

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

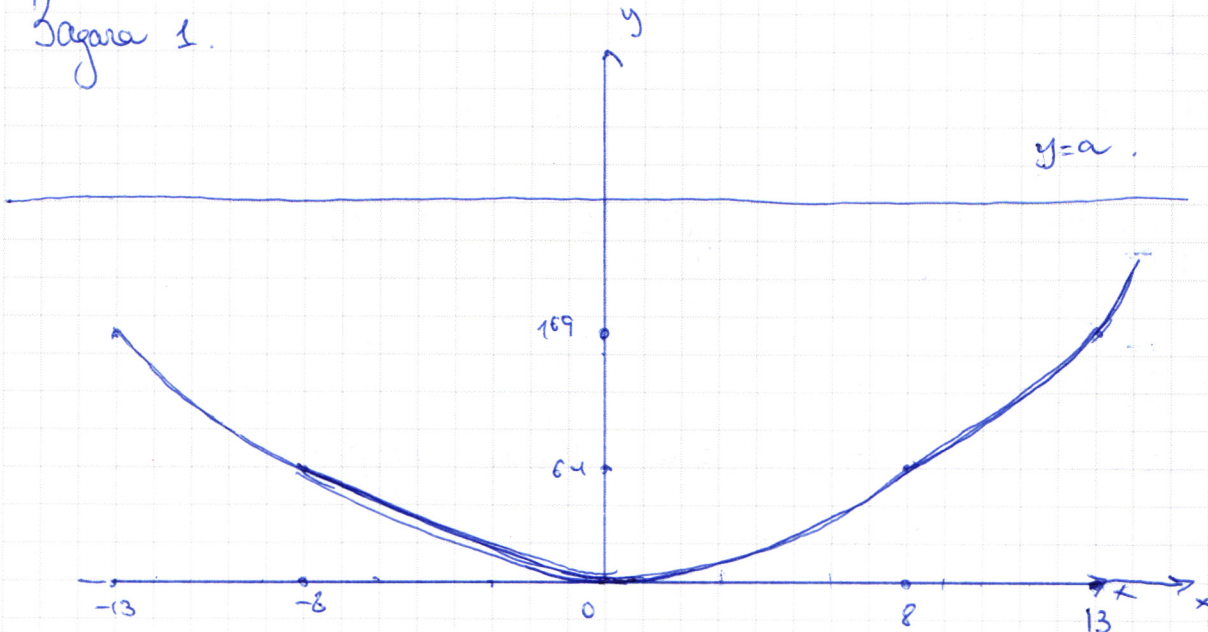
9-15

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

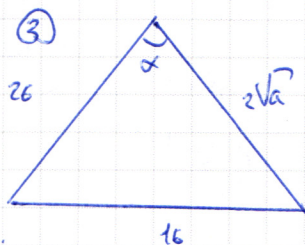
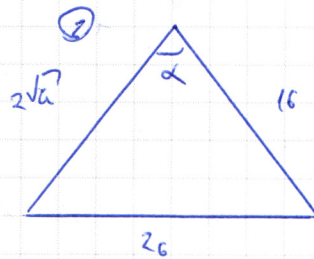
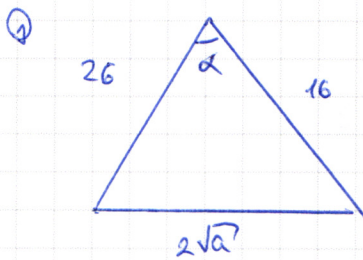
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.



$$x = \sqrt{a} \Rightarrow \text{ODЗ } a \geq 0.$$

По т. косинусов (имеем 3 варианта)



Везде  $\alpha = 120^\circ$   
3-вариант сразу отбра-  
сывается, так как это  
невозможно.

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

Рассмотрим ①

$$26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 = 4a$$

$$26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 = 4a$$

$$676 + 256 + 416 = 4a$$

$$a = \frac{169 + 64 + 104}{4} = 337$$

Рассмотрим ②

$$26^2 = 4a + 16^2 + 32\sqrt{a}$$

$$676 = 4a + 32\sqrt{a} + 256$$

$$4a + 32\sqrt{a} - 420 = 0$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

$$\sqrt{a} = t$$

$$t^2 + 8t - 105 = 0$$

$$t = -15 \times \\ t = 7 \checkmark$$

$$\sqrt{a} = 7$$

$$a = 49$$

Ответ:  $\{49; 337\}$

③ Всего способов поставить в "5"-к в ряд по ряду бюджет 13. Теперь у нас есть 2 случая

1) 555555 .....

2) ... 555.555 .....

В первом случае нам необходимо обеспечить присутствие хвосты 2-й "9" и 1-го "0", найдем кол-во выборов места для "9-ки"

Способов поставить 1-ую 9-ку  $C_{18-6}^1 = C_{12}^1 = 12$ .

Способов поставить 1-ую 0  $C_{11}^1 = 11$ .

Чтобы / способов

Остальные цифры выбираем одну из двух  $\Rightarrow 2^{10}$

Всего способов для 1-го случая

$$12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$$

$$120 \\ 12 \cdot 10 \cdot 12 = 132$$

2) На первом месте, только 9;

Чтобы был 0  $C_{11}^1 = 11$ .

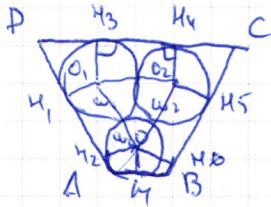
Остальные 10 цифр  $2^{10}$

Всего вариантов:  $12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$ ; сложим их и получим  $2 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$

Ответ:  $132 \cdot 2^{11}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④



Прямая DC - касательная для  $\omega_1$  и  $\omega_2$   
 Прямая DA - касательная для  $\omega_1$  и  $\omega_3$   
 Прямая CB - касательная для  $\omega_2$  и  $\omega_3$

$H_4C = CH_5$   
 $DH_3 = DH_1$   
 $AH_2 = AM$   
 $MB = BH_6$

окружности и  $OC$  касательны из одной точки.

Так как радиусы равны ABCD - равнобедренная трапеция. Если соединить центры окружностей получим равностр. треугольник. Имеем.

$$AD = DH_1 + H_1H_2 + H_2A$$

$$AD = BC$$

$$DC = DH_1 + DH_1 + H_3H_4$$

$$AB = AH_2 + AM_2$$

$$O_1H_3 \perp DC \text{ и } O_2H_4 \perp DC \quad O_2H_4 = O_1H_3 \Rightarrow H_3H_4 = O_1O_2 = 2r$$

Аналогично для  $H_1H_2$

$$1) AD + BC - AB - CD = 10.$$

$$4r - 2r = 10 \quad r = 5 \text{ см.}$$

$$2) \angle AOB \text{ вертикальный для } O_1O_2 = 60^\circ$$

$$3) S_{AOB} = OM \cdot \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot 40 \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 42$$

OM = r.  $5 \cdot AB = \sqrt{3} \cdot 21$

Ответ: 1) 5 см; 2)  $60^\circ$ ; 3)  $\frac{21\sqrt{3}}{5}$

7. Наша цель максимально минимизировать сумму, поэтому из 1-й группы выберем минимальные числа.

колонны

I	II	III	IV	V
1	2	3	4	5
41	42	43	44	45
81	82	83	84	85
121	122	123	124	125
161	162	163	164	165

$$35 = 5 \cdot 7$$

Обеспечим возможную делимость разницы на 5, но не допустим делимость на 7.

Для этого разнице между ~~указанными~~ <sup>числами</sup> под колонками должна быть равна 40n не ~~н~~.

Посчитаем сумму, она равна:

$$1+2+3+4+5 + 41+42+43+44+45 + 81+82+83+84+85 + 121+122+123+124+125 + 161+162+163+164+165 = 15+215+415+615+815 = 1875$$

Ответ: 1875

2

Знаем что  $y = \sin x + \cos x$  принимает максимальное значение при  $x = \frac{\pi}{4}$

$$-1 < (\sin x)^n < 1 \quad n = 2k+1$$

$$0 < (\sin x)^n < 1 \quad n = 2k$$

Рассмотрим  $x = \frac{\pi}{4}$ .

$$\sin 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4} \quad \sin^2 x = \frac{3}{4} \quad \sin^2 7x = \frac{3}{4}$$

$$g(x) = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - 3 = -5,25 \quad \text{Это и есть минимум ф-ции.}$$

Теперь рассмотрим максимум

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin 0 \cdot \sin 0 \neq \sin^2 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - \sin^2 \frac{4}{2}\pi - \cos^2 0 - 3 = -3 \quad \text{Answer: MAX} = -3; \text{MIN} = -5,25.$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1.$$

ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ x > -5 \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$$

$$x+5 \leq \sqrt{x+3}-x$$

при  $0 < \sqrt{x+3}-x < 1$

$$x > 3 \Rightarrow x+5 > 2, \text{ однако } 0 < \sqrt{x+3}-x < 1$$

поэтому это уравнение не имеет решений

$$\sqrt{x+3}-x > 1.$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x.$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

УПН:  $\begin{cases} x > -3 \\ x > 2,5 \end{cases}$

и

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3$$

$$\frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4} = -2,75$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0.$$

$$\Delta = 3.$$

$$\frac{-19+3}{8} = -2$$

$$x \in (-\infty; -2,75) \cup (-2; +\infty)$$

① "Укоротит" из УПН ( $x > -2,5$ ) остается ②

$$x \in (-2; +\infty)$$

Теперь определим его по ОДЗ

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ x > 0. \end{cases}$$

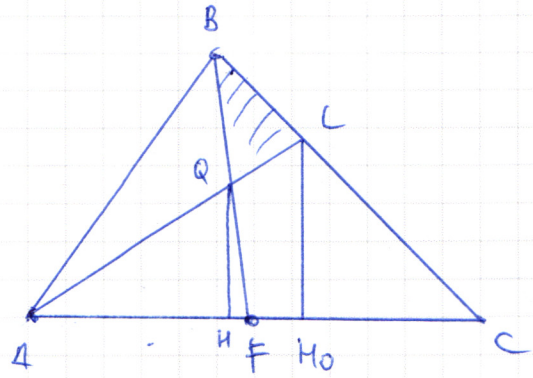
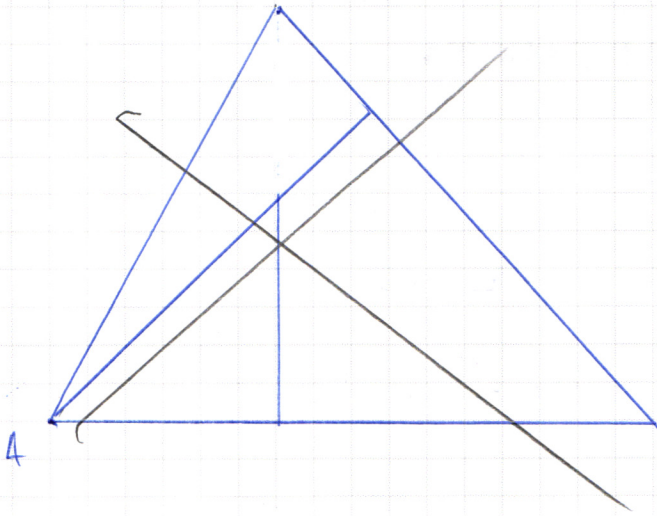
$$\sqrt{x+3} > x.$$

при  $-3 < x \leq 0$  ОДЗ не х

$$x \in \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right) \Rightarrow x \in \left( 0; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

Ответ:  $\left[ -2; \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$

Задача 6.



Пусть  $S_{BQL} = y$  тогда  $S_{ABC} = 10y$

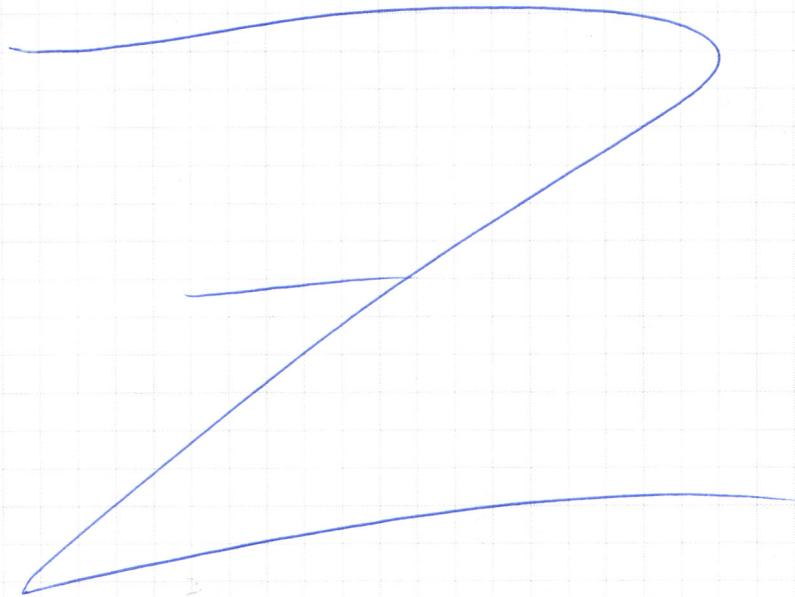
Пусть  $AF = 3x$ , тогда  $FC = 4x$ .

$$S_{AQF} = \frac{1}{2} QH \cdot 3x = \frac{27}{2} x$$

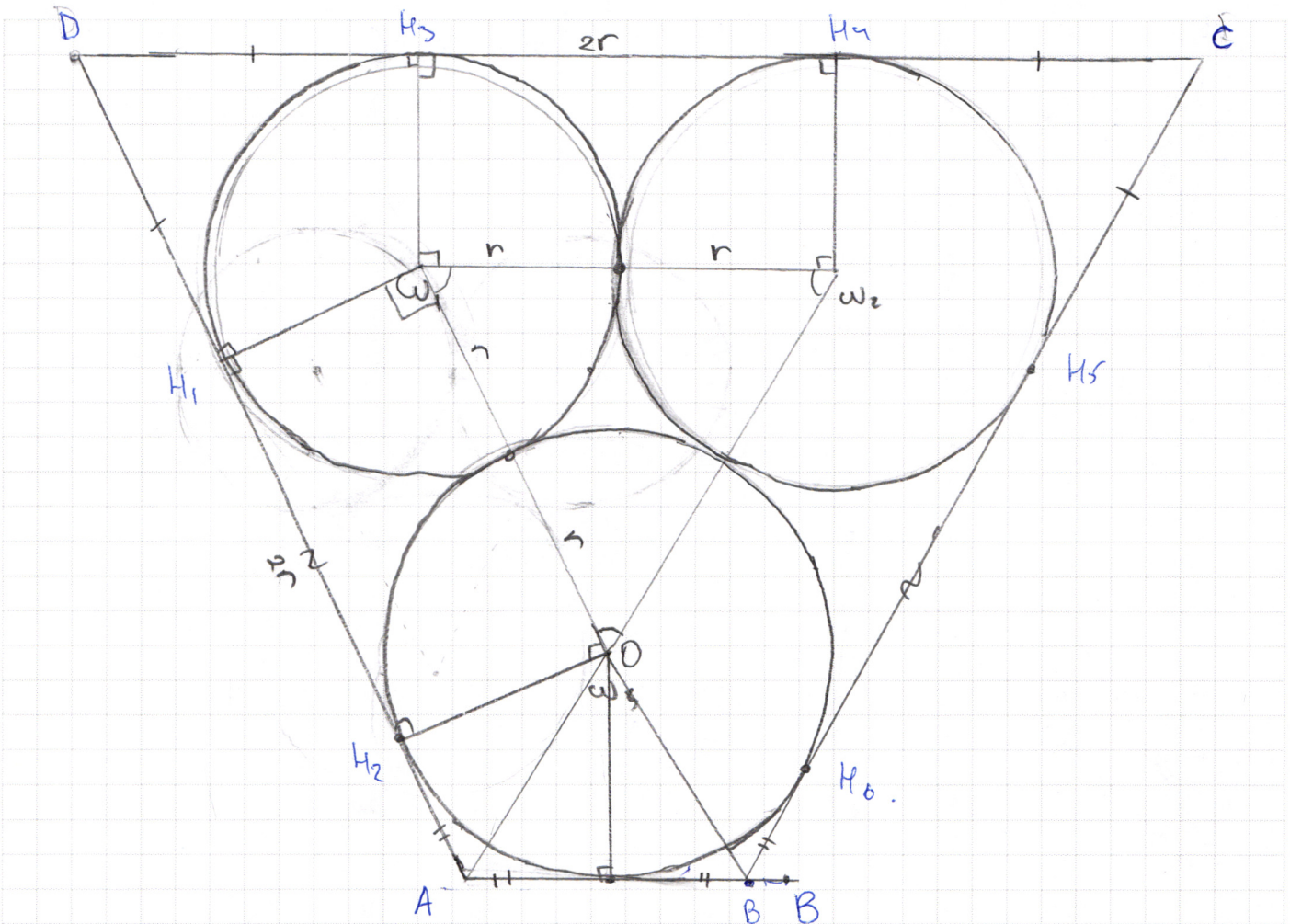
$$S_{ALC} = \frac{1}{2} CH_0 \cdot 7x = \frac{7}{2} x \cdot CH_0$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{3}{7} y$$

$$S_{\triangle BFC} = \frac{4}{7} y$$



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**



$$AD = DH_1 + H_1H_2 + H_2A = BC$$

$$AB = 2AH_2$$

$$DC = 2DH_3 + H_3H_4 = 2DH_3 + 2r$$

$$2AD - AB - DC = 10$$

$$2DH_1 + 2H_1H_2 + 2H_2A - 2AH_2 - 2DH_3 - H_3H_4 = 10$$

$$4r - 2r = 10$$

$$2r = 10$$

$$r = 5 \text{ см}$$

$$AO \cdot BO = 42 \quad AB = ?$$

$$\frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin \alpha = S_{AOB}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot r$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{42 \cdot \sqrt{3}}{42} = \frac{1}{2} AB \cdot 5$$

$$2\sqrt{3} = AB \cdot 5$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$AB = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

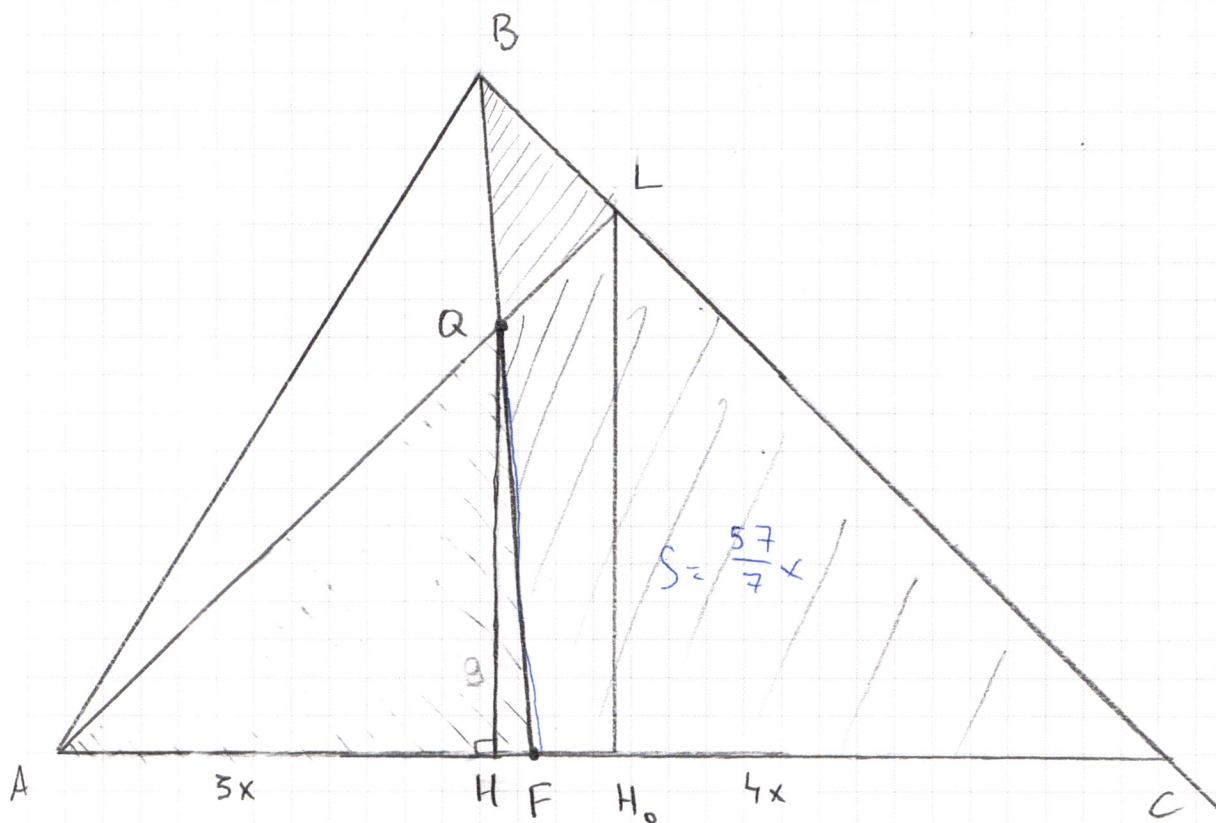


6.  $F \in AC$   
 $L \in BC$   $\triangle ABC$

$AF:FC = 3:4$

$BF \cap AL = Q$   $S_{BQL} : S_{ABC} = 1:16$

$L$  go  $AC = ?$   $Q$  go  $AC = ?$



$S_{AQF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3x = \frac{27}{2}x$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{9}{2H_0}$

$S_{QBL} = y$   $S_{ABC} = 16x$

$16:7$   
 $\frac{16}{7} \cdot 3$

$S_{ABF} = \frac{48}{7}x$

$\frac{112}{2} = 16$

$\frac{57}{7}x + \frac{3x \cdot 9}{2} = 7x \cdot \frac{1}{2} \cdot H_0$

$S_{BFC} = \frac{64}{7}x$

$\frac{57}{7} \cdot \frac{27}{2} = \frac{7}{2} \cdot H_0 \cdot 14$

$\frac{64}{7} - 7 = \frac{57}{7}$

$57 \cdot 2 + 27 \cdot 7 = 7 \cdot 7 \cdot H_0$

$\frac{168}{49} = H_0$

$16 \cdot 8 = 49 H_0 \cdot 114 + 54 = 49 H_0$

$\frac{24}{7} = H_0$

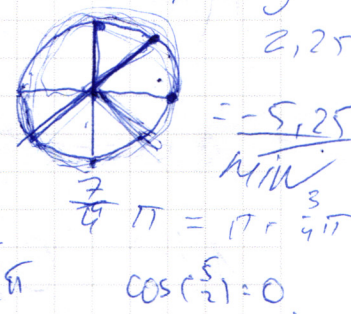
**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

~~MAX = -3~~  
 $\frac{MAX = -3}{5/4\pi}$   
 $9/4 = 20 + 1/4$

$-\frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - 3 =$   
 $= -3 - \frac{9}{4} = -3 - 2,25 =$   
 $= -5,25$   
 $\frac{3}{4}\pi = \pi - \frac{3}{4}\pi$   
 $\cos(\frac{5}{4}\pi) = 0$

⑤  $\log \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq \log \sqrt{x+3} - x$

$\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$   
 $\frac{3}{4} = \sin x \cdot \sin x$



ОДЗ:  
 $x+5 > 0$   
 $\sqrt{x+3} - x > 0$   
 $x > -3$   
 $x > -5$   
 $x > 3$   
 $\sqrt{x+3} > x$

$\sin x + \cos x = y$   
 $x = \frac{\pi}{4}$   
 $\sqrt{x+3} > x$   
 $x < 0$   
 $x$   
 $x+3 > x^2$   
 $x^2 - x - 3 < 0$   
 $D = 1 + 12 = 13$

$\sqrt{x+3} > x$   
 $x^2 - x - 3 < 0$   
 $D = 1 + 12 = 13$   
 $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$   
 $x < \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$   
 $x > \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$

$(x+5) \geq \sqrt{x+3} - x$

$0 < \sqrt{x+3} - x < 1$   
 $x+5 \leq \sqrt{x+3} - x$   
 $x > 5$   
 $x < 3$

ОДЗ:  $\sqrt{x+3} > 1+x$

$(x+5) \geq \sqrt{x+3} - x$   
 $2x+5 \geq \sqrt{x+3}$   
 $D = 1 + 4 \cdot 3 = 13$

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$   
 $x \geq -3$   
 $x \geq -2,5$

$(x+3) \leq 4x^2 + 20x + 25$   
 $4x^2 + 19x + 22 \geq 0$   
 $D = 19^2 - 16 \cdot 22$   
 $D = 9 \quad \sqrt{D} = 3$

$x_1 = -2$   
 $x_2 = -\frac{11}{4} = -2,75$

$x \in (-\infty; -2,75) \cup (-2; +\infty)$   
 по ОДЗ не прох.  
 $x \in (-2; +\infty)$

Ответ:  
 $(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

7.  $35 = 5 \cdot 7$

②  $\max \cos x = 1$

$y = 2\pi n / \pi + 2\pi n$

$0 = 0 - 0$

$\min \cos = -1$

$\sin 10\pi = 0$

$\sin 5\pi = 10\pi$



$18 - 6 - 1 - 1 = 10$

$12 \cdot 11 \cdot 2$

$= 12 \cdot 11 \cdot 2^{10}$

555555.....

$1(0) = C_{18-6}^1 = C_{12}^1 = 12$

$1(9) = C_{18-6-1}^1 = C_{11}^1 = 11$

9 555555  $\frac{5}{2}$

$1(0) = C_{11}^1$

$11 \cdot 2$

• Кол-во вариантов

$\frac{5-k}{11}$   
13

9 ... 555

$\frac{5}{2}$

$\frac{9}{27} = 11 \cdot 2^{10} \cdot 13$

$11 \cdot 13 \cdot 2^{10}$



$1-1-1-0-2$



④

1	2	3	4	5
41	42	43	44	45
86	87	88	89	90

35
70
105
140

15
+ 230
245
+ 645
890
+ 1260
2150
+ 815
2965

~~111 112 113 114 115~~

126 127 128 129 130

~~156 157 158 159 160~~

$\frac{160}{129} = 35$

$\frac{126}{89} = 44$

151 157 158 159 160

$3 \cdot 5 \cdot 10$   
 $1+2+3+4+5 = 15$

$83$   
 $4(1+2+3+4+5) = 215$

$126 \cdot 120$   
 $81+82+83+84+85 = 415$

6.15

815

1. 2 3 4 5

28  
4.7.10

41 42 43 44 45

~~111+112~~

81 82 83 84 85

~~112+112~~

$121+122+123+124+125 = 615$

121 122 123 124 125

$\neq 243 \quad 366 \quad 490$

161 162 163 164 165

$161+162+163+164+165 = 815$

черновик  чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

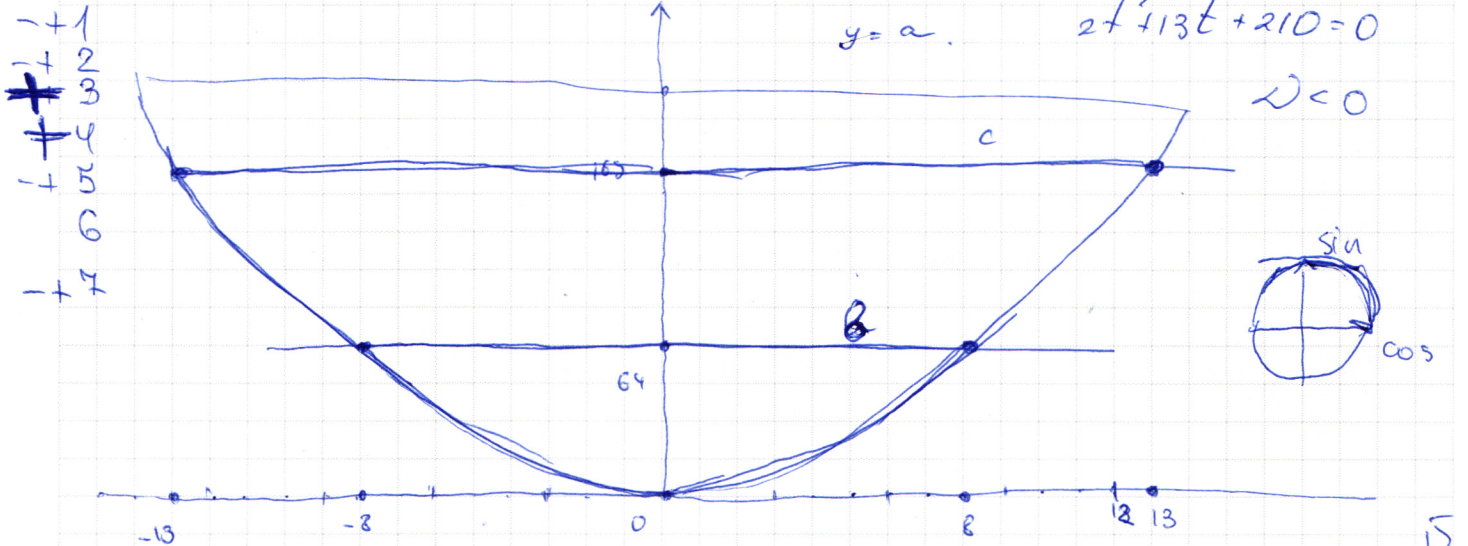
Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $y = x^2$      $y_1 = 169$      $y_2 = 64$      $y = a$

$676 + 49 \cdot 26\sqrt{a} = 756$   
 $4t^2 + 26t + 420 = 0$   
 $2t^2 + 13t + 210 = 0$   
 $D < 0$



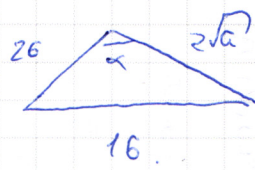
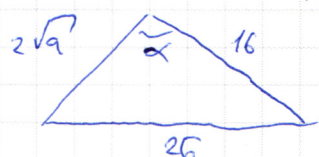
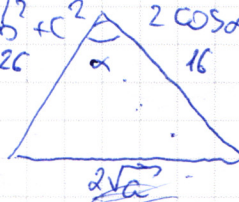
$x = \sqrt{a}$

$y = x^2$

$y = a$

$x = \sqrt{a}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$   
 $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha$



$B = 16$   
 $C = 26$

$S = -8$   
 $p = -105$

$d = 20$      $\cos 120 = -\frac{1}{2}$

По Т. косинусов  
 $26^2 = 32 \cdot 640$   
 $26^2 = (26+6) \cdot 20 + 36 = 676$   
 $16^2 = 256$

$676 + 256 + 20 \cdot 8 = 4a$   
 $a = 169 + 64 + 52$

①  $a_1 = 285$

②  $256 + 4a + 16\sqrt{a} = 676$   
 $4a + 16\sqrt{a} = 420$   
 $a + 4\sqrt{a} = 105$   
 $t^2 + 4t - 105 = 0$

$\sqrt{a} = t$

$S = -4$   
 $p = -105$

- ①  $26^2 + 16^2 + 8 - 26 = 4a$  ✓
- ②  $16^2 + 4a + 8 - 2\sqrt{a} = 26^2$  ✓
- ③  $26^2 + 4a + 13 \cdot 2\sqrt{a} = 16^2$  ✗

$D = 16 + 4 \cdot 105 = 436$   
 $\sqrt{436} = 2\sqrt{109}$

$\frac{-4 \pm 2\sqrt{109}}{2} = \sqrt{109} - 2 = a$

③ 18-значные числа.

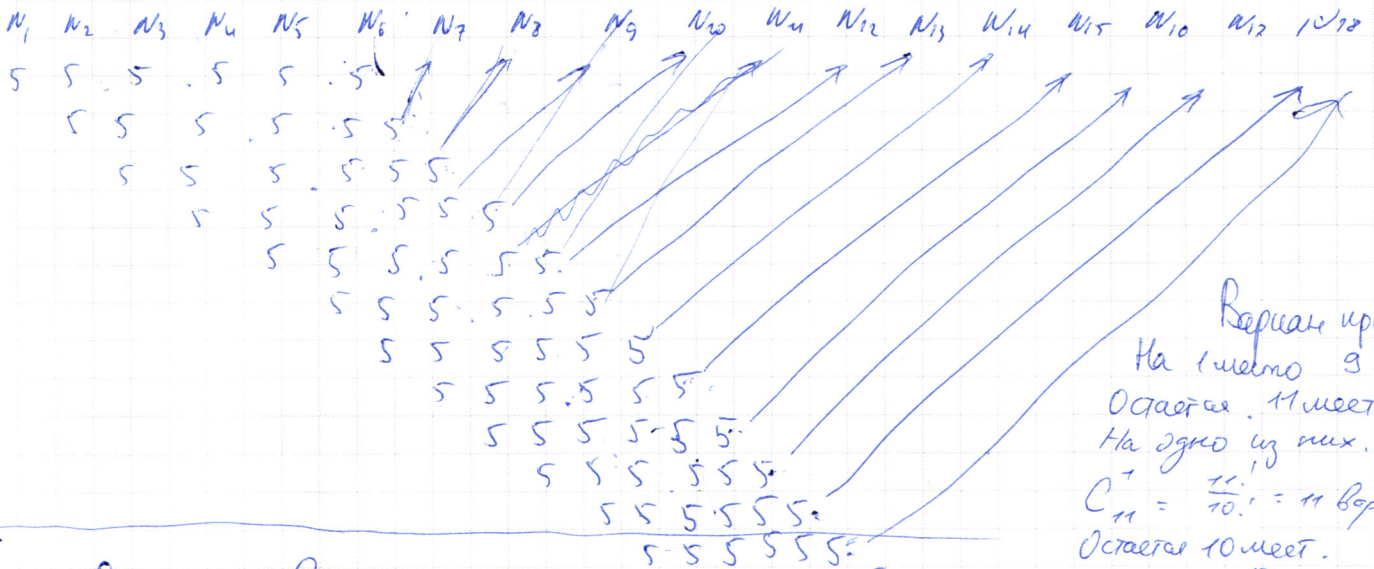
$C_{18}^5$  - способов расставить

555|555

На первом месте только 9, прочие любые  
555 555 . . . . .

$9 \cdot 0_{/9} \cdot 0_{/9} \cdot 0_{/9} \cdot 555 \cdot 555 \cdot 0_{/9} \cdot 0_{/9}$

$N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6 \quad N_7 \quad N_8 \quad N_9 \quad N_{10} \quad N_{11} \quad N_{12} \quad N_{13} \quad N_{14} \quad N_{15} \quad N_{16} \quad N_{17} \quad N_{18}$



Варианты кроме 1-го  
На 1 место 9.  
Остается 11 мест.  
На одно из них 0.  
 $C_{11}^1 = \frac{11!}{10!} = 11$  вариантов.  
Остается 10 мест.  
Значит +  $2^{10}$   
Итого вариантов не учитывая 1-й вариант.

$13 \cdot 11 \cdot 2^{10}$

~~13 вариантов~~ 13 вариантов расстановки  
555 555

	$N_1$	$N_2$	$N_3$	$N_4$	$N_5$	$N_6$	$N_7$	$N_8$	$N_9$	$N_{10}$	$N_{11}$	$N_{12}$	$N_{13}$	$N_{14}$	$N_{15}$	$N_{16}$	$N_{17}$	$N_{18}$	
1	5	5	5	5	5	5													1
2		5	5	5	5	5	5												2
3			5	5	5	5	5	5											3
4				5	5	5	5	5	5										4
5					5	5	5	5	5	5									5
6						5	5	5	5	5	5								6
7							5	5	5	5	5	5							7
8								5	5	5	5	5	5						8
9									5	5	5	5	5	5					9
10										5	5	5	5	5	5				10
11											5	5	5	5	5	5			11
12												5	5	5	5	5	5	5	12
													5	5	5	5	5	5	13

$15 \cdot 11 = 150 + 15 = 165$

Всего:  $2^{10} (13 \cdot 11 + 12 \cdot 11) =$

$= 165 \cdot 2^{10}$