МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 11-028

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-028

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 Найдите наибольшие и наименьшие значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

Реш-е:

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 \quad | \cdot 2$

$2g(x) = 2\sin 5x \cdot \sin 9x - 2\sin^2 7x - 2\cos^2 x - 6$

$2 \cdot g(x) = \cos 4x - \cos 14x + 1 - 2\sin^2 7x - (2\cos^2 x - 1) - 8$

$2 \cdot g(x) = \cos 4x - \cancel{\cos 14x} + \cancel{\cos 14} - \cos 2x - 8$

$2 \cdot g(x) = \cos 4x - \cos 2x - 8$

$2 \cdot g(x) = -2\sin x \cdot \sin 3x - 8 \quad | : 2$

$g(x) = -\sin x (3\sin x - 4\sin^3 x) - 4$

$g(x) = 4\sin^4 x - 3\sin^2 x - 4$

Замена: $\sin x = t$

$g(t) = 4t^4 - 3t^2 - 4$

Решаем с помощью производного

$g'(t) = 16t^3 - 6t = t(16t^2 - 6)$

Теперь решаем в 2 случаях.

1) $t = 0$. $g(0) = -4 \Rightarrow max$

2) $t^2 = \frac{6}{16}$ $g\left(\frac{6}{16}\right) = 4 \cdot \frac{36}{256} - 3 \cdot \frac{6}{16} - 4 = \frac{4^2 \cdot 9}{4^2 \cdot 4^2} - \frac{18}{16} - \frac{16}{4} =$

$= \frac{9 - 18 - 64}{16} = -\frac{73}{16} = -4\frac{9}{16} \Rightarrow min$

Ответ: $g_{max}(0) = -4$; $g_{min} = -4\frac{9}{16}$

N5. Решите неравенство:

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} 1)\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ 2)\ x+3>0 \\ 3)\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-3<0 \end{cases} \\ 2)\ x>-3 \\ 3)\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases}$$

$$1)\ \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-3<0 \\ D=1+12=13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

объеденение 1: $x \in \left[0;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) $x>-3 \quad x \in (-3;+\infty)$

3) $x^2+x-2 \neq 0$

$(x-1)(x+2) \neq 0$

$x \neq 1 \quad x \neq -2.$

Общее ОДЗ: $x \in [0;1) \cup \left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Решение неровенство:

$\log_a b - \log_a c$

$(a-1)(b-c)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+3-\sqrt{x+3}-x) \geq 0$

Найдом 0 функции чтоб розлагит на ~~множе~~ болеe понятной множителей.

1) $\sqrt{x+3}-x-1=0$

$\sqrt{x+3}=x+1$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

2) $x+3-\sqrt{x+3}-x=0$

$2x+3=\sqrt{x+3}$

$4x^2+11x+6=0$

$4x^2+8x+3x+6=0$

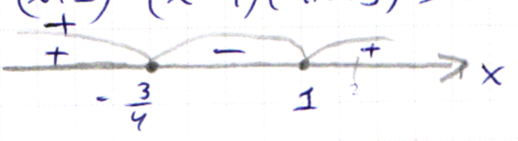
$4x(x+2)+3(x+2)=0$

$(x+2)(4x+3)=0$

Неровенству можем написат в таком виде

$(x+2)(x-1)(x+2)(4x+3) \geq 0$

$(x+2)^2(x-1)(4x+3) \geq 0$



$x \in \left(-\infty;-\frac{3}{4}\right] \cup [1;+\infty)$

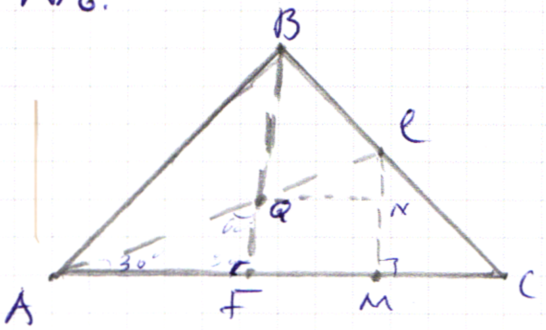
учитывая ОДЗ:

$x \in \left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Ответ: $x \in \left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6.



Дано:

$S_{BQC} : S_{BAC} = 1:16$

$FQ = 9$

$AF : FC = 3:4$

Найти eM - ?

Реш-е:

$S_{BQC} = x$

$FQ = MN = 9$

$S_{BAC} = 16x$

$AF : FC = 3:4$

$AF = 3x \quad FC = 4x$

$AC = 7x$

$$\frac{QF}{\sin 30^\circ} = \frac{AQ}{\sin 90^\circ}$$

$$\frac{9}{\frac{1}{2}} = AQ \qquad AQ = 18$$

$$AF = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{324 - 81} = \sqrt{243}$$

$AF = 3x$

$3x = \sqrt{243}$

$$x = \frac{\sqrt{3^5}}{\sqrt{3^2}} = 3\sqrt{3}$$

$FC = 4 \cdot 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$

~~FM = FC~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-028

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+3) \geq 1$

ОДЗ:

$\sqrt{x+3}-x>0$.

$\sqrt{x+3}>x$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-x-3<0 \\ x\geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D=1+12=13 \\ x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x\geq 0. \end{cases}$

общее $x\in\left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x+3>0$

$x>-3$

$\sqrt{x+3}-x\neq 1$

$\sqrt{x+3}\neq x+1$

$x+3\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-2\neq 0$

$(x-1)(x+2)\neq 0$

$x\neq 1 \quad x\neq -2$

$(x+2)(x-1)(x+2)(4x+3)\geq 0$.

$(x+2)^2(x-1)(4x+3)\geq 0$.

$+ \quad -2 \quad + \quad -\frac{3}{4} \quad - \quad 1 \quad + \quad x$

$x\in(-\infty; -2]\cup[-2; -\frac{3}{4}]\cup[1; +\infty)$

Ответ: $x\in\left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

~~Общее~~ объеденение ОДЗ: $x\in[0;1)\cup\left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Учитывая ОДЗ что x может быт в пределе $0<x<1$ и $x>1$ получаем ~~следи~~ такой вид неровенство.

$\log_a b-\log_a c$

$(a-1)(b-c)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+3)-\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)\geq 0$.

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+3-\sqrt{x+3}+x)\geq 0$

$\sqrt{x+3}=x+1$

$x^2+2x+1=x+3$

$x^2+x-2=0$.

$(x+2)(x-1)=0$.

$x+3-\sqrt{x+3}+x=0$

$2x+3=\sqrt{x+3}$

$4x^2+12x+9=x+3$

$4x^2+11x+6=0$.

$4x^2+11x+6=0$

$4x^2+8x+3x+6=0$

$4x(x+2)+3(x+2)=0$

$(x+2)(4x+3)=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

N2.

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - (1 - \cos^2 7x + \cos^2 x + 3)$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= \sin 5x \cdot \sin 9x + \cos 14x - 1 - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin 5x \cdot \sin 9x + \cos 14x - \cos^2 x - 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x + \cos 14x - \cos^2 x - 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 14x - \cos^2 x - 4 =$ A. $| \cdot 2.$

$2A = \cos 4x + \cos 14x - 2\cos^2 x - 8$

$2A = 2\cos 9x \cos 5x - (2\cos^2 x - 1 + 9)$

$2A = 2\cos 9x \cos 5x - \cos 2x - 9$

$2A = 2\cos(5x + 4x)\cos 5x - \cos 2x - 9.$

$2A = 2\cos 5x(\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x)$

$= \frac{2\sin 5x \sin 9x + 2\cos 14x - 2\cos^2 x - 8}{2} =$

$= \frac{2\sin 5x \sin 9x + 2\cos 14x - \cos 2x - 9}{2} = \frac{2\sin 5x \sin 9x + \cos 14x + (\cos 14x - \cos 2x) - 9}{2}$

$= \frac{2\sin 5x \sin 9x - \sin 8x \sin 6x + \cos 14x - 9}{2}$