot 7^2\cdot 10 = 2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^8\cdot 7^3 + 2^6\cdot 3^7\cdot 5\cdot 7^2 = 2^6\cdot 3^7\cdot 5\cdot 7^2\cdot(2^6\cdot 3^3\cdot 5^7\cdot 7 +$
$+ 1)$

Ответ: $2^{12}\cdot 3^{10}\cdot 5^8\cdot 7^3 + 2^6\cdot 3^7\cdot 5\cdot 7^2 = 2^6\cdot 3^7\cdot 5\cdot 7^2\cdot(2^6\cdot 3^3\cdot 5^7\cdot 7+1)$

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+4-\sqrt{x+7}+x)(\sqrt{x+7}-x-1) \geq 0$

$(2x+4-\sqrt{x+7})(\sqrt{x+7}-x-1) \geq 0.$

$\sqrt{x+7} = t \geq 0$

$(2t^2-10-t)(t-t^2+6) \geq 0$

$(2t^2-t-10)(t^2-t-6) \leq 0.$

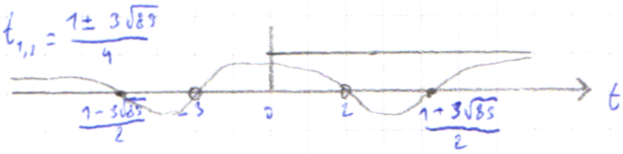
а) $2t^2-t-10=0$

$D = 1+800 = 801 = 3\cdot 83$

$t_{1,2} = \frac{1\pm 3\sqrt{89}}{4}$

б) $t^2-t-6=0$

$t_1 = 2;\ t_2 = -3$



$t \in \left(2; \frac{1+3\sqrt{85}}{4}\right]$

ОДЗ: 1) $(x+4) > 0 \Leftrightarrow x > -4$

2) $\sqrt{x+7}-x \neq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} \neq x+1$

$\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6 \neq 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x < -1 \\ \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 2 \end{cases} \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; +2) \cup (2; +\infty)$

3) $\sqrt{x+7}-x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

а) $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases}$

$x^2-x-7 < 0$

$D = 1+28 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$x \in \left[0, \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

б) $x < 0$

$x+7 \geq 0$

$x \geq -7$

$x \in (-4, 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} > 2 \\ \sqrt{x+7} \leq \frac{1+3\sqrt{83}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 > 4 \\ x+7 \leq \frac{1+801+6\sqrt{83}}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x \leq \frac{401-3\sqrt{83}-56}{8} = \frac{345-3\sqrt{83}}{8} \end{cases}$$

Вместе с ОДЗ:

$x \in (-3; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

Ответ: $x \in (-3; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

№7.

Заметим, что диапазон каждого промежутка равен 45. Тогда, назвав числа ~~прос~~ разных промежутков как a_i и b_j будем справедливо:

$a_i - b_j \vdots 45$ только при $i = j$

Тогда для достижения наим. суммы следует взять 1-6 ~~числ~~ числа последнего промежутка, 7-12 числа предпосл. промежутка и т.д.

Тогда сумма S равна:

$S = 180 \cdot 6 + 141 \cdot 6 + 102 \cdot 6 + 63 \cdot 6 + 24 \cdot 6 + (1+2+3+4+5+6) \cdot 6 =$

$= 6 \cdot (180 + 141 + 102 + 63 + 24 + 21) = 6 \cdot 531 = 3186$

Ответ: 3186

№2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x - \sin^2 5x + 5$

Заметим, что период функции равен 2π.

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x - 2\sin x \cos x - 2\sin 5x \cdot 5\cos 5x =$

$= (3\cos 3x \cdot \sin 7x + 3\cos 7x \cdot \sin 3x) + 4\cos 7x \cdot \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= 3\sin 10x - 5\sin 10x - \sin 2x + 2(\sin 10x + \sin 4x) =$

$= 2\sin 4x - \sin 2x = 4\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = \sin 2x(4\cos 2x - 1)$

$g'(x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}n \\ 2\cos^2 x - 1 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}n \\ \cos^2 x = \frac{5}{8} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2}n \\ x = \frac{\pm \arccos \frac{1}{4}}{2} + \pi k \end{array}\right.$ $n, k \in \mathbb{Z}$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1\cdot(-1) - 1 + 0 + 4 = 4$

$\rightarrow g(\pi) = 0 - 0 + 1 + 4 = 5.$ V

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1\cdot 1 - 1 + 0 + 4 = 4$

$\rightarrow g(0) = 0 - 0 + 1 + 4 = 5.$ V

Если взять все тригон. функции по максимуму, то:

$g(b) = 1\cdot 1 - 1 + 1 + 4 = 5.$ Из этого делаем вывод, что $g_{max}(x) = 5$.

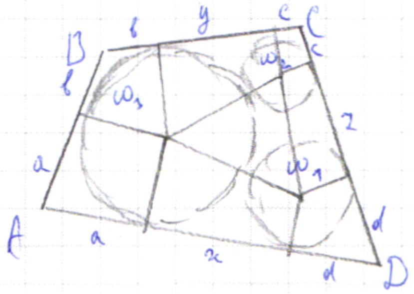
Ответ: Максимум функции равен 5.

~~№4~~

~~Дано: ABCD - четырехугольник.~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $ABCD$ – четырехугольник

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – попарно кас. окр.

ω_1 кас. AD, CD; ω_2 кас. DC и CB

ω_3 кас. CB, BA и AD.

$AD + BC - AB - CD = 12$.

O – центр ω_3

$AO \cdot BO = 58$.

Найти: R_1, R_2, R_3 – ? (радиусы окр.)

$\angle ADB$ – ?

AB – ?

Решение:

а) $AD + BC - AB - CD = 12$

На чертеже:

$AD = a + x + d$; $AB = a + b$; $BC = b + y + c$; $CD = c + z + d$

Тогда $AD + BC - AB - CD = x + y - z = 12$.

$(R_3 + R_2)^2 = y^2 + (R_3 - R_2)^2$

$R_3^2 + R_2^2 + 2R_3R_2 = y^2 + R_3^2 + R_2^2 - 2R_3R_2$

$y = 2\sqrt{R_3R_2}$

Аналогично:

$x = 2\sqrt{R_3R_1}$

$z = 2\sqrt{R_1R_2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{5}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)-\log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)\geq 0$

$(x+4-\sqrt{x+7}+x)\cdot(\sqrt{x+7}-x-1)\geq 0.$

$(2x+4-\sqrt{x+7})\cdot(\sqrt{x+7}-x-1)\geq 0.$

$\begin{cases}\sqrt{x+7}=t\geq 0\\ x+7=t^2\\ x+1=t^2-6\\ 2x+4=2\cdot(t^2-5)\end{cases}$

$(2t^2-10-t)(t-t^2+6)\geq 0$

$(2t^2-t-10)(t^2-t-6)\leq 0$

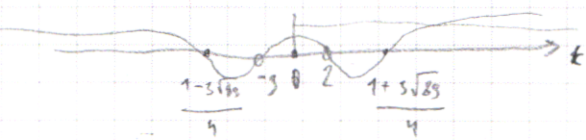
а) $2t^2-t-10=0$

$D=1+800=801=9\cdot 89$

$t_{1,2}=\frac{1\pm 3\sqrt{89}}{4}$

б) $t^2-t-6=0.$

$t_1=2;\quad t_2=-3$



$t\in\left(2;\ \frac{1+3\sqrt{89}}{4}\right)$

$\begin{cases}\sqrt{x+7}>2\\ \sqrt{x+7}\leq\frac{1+3\sqrt{89}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+7>4\\ x+7<\frac{1+801+6\sqrt{89}}{16}\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}x>-3\\ x<\frac{401-3\sqrt{89}-56}{8}=\frac{345-3\sqrt{89}}{8}=\frac{3}{8}\cdot(115-\sqrt{89})=\end{array}\right.$

ОДЗ: 1) $(x+4)>0 \Leftrightarrow x>-4$

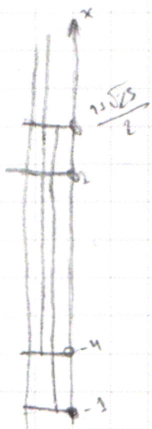
2) $\sqrt{x+7}-x\neq 1$

$\sqrt{x+7}\neq x+1$

$x+7\neq x^2+2x+1\quad x+1\geq 0$

$x^2+x-6\neq 0.\quad x\geq -1$

$\begin{cases}x\neq -3\\ x\neq 2\end{cases}\quad\begin{cases}x\geq -1\\ x\neq 2\end{cases}$



3) $\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x$

а) $x\geq 0 \Leftrightarrow x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

x

б) $x<0$

$x+7\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -7$

$x\in(-1;\ 2)\cup\left(2;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\frac{345-3\sqrt{89}}{8}-\frac{1+\sqrt{29}}{2}=\frac{345-3\sqrt{89}-4+4\sqrt{29}}{8}=$

$=\frac{341-3\sqrt{89}+4\sqrt{29}}{8}$

$\frac{341-300+20}{8}>0.$

Ответ $x\in(-1;2)\cup\left(2;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

№1

$y = 2x^2$

$y = 98$ (Пусть m)

$y = 18$ (Пусть n)

$y = a$ (Пусть k)

m: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 98 \end{cases}$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7 \Rightarrow m = 7 - (-7) = 14$

n: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 18 \end{cases}$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3 \Rightarrow n = 3 - (-3) = 6$

k: $\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = a \end{cases}$ $x^2 = \frac{a}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{a}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right) = \sqrt{2a}$

1) $120°$ – наиб. угол в треугольнике. $\begin{cases} \angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°. \end{cases}$ Пусть $\angle\alpha = 120°$. Тогда $\angle\beta + \angle\gamma = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle\beta < 60°$

$\angle\gamma < 60°$

2) n не может быть наиб. стороной в треугольнике, т.к. $m > n$.

Тогда (из 1) и 2)) $n^2 = m^2 + k^2 - 2mk\cos 120°$. не им. смысла (по т. косинусов)

Расс. 2 случая.

а) $m^2 = n^2 + k^2 - 2nk\cos 120°$

$196 = 36 + k^2 + 2 \cdot 6k \cdot \frac{1}{2}$

$k^2 + 6k - 160 = 0$.

$k_1 = -16$ н.к.

$k_2 = 10$. $2a = 100$

$\sqrt{2a} = 10$ $a = 50$

б) $k^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos 120°$

$k^2 = 196 + 36 + 49 \cdot 6 = 232 + 294 = 526$

$2a = 526$

$a = 263$

Ответ: $a_1 = 50$; $a_2 = 263$.

№3.

| 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | | | | | | | | | | |

1) $\frac{10}{1!}$

2) $\frac{10 \cdot 9}{2!}$

3) $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$

4) $10 \cdot 3$.

5)

6)

7)

8)

9)

10)

$\frac{10!}{n!(10-n)!}$ $\frac{9!}{m!(9-m)!}$

$B = \frac{(10!)^9}{(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9!)^2} =$

$= \frac{1^9 \cdot 2^9 \cdot 3^9 \cdot 4^9 \cdot 5^9 \cdot 6^9 \cdot 7^9 \cdot 8^9 \cdot 9^9 \cdot 10^9}{(1^9 \cdot 2^8 \cdot 3^7 \cdot 4^6 \cdot 5^5 \cdot 6^4 \cdot 7^3 \cdot 8^2 \cdot 9^1)^2} =$

$= \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^4 \cdot 6^5 \cdot 7^6 \cdot 8^7 \cdot 9^8 \cdot 10^9}{2^8 \cdot 3^7 \cdot 4^6 \cdot 5^5 \cdot 6^4 \cdot 7^3 \cdot 8^2 \cdot 9} = \frac{6 \cdot 7^3 \cdot 8^5 \cdot 3^7 \cdot 10^9}{2^7 \cdot 3^5 \cdot 4^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 7^3 \cdot 2^{15} \cdot 3^{14} \cdot 2^9 \cdot 5^9}{2^7 \cdot 3^5 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{2^{25} \cdot 3^{15} \cdot 5^9 \cdot 7^3}{2^{13} \cdot 3^5 \cdot 5} = 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^8 \cdot 7^3$

$10 \cdot A + B = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^2 \cdot 10 + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^8 \cdot 7^3 =$

$= 2^6 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^2 + 2^{12} \cdot 3^{10} \cdot 5^8 \cdot 7^3$

$A = \frac{(9!)^8}{(1! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 7! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 3! \cdot 7! \cdot 2! \cdot 8! \cdot 1! \cdot 9!)} =$

$= \frac{(9!)^7}{(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8!)^2} = \frac{(9!)^4}{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8!} =$

$= \frac{1^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4 \cdot 6^4 \cdot 7^4 \cdot 8^4 \cdot 9^4}{(1^8 \cdot 2^7 \cdot 3^6 \cdot 4^5 \cdot 5^4 \cdot 6^3 \cdot 7^2 \cdot 8^1)} = \frac{6 \cdot 7^2 \cdot 8^3 \cdot 9^4}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 4} =$

$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 2^9 \cdot 3^8}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 2^2} = 2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x - \sin^2 5x + 5$

Заметим, что период функции равен 2π.

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x - 2\sin x \cdot \cos x - 2\sin 5x \cdot 5\cos 5x =$

$= (3\cos 3x \cdot \sin 7x + 3\cos 7x \cdot \sin 3x) + 4\cos 7x \cdot \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= 3\sin 10x - 5\sin 10x + 4\cos 7x \cdot \sin 3x - \sin 2x = 2\sin 10x - \sin 2x + 2(\sin 10x + \sin 4x) =$

$= \cancel{4\sin 10x} + 2\sin 4x - \sin 2x =$

$\{ \sin 10x = \sin(8x + 2x) = \sin 8x \cos 2x + \sin 2x \cos 8x +$

$= 4\sin 2x \cos 2x - \sin 2x = \sin 2x\,(4\cos 2x - 1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что диапазон каждого промежутка равен 45. Тогда, назвав числа промежутков как a, b, c, d, e и f, будет справедливо:

$a_i - b_j \vdots 45$ только при $i = j$. Тогда для дост. наим. суммы следует взять 1-6 числа посл. пром, 7-12 числа предпосл. пром и т.д.

Тогда сумма S равна:

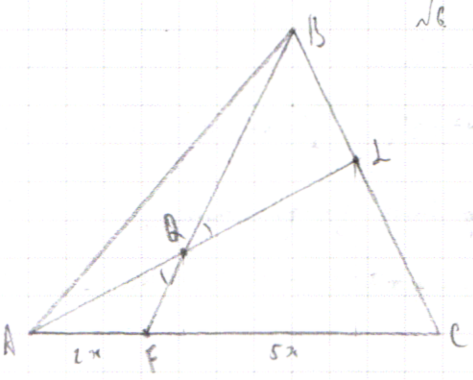
$S = 180 \cdot 6 + 135 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 45 \cdot 6 + 0 \cdot 6 + (1+2+3+4+5+6) \cdot 6 =$ $6 \cdot 531 = 3186$

$= 6 \cdot (180 + 135 + 90 + 45 + 21) = 6 \cdot 481 = 2826.$

220 180 450

Ответ. 2826.

№6



Дано: $\triangle ABC$; $F \in AC$; $L \in BC$; $AF : FC = 2 : 5$.

$BF \cap AL = Q$; $S_{BQL} : S_{BAC} = 5 : 11$.

$\rho(Q, AC) = 6$ – расст. от Q до AC.

Найти: $\rho(L, AC)$ – ? – расст. от L до AC

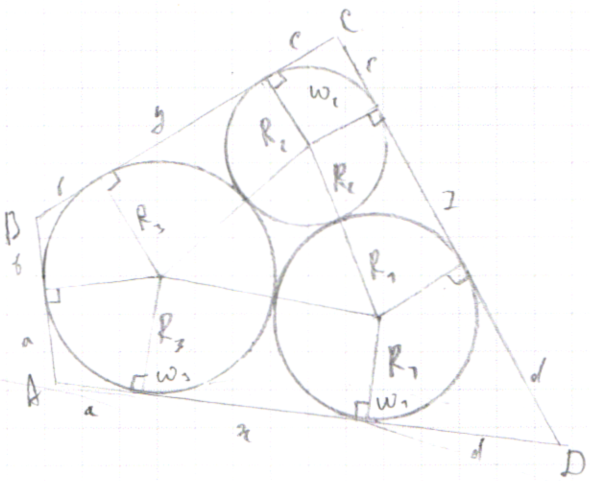
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4.



Дано: ABCD – четырехугольник

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – попарн. кас. окр

ω_1 кас. AD, CD; ω_2 кас. DC и CB,

ω_3 кас. CB, BA и AD,

а) $AD+BC-AB-CD=12$

б) O – центр ω_3

в) $AO\cdot BO=58$

Найти: а) R_1, R_2, R_3 (рад. окр); б) $\angle AOB$ – ?

в) AB – ?

Решение:

а) $AD+BC-AB-CD=12$

$AD=a+x+d$; $AB=a+b$; $BC=b+y+c$; $CD=c+z+d$

$AD+BC-AB-CD=\cancel{a}+x+\cancel{d}+\cancel{b}+y+\cancel{c}-\cancel{a}-\cancel{b}-\cancel{c}-z-\cancel{d}=12$

$x+y-z=12$

$(R_3+R_2)^2=y^2+(R_3-R_2)^2$

$\cancel{R_3^2}+\cancel{R_2^2}+2R_3R_2=y^2+\cancel{R_3^2}+\cancel{R_2^2}-2R_3R_2$

$y^2=4R_3R_2$

Анал. $x^2=4R_3R_1$ и $z^2=4R_2R_1$

$\left(\frac{x}{y}\right)^2=\frac{R_1}{R_2}$ $\quad x=y\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$

$\left(\frac{y}{z}\right)^2=\frac{R_3}{R_1}$ $\quad y=z\sqrt{\frac{R_3}{R_1}}$

$\left(\frac{x}{z}\right)^2=\frac{R_3}{R_2}$ $\quad x=z\sqrt{\frac{R_3}{R_2}}$

$y=2\sqrt{R_3R_2}$ $\quad x=2\sqrt{R_3R_1}$

$z=2\sqrt{R_2R_1}$

$\sqrt{R_3R_1}+\sqrt{R_3R_2}-\sqrt{R_2R_1}=6$