МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 11-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-C15

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Найдем высекаемые параболой отрезки:

$y=2x^2$

$y=98$: $2x^2=98$, $x^2=49$, $x=\left[\begin{matrix}7\\-7\end{matrix}\right.$

длина высекаемого отрезка $|7|+|-7|=14$

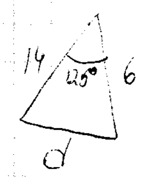
$y=18$: $2x^2=18$, $x^2=9$, $x=\left[\begin{matrix}-3\\3\end{matrix}\right.$

длина высек. отрезка $|3|+|-3|=6$

$y=a$: $2x^2=a$, $x^2=\frac{a}{2}$, $x=\left[\begin{matrix}+\sqrt{\frac{a}{2}}\\-\sqrt{\frac{a}{2}}\end{matrix}\right. \Rightarrow a>0$

длина отрезка

$d=\left|\sqrt{\frac{a}{2}}\right|+\left|-\sqrt{\frac{a}{2}}\right|=2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

1) 

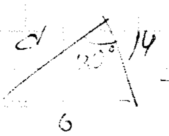
Т. cos. $d^2=196+36-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 120^\circ=$

$=232+2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 60^\circ=232+6\cdot 14=316$

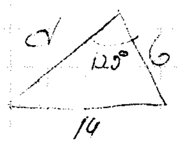
$d=\sqrt{316}=\sqrt{2a}$

$316=2a$

$a=158$

2) 

- Такого тр-ка не существует (120° - наибольший угол тр-ка, 6 - не явл. наибольшей стороной)

3) 

Т. cos. $d^2+36+2\cdot 6\cdot d\cdot\cos 60^\circ=196$

$d^2+6d-160=0$

$D=36+640=676$

$d=\frac{-6\pm 26}{2}$, $d>0 \Rightarrow d=10$

$d=10=\sqrt{2a}$

$100=2a$

$a=50$

Ответ: при $a=50$; $a=158$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2 $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4;$

$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\cos x \sin x - 2 \cdot \sin 5x \cdot 5 \cdot \cos 5x =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 3\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x + 4\cos 7x \sin 3x =$

$= 3\sin 10x - 5\sin 10x - \sin 2x + 2(\sin 10x - \sin 4x) =$

$= \cancel{-2\sin 10x} - \sin 2x + 2\sin 10x - 2\sin 4x = -\sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x =$

$= -\sin 2x(1 + 4\cos 2x).$

$g'(x) = 0 \qquad -\sin 2x(1 + 4\cos 2x)$

$\sin 2x = 0$ $\qquad \cos 2x = -\frac{1}{4}$

$2x = \pi k$ $\qquad 2x = \pm(\pi - \arccos\frac{1}{4}) + 2\pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ $\qquad x = \pm\frac{\pi - \arccos\frac{1}{4}}{2} + \pi k, k \in Z.$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x + \cos 2x + \frac{1}{2}\cos 10x + 4 =$

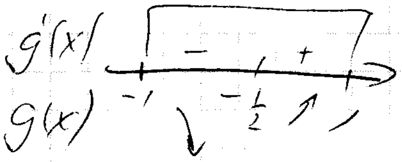
$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) + \cos 2x + 4 = \cos^2 2x + \cos 2x + \frac{7}{2}$

$\cos 2x = t, \quad t \in [-1; 1]$

$g'(x) = 2t + 1$

$g'(x) = 0 \qquad t = -\frac{1}{2}$

$\cos 2x = -\frac{1}{2} \qquad x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$



$g_{max} = \left[\begin{array}{l} g(-1) \\ g(1) \end{array}\right. =$

$g_{min} = g(-\frac{1}{2}) =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 Рассмотрим различные варианты расположения группы из 7 „8"-ок.

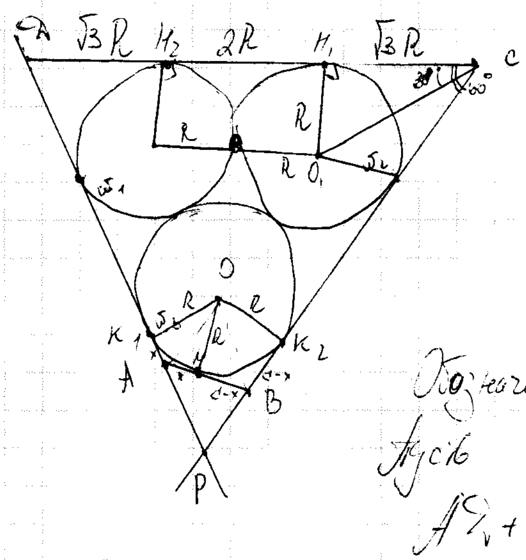
1) $\underbrace{88\ldots8}_{7}\underbrace{\ldots\ldots}_{10}$ — для 10 оставшихся цифр кол-во возможных вариантов $2^{10}-2$ (2 варианта, в которых все 10 цифр одинаковы)

2) $7\ldots\underbrace{8\ldots8}_{7}\ldots$ позиции со 2 по 10 — 9 вариантов расположить группу „8"-ок.
т.к. 17-зн число не может нач-ся „0"
вариантов выбрать 9 цифр 2^9-2.

Всего вариантов $2^{10}-2+9(2^9-2)=2^{10}-2+9\cdot2^9-18=2^9(2+9)-20=$
$=2^9\cdot 11-20=512\cdot11-20=5120+512-20=5100+512=5612$

Ответ: 5612.

№4



а) Продлим AD и BC до пересечения в т. P. Очевидно, что $\triangle PCD$ - равносторонний (из рав. отрезков касательных и отрезков м/у точками касания)

Тогда $\angle CO_1H_1 = \frac{1}{2}\angle DCP = 30^\circ$

в $\triangle CO_1H_1$: $CH_1 = R\operatorname{ctg}30^\circ = \sqrt{3}R$ аналогично с другими отрезками касательных.

Обозначим M - точку кас. AB и ω_3.

Пусть $AB=d$, $AM=x$, $BM=d-x$; $AK_1=AM$; $BK_2=BM$ — отрезки касат.

$AD+BC-AB-CD=$

$=R(2+\sqrt{3})-x)+(R(2+\sqrt{3})+d-x)-d-R(2+2\sqrt{3})=12$

$2R+\sqrt{3}R+2R+\sqrt{3}R-2R-2\sqrt{3}R=12$

$2R=12 \qquad R=6.$

б) $\triangle K_1OK_2$: $\angle K_1OK_2 = 120^\circ$ (из $\triangle POK_2$: $\angle POK_2 = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
$\angle K_1OK_2 = 2\cdot 60^\circ = 120^\circ$)

~~Отрезки~~ Прямые AO и BO являются биссектрисами $\angle K_1OA$ и $\angle K_2OB$ соотв. (по св-ву касательных из одной точки)

$\Rightarrow \angle AOB = \frac{\angle K_1OA}{2} + \frac{\angle K_2OB}{2} = \frac{1}{2}\cdot\angle K_1OK_2 = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ$.

в) $S_{AOB} = \frac{1}{2}R\cdot d = \frac{1}{2}AO\cdot BO\sin 60^\circ$.

$Rd = 58\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB = d = \frac{29\sqrt{3}}{R} = \frac{29\sqrt{3}}{6}$ Ответ: а) $R=6$ б) $\angle AOB = 60^\circ$ в) $AB = \frac{29\sqrt{3}}{6}$

№5 $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \ge 1$ ОДЗ: $x+4>0$
$\sqrt{x+7}-x>0$
$\sqrt{x+7}-x \ne 1$

по опр. логарифма:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1\\ x+4\ge\sqrt{x+7}-x\end{cases}\\ \begin{cases}0<\sqrt{x+7}-x<1\\ x+4\le\sqrt{x+7}-x\end{cases}\end{array}\right.$$ с учетом ОДЗ

① $\begin{cases}x+7>x^2+2x+1\\ 2x+4\ge\sqrt{x+7}\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+x-6<0\\ 4x^2+16x+16\ge x+7\end{cases}$

$\begin{cases}(x+3)(x-2)<0\\ 4x^2+15x+9\ge 0\end{cases}$

$\begin{cases}(x+3)(x-2)<0\\ (x+3)(x+\frac{3}{4})\ge 0\end{cases}$

$-3 \quad -\frac{3}{4} \quad 2$

$x\in[-\frac{3}{4};2)$

② $\begin{cases}x^2<x+7\\ x+7<x^2+2x+1\\ 2x+4\le\sqrt{x+7}\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x-7<0\\ x^2+x-6>0\\ 4x^2+15x+9\le 0\end{cases}$ корни $x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

$-3 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad 2 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

р. нет

$5<\sqrt{29}<6$
$6<1+\sqrt{29}<7$
$3<\frac{1+\sqrt{29}}{2}<3{,}5$
$-6<-\sqrt{29}<-5$
$-2{,}5<\frac{1-\sqrt{29}}{2}<-2$

③ ОДЗ: $x>-4$; $x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$
$x\ne-3$; $x\ne 2$

$-4 \quad \frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad -\frac{3}{4} \quad 2 \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

Ответ: $[-\frac{3}{4};2)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 Все выбранные Тимошей числа должны иметь разные остатки при делении на 45.

Минимальная сумма различных остатков:

$\frac{1+30}{2} \cdot 30 = 31 \cdot 15 = 465.$

В каждом отрезке он берет по 6 чисел.

Т.е. 6 · [минимум отр. 1] + 6 [минимум отр. 2] + ... + 6 [минимум отр. 5] + 465.

$6 \cdot (0 + 45 + 90 + 135 + 180) + 465 = 6 \cdot (180 + 270) + 465 =$

$= 2700 + 465 = 3165.$

Если рассмотреть min остаток в группе 0(45) не явл. целесообр. т.к. $1 < 45$, $46 < 90$ и т.д.

Ответ: 3165.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-Ф15

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) 1)

$\begin{cases} x+7 > x^2+2x+1 \\ 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+x-6<0 \\ 4x^2+16x+16 \geq x+7 \end{cases}$

$\begin{cases} (x+3)(x-2)<0 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases}$ $D = 225-4\cdot4\cdot9 = 81$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8}$ $\left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} \\ -3 \end{array}\right.$

$\begin{cases} (x+3)(x-2)<0 \\ (x+3)(x+\frac{3}{4}) \geq 0 \end{cases}$

-3 $-\frac{3}{4}$ 2

$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

2)

$\left[\begin{array}{l} x^2 < x+7 \\ x+7 < x^2+2x+1 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \end{array}\right.$

$x^2-x-7<0$ $D = 1+4\cdot7 = 29$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x^2+x-6>0$ $x: \left[\begin{array}{l} -3 \\ 2 \end{array}\right.$

$4x^2+15x+9 \leq 0$ $x: \left[\begin{array}{l} -\frac{3}{4} \\ -3. \end{array}\right.$

-3 $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ $-\frac{3}{4}$ 2 $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$5 < \sqrt{29} < 6$

$6 < 1+\sqrt{29} < 7$

$3 < \frac{1+\sqrt{29}}{2} < 3,5$

$2,1\in\emptyset$

$-6 < -\sqrt{29} < -5$

$-5 < 1-\sqrt{29} < -4$

$-3,5 < \frac{1-\sqrt{29}}{2} < -2$

3. ОДЗ: $x > -4$ $x \in (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x \neq -3$ $x \neq 2$

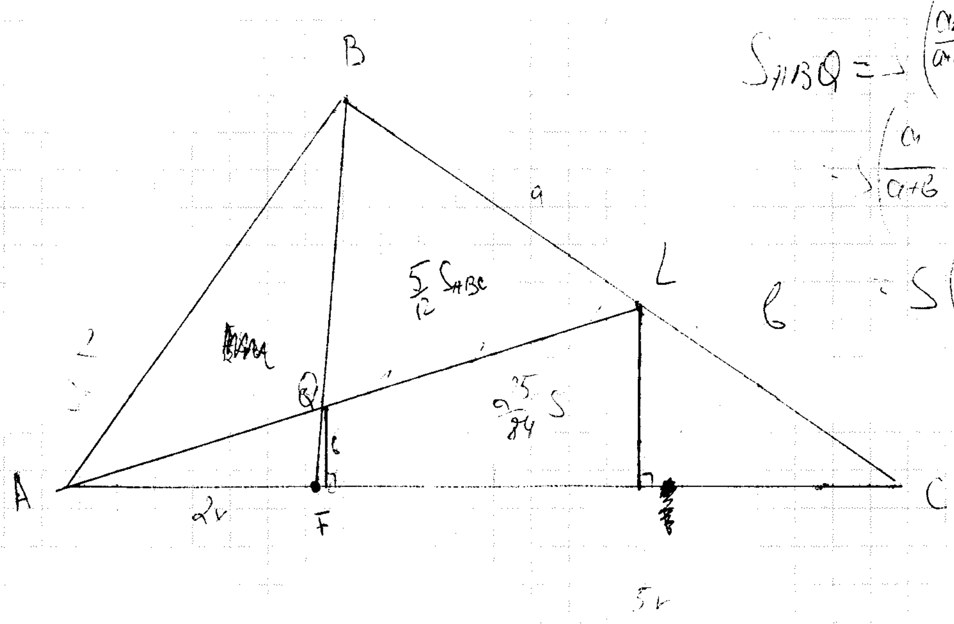
-4 $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ $-\frac{3}{4}$ 2 $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

Ответ: $[-\frac{3}{4}; 2)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

6)



$S_{ABQ} = S\left(\frac{a}{a+b} + \frac{2}{7} + \frac{25}{84} - 1\right) = S\left(\frac{a}{a+b} + \frac{49}{84} - 1\right) = S\left(\frac{a}{a+b} - \frac{35}{84}\right)$

$\frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{2}{5}$ $\quad S_{ABF} = \frac{2}{7}S_{ABC}$ $\quad S_{CBF} = \frac{5}{7}S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{FQLC} = S\left(\frac{5}{7} - \frac{5}{12}\right) = S\left(\frac{60-35}{84}\right) = \frac{25}{84}S$

$S_{ABL} = \frac{a}{a+b}S$

$S_{ACL} = \frac{b}{a+b}S$

$S_{LBQ} = S\left(\frac{a}{a+b} - \frac{5}{12}\right) = S\left(\frac{12a - 5a - 5b}{12(a+b)}\right) = S\frac{7a-5b}{12a+12b}$

$S_{AFQ} = S\left(\frac{2}{7}S + \frac{b}{a+b}\right) + \frac{5}{12}S - S = \left(\frac{2}{7} + \frac{b}{a+b} + \frac{5}{12} - 1\right)S = \left(\frac{24+35}{84} + \frac{b}{a+b} - 1\right)S = \left(\frac{b}{a+b} - \frac{25}{84}\right)S$

$\frac{1}{2}2x \cdot 6 = \frac{b}{a+b} - \frac{25}{84}$

$\frac{1}{2} \cdot 5x \cdot h = \frac{25}{84}$

$\frac{1}{2}(2x \cdot 6 + 5x \cdot h) = \frac{b}{a+b}$

$\frac{1}{2} \cdot 7x \cdot \ldots + \frac{1}{2}6 \cdot 2x =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-С15

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

B1 B2 B3 B4 B5 B6
1 2 3 4 5 6

142 143 144 145 146 147
7 8 9 10 11 12

103 104 105 106 107 108
13 14 15 16 17 18

64 65 66 67 68 69
19 20 21 22 23 24

25 26 27 28 29 30

$\Sigma a_i = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 31 \cdot 15 = 310 + 155 = \boxed{465}$

$8 \cdot 30 = 6(95 \quad 6(0+45+90+135+180) = 6 \cdot (180+270) =$
$= 6 \cdot 450 = 900 \cdot 3 = 2700$

Ответ: 3165

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

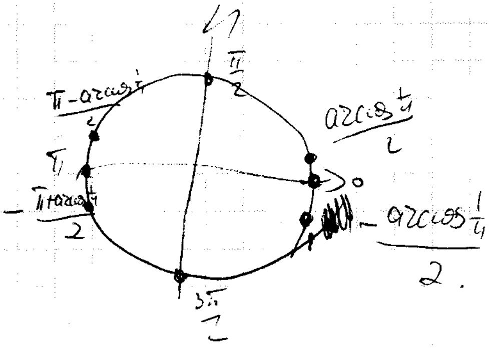
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$-\sin 2x\,(4\cos 2x+1)=0$

$\cos 2x=-\frac{1}{4}$

$2x=\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi k$

$x=\pm\frac{\pi-\arccos\frac{1}{4}}{2}+\pi k$



$\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)-\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 10x}{2}+4=$

$\cos 2x=$
$=\cos^2-\sin^2=$
$=2\cos^2-1$

$=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 10x+\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 10x+4=$

$=\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-1)+\cos 2x+4=\cos^2 2x+\cos 2x+\frac{7}{2}$

$\cos 2x=t$

$f'(t)=2t+1$

$t=-\frac{1}{2}$

$-1 \quad -\frac{1}{2} \quad 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-С13

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y=2x^2$ $\quad y=98$ $\quad y=8$

$\cos 120^\circ = \cos(180-60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

$2x^2-98=0$

$x^2=49$

$x=\pm 7$

316 | 2
158 | 2
79 |

$2x^2-8=0$

$x^2=9$

$x=\pm 3$

Отрезок длины 14 Отрезок длины 6

примем длину отрезка прямой $y=a$ за d

1) $196+36-2\cdot 14\cdot 6\cdot \cos 120^\circ = 232+84 = 316 = d^2$

$2x^2-a=0$

$x^2=\frac{a}{2}$ $\quad a>0$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{316}$ $\quad d$

$4\cdot\frac{a}{2}=316$

$a=158$

$\times 158$, 158, 1264, 790, 158, 24964

232 + 84 = 316

2) $d^2+196+d\cdot 14=36$

$d^2+14d+160=0$

$D_1 = 196 - \ldots < 0$

т.к. в большего угла б. сторона

3) $d^2+36+6d=196$

$d^2+6d-160=0$

$D=36+640=676=26^2$

$d=\frac{-6\pm 26}{2}=10$

$2x^2-a=0$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$

$d=2\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}=10$

$\sqrt{\frac{a}{2}}=5$

$\frac{a}{2}=25$

Ответ: 50; ~~158~~ отрицательн не подходит $\quad a=50$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2) $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$

$\frac{a+b}{2} = 3$

$\frac{a+b}{2} = 7$

$a - b = 6$

$a + b = 14$

$2a = 20$

$a = 10x$

$b = 4x$

$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\cdot\cos x \sin x - 2\cdot\sin 5x \cdot 5\cdot\cos 5x =$

$= 3\cos 3x \sin 7x + 3\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 5\sin 10x + 4\cos 7x \sin 3x =$

$= 3\sin 10x - 5\sin 10x - \sin 2x + 2\cdot(\sin 10x - \sin 4x) =$

$= \cancel{-2\sin 10x} - \sin 2x + \cancel{2\sin 10x} - 2\sin 4x =$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{+}{2}\sin\frac{-}{2}$

$= -\cancel{2}\sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x =$

$= -\cancel{4}\sin 2x(4\cos 2x + 4)$

$\cos 4x - \cos 10x$

$\sin 2x = t \quad t \in [-1; 1]$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cdot(2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{+}{2}$

$\cos 2x = \sqrt{1 - t^2}$

$\alpha + \beta = 14$

$\alpha - \beta = 6$

$\alpha = 10$

$\beta = 4$

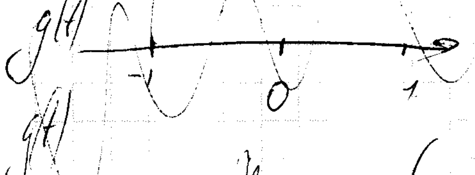
$g(t) = -2t(\sqrt{1 - t^2} + 1) = 0$

$t = 0 \qquad \sqrt{1 - t^2} = -1$ р. нет.

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}$



$-\cancel{4}\sin 2x(\cos 2x + 1) = 0$

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi k$

$x = \frac{\pi k}{2}$

$\cos 2x = -1$

$2x = \pi + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$g(0) = 5$

$g(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 + 4 = 4$

$g(\pi) = 1 + 4 = 5$

$g(\frac{3\pi}{2}) = 1 - 1 + 0 + 4 = 4$

$g_{max} = 5 \qquad g_{min} = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) 17-34. „8" ровно 7, все подряд

„0" „7" „8" пошли хотя бы 1 раз
все „0" и все „8" (хотя бы 1 раз)

1) $\underbrace{8 \dots 8}_{7}$ вар. $\underbrace{2^{10}-2}_{10}$

2) $7 \dots \underbrace{88}_{7} \dots$ $2 \dots 10$ – 9 вар.

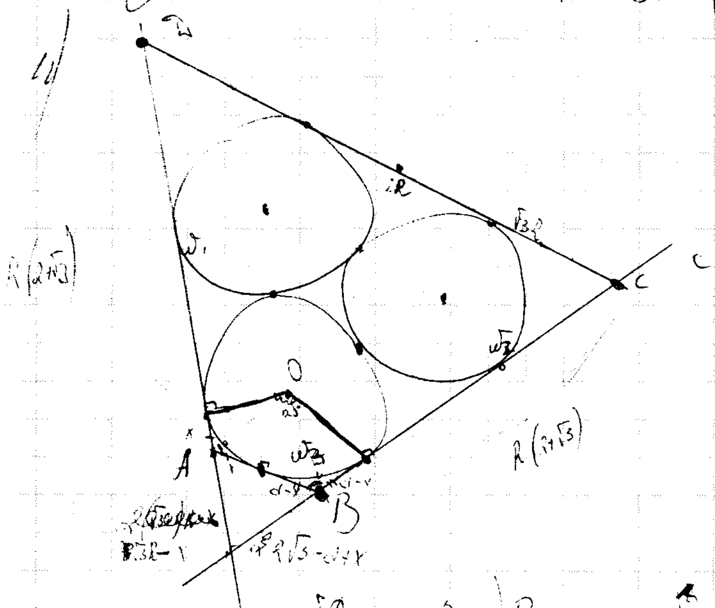
$9 \cdot (2^9-2)$

Всего $2^{10}-2+9(2^9-2) = 2^{10}-2+9\cdot 2^9-18 = 2^9(2+9)-20 =$

$= 512\cdot 11 - 20 = 5120+512-20 = 5100+512 = \boxed{5612}$

Ответ: $2^{10}-2+9\cdot(2^9-2) = 5612$ чисел

4)



$AD + BC - AB - CD = 12$

$CD = 2\sqrt{3}R + 2R = 2R(1+\sqrt{3})$ $AB = d$

$R(2+\sqrt{3}) + x + R(2+\sqrt{3}) + d - x - d - 2R(1+\sqrt{3}) = 12$

$2R + R\sqrt{3} + 2R + R\sqrt{3} - 2R - 2\sqrt{3}R = 12$

$2R = 12$ $R = 6$.

$\frac{R \cdot x}{2} + \frac{R(d-x)}{2}$ $(\sqrt{R^2+x^2})^2 + (\sqrt{R^2+(d-x)^2})^2 - 2(\ )(\ )\cos\alpha$

$\frac{Rx}{2} + \frac{Rd}{2} - \frac{Rx}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{R^2+x^2})(\sqrt{R^2+(d-x)^2})\sin\alpha$ $\frac{R}{2}$ $\frac{Rd}{2} \cdot \frac{R}{2}$ $R^2+x^2+R^2+(d-x)^2 - 2\sqrt{R^4+R^2(d-x)^2+R^2x^2+x^2(d-x)^2}\cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$Rd = \sqrt{(R^2+x^2)(R^2+(d-x)^2)}\sin x$

$Rd = \sqrt{(R^2+x^2)(R^2+(d-x)^2)} \sin\alpha$

$R^2d^2 = (R^2+x^2)(R^2+(d-x)^2)\sin^2\alpha$

$R^2d^2 = R^4 + R^2(d-x)^2 + R^2x^2 + x^2(d-x)^2 \sin^2\alpha$

б) $AO \cdot BO = 58$

$\frac{1}{2}AB \cdot R = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ$

$6AB = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 58$

$AB = \frac{58\sqrt{3}}{24} = \frac{29\sqrt{3}}{12}$

Ответ: а) 6
б) 60°
в) $\frac{29\sqrt{3}}{12}$

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $\sqrt{x+7}-x>0$
$\sqrt{x+7}-x \neq 1$
$x \geq -4$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geqslant \sqrt{x+7}-x \end{cases} \\ \begin{cases} 0<\sqrt{x+7}-x<1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \end{array}\right.$$