МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 11-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

[1, 2, 3, ..., 45], [46, 47, ..., 90], ———, [136, ..., 180] множества.

У каждого числа ест ~~(место)~~ позиция в которой она находится. Example: 1 – наход в I-ом места
2 – наход, во II-ом места
46, 91, 136 налод. в I-ых мест
47, 92, 182 наход во II-ых мес.
и т.д.

[1, 2, 3, ..., 45], [45+1, 45+2, 45+3, ..., 45+45],
[90+1, 90+2, ..., 90+45], ———, [180+1, 180+2, ..., 180+45]

т.е. если выберем 2 числа из разных множеств, но стоящих в одинаковых позициях то их разность делится на 45, т.к. в k-том позиции стоят числа k, 45+k, 90+k, 135+k, 180+k. разности любых двух ⋮45, поэтому у 30-ти выбранных чисел разные позиции. т.к. минимальные числа наход. с 1-ой позиции ~~по~~ 30-ой позиции, то позиции всех 30-ти чисел должны быть 1, 2, ..., 30 если позиция какого-то числа больше 30, => какая-то позиция меньше 30 свободно, т.е не выбрали чисел из этой позиции, то мы заменяем это число с позицией выше 30 из какого-то множество, на число ~~без~~ этой же

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$;

1) $0<\sqrt{x+7}-x<1$ $\quad x\geq -7$

$\sqrt{x+7}-x>0$, $\sqrt{x+7}>x$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$ $\quad D=29$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x<1$

$x+7<1+2x+x^2$

$x^2+x-6>0$

$D=25$

$x\in(-7;-3)\cup(2;+\infty)$

$x\in\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};2\right)$

$\sqrt{x+7}-x\geq x+4$

$\sqrt{x+7}\geq 2x+4$

$x+7\geq 4x^2+16+16x$

$4x^2+15x+9\leq 0$

$D=99$

$x_1=\frac{-15+\sqrt{99}}{8}$; $x_2=\frac{-15-\sqrt{99}}{8}$

$x\in\left(\frac{-15-\sqrt{99}}{8};\frac{-15+\sqrt{99}}{8}\right)$

не имеют пересечения

$x\neq 2$ т.к. $\sqrt{x+7}-x=1$ $\quad x+4=6$ $\quad\varnothing$

2) $\sqrt{x+7}-x>1$

$\sqrt{x+7}>1+x$

$x+7>1+2x+x^2$

$x^2+x-6<0$ $\quad D=25$

$x\in(-3;2)$

$\sqrt{x+7}-x\leq x+4$

$0\leq\sqrt{x+7}\leq 2x+4$ $\quad 2x+4\geq 0$, $x\geq -2$

$x+7\leq 4x^2+16x+16$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=99$

$x_1=\frac{-15-\sqrt{99}}{8}$; $x_2=\frac{-15+\sqrt{99}}{8}$

$x\geq -2$

$x\in\left(-\infty;\frac{-15-\sqrt{99}}{8}\right)\cup\left(\frac{-15+\sqrt{99}}{8};+\infty\right)$

$x\geq -2$

$x\in\left(\frac{-15+\sqrt{99}}{8};2\right)$

Ответ: ↗

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) множество который стоит в позиции меньшее 30 которая свободна. т.к. в одном и том же множ. если позиция числа больше то само число больше, т.е. сумма будет минимальнее. т.е. нужно выбрать 30 чисел ~~[illegible]~~ из разных множеств позиции которых с 1 по 30 ~~[illegible]~~. Нужно выбрать какое-то число стояще в 1 позиции эти числа $1, 45+1, 90+1, \ldots, 180+1$ чтобы сумма была минималь. нужно выбрать минимальное из этих т.е. 1, аналогично другие числа, мы выберем 1, 2, 3, 4, 5, 6 из 1 множество, т.к. с каждой множествы нужно выбрат по 6 чисел. ~~[illegible] котор~~

какое-то число ~~[illegible]~~ из выбранних стоит в 7 позиции это число одно из

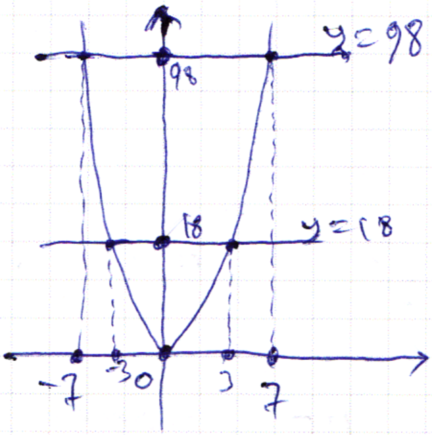
$45+7, 90+7, 135+7, 180+7$, чтобы было минималь выберем min из этих чисел т.е. $45+7$, аналогично другие числа, а все числа будут

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 45+7, 45+8, \ldots, 45+12, 90+13, 90+14, \ldots, 90+18,$
$135+19, \ldots, 135+24, 180+25, \ldots, 180+30,$

$$\sum = 1+2+3+\ldots+6+45+7+\ldots+45+12+\ldots+180+30 =$$
$$= (1+2+3+\ldots+30) + 6(45+90+135+180) = 31\cdot 15 +$$
$$+ 6\cdot 450 = 3165.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



1) $2x^2=98$

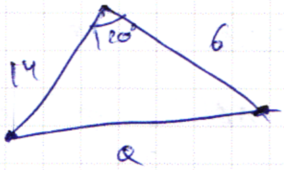
$x=\pm 7$

2) $2x^2=18$

$x=\pm 3$

Длины двух отрезков будут 14 и 6, а третья a;

1)



$a^2=14^2+6^2-2\cdot14\cdot6\cdot\cos120^\circ=$

$=196+36+84=316=a^2$

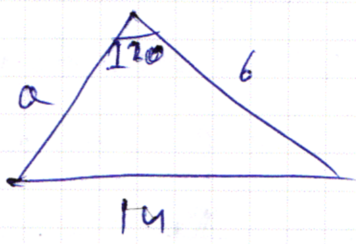
$a=\sqrt{316}$

$14+6>\sqrt{316}$

$14+\sqrt{316}>6$

$\sqrt{316}+6>14$

2)



$14^2=a^2+6^2-2\cdot a\cdot6\cdot\cos120=$

$=a^2+36+6a$

$a^2+6a-160=0$

$D=676=26^2$

$a_1=\frac{-6+26}{2}=10$;

$a_2=\frac{-6-26}{2}$ н.к. т.к. $a>0$

$14+10>6$

$14+6>10$

$10+6>14$

$\boxed{\text{Ответ: } a=10,\ a=\sqrt{316}}$

3) когда против угла 120° лежит отрезок длиной 6 получается противоречие, т.к. против большего угла лежит большая сторона $14>6$.

№3

Назовём 7 подряд идущих восьмерок группой. У этой группы 11 мест в которой может она находится в записи ~~числа~~ 17-знач. числа

1) $\underbrace{8 \ldots 8}_{гр}$ - - - - - - - - - -

2) - $\overbrace{8 \ldots 8}^{гр}$ - - - - - - - - -

3) - - $\underbrace{8 \ldots 8}_{гр}$ - - - - - - - -

и т.д. , т.е. всего 11 случаев.

В ~~каждом случае~~ первом по правилу произведения $\underbrace{88 \ldots 8}_{гр}\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2}$ 2^{10} чисел состоящих и группы и 7, 0 , ~~все~~. и т.к. каждая цифра встречает. хотя бы 1 раз то вычтем из 2^{10} случаи когда все остальные цифры 0 или 7 ; т.е. в этом случае ~~ответ~~ $2^{10}-2$.

В остальных случаях первая цифра не может быть равной 0 , т.е. она равно 7. В остальн. случаях $\underbrace{7\,-\,-}_{2\,2}1\,88 \ldots 8\,1\underbrace{-\,-\,-\,-\,-\,-\,-}_{2\,2\,2\,2\,2\,2\,2}$ по правилу произведения всего 2^9 случаев , и случай когда все цифры 7 мы вычтем т.е. 2^9-1

Т.е. ответ: $10(2^9-1)+2^{10}-2 = 5\cdot 2^{10}-10+2^{10}-2 =$

$= 6(2^{10}-2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-001
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle BLQ = x$

$\frac{S_{BQC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$ $S_{BQC} = \frac{BL \cdot LQ \cdot \sin x}{\cancel{\ldots}2}$;

$S_{ABC} = \frac{AL \cdot BL \cdot \sin x}{2} + \frac{AL \cdot LC \cdot \sin(\pi - x)}{2} =$

$= \frac{AL \cdot BC \cdot \sin x}{2}$;

$\frac{BL}{BC} \cdot \frac{LQ}{AL} = \frac{5}{12}$

$\cancel{\frac{LQ}{AL}} =$ $\frac{AQ}{AL} = \frac{6}{25}$ $\frac{AL - AQ}{AL} = 1 - \frac{6}{25} =$

$= \frac{25-6}{25} = \frac{LQ}{AL}$

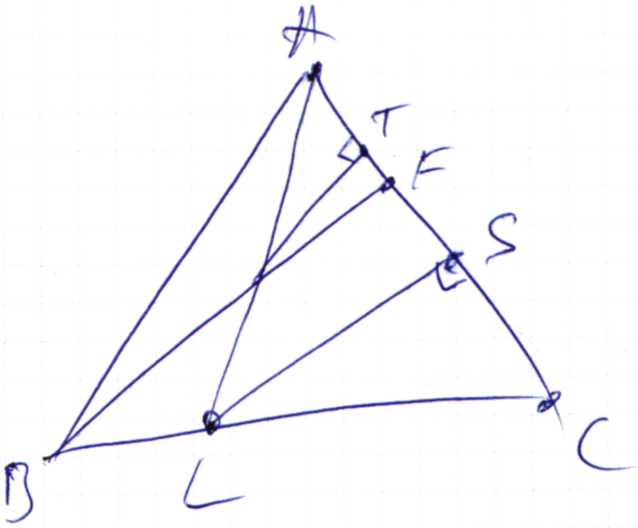
$\frac{2}{5}$

$\frac{5}{11}$

$\frac{BL}{BC} = \cancel{2}$ $\frac{AQ}{QL} = \frac{AF}{FC} \cdot \left(\frac{CB}{LB}\right)$ Менелай

$\frac{BL}{BC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{QL}{AQ}$ $\frac{QL}{AQ} =$

$\frac{AQ}{AQ+QL} = \frac{6}{25}$


A
T
F
S
B
L
C

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

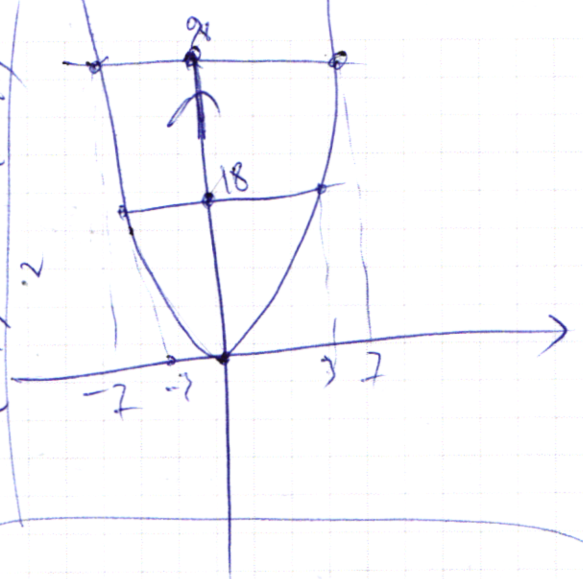
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-001

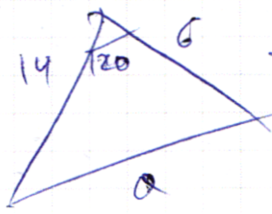
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

1) 

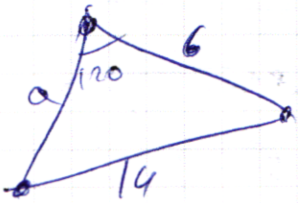
$a^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120$

$a^2 = 316$

$a = \sqrt{316}$

$\begin{array}{r} 196 \\ -16 \end{array}$

$\sqrt{316}$

2) 

$14^2 = a^2 + 36 + 6 \cdot a$

$160 = a^2 + 6a$

$a^2 + 6a - 160 = 0$

$D = 36 + 400 + 240 = 676$

$640 + 36 = 676$

$\frac{-6 \pm \sqrt{676}}{2}$

$\frac{\sqrt{676} - 6}{2}$

$676 / 4 = 169$

$\sqrt{169} - 3$

16

$\sqrt{4 \cdot 169}$

$2 \cdot 13$

[1]

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 \cdot 2$

$\frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 \cdot 2$

$\cos 4x - \cos 10x + 2\cos^2 5x + 2\cos^2 x + 6 = \cos^2 2x - \sin^2 2x -$

$- \cos^2 5x + \sin^2 5x + 2\cos^2 5x + 2\cos^2 x + 6$

$\cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x + 1 + 2\cos^2 x + 6$

$2(\sin x - \cos x)^2 - 2\sin^2 x + \cos^2 2x + 7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$~~

$0, 2, 8$

8 $2\ 2$ 2

$\sqrt{7-x} > -x$

$2^{10} \cdot 11 - (1+1)\cdot 11$

$\sqrt{7-x} > -x$

1 $2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$

$\left(\frac{+1-\sqrt{29}}{2}; 2\right)$

$(x^2+x+7)^2 > 4x^2(x+7)$ $2^9 - 1$

$9-k$

k

$7\ 2$ $2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2$

$x \neq 2$

~~$x+7+x^2-2x\sqrt{x+7} > 0$~~

$0:\ \sqrt{x+7} \le 2x+4$

$x \ge -4$

$2^9 - 1$

$2^2 \cdot 2^{9-k}$

$x \ge -2$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \ge 1;$

$x > -7$

$\sqrt{8}$

$x \ge 1$

$\approx 5,7$

$x > -4$

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x \in \left(-4; \frac{1+\sqrt{29}}{}\right.$

$\sqrt{x+7} > x$

x

$x+7 > x^2$ $(x+7)+x^2-2x\sqrt{x+7}$ $\sqrt{x+7} - x \le x+4$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} > -6$

$x^2 - x - 7 < 0$

$D = 1+28 = 29$

$\sqrt{x+7} < 1+x$

$7 > \sqrt{29}$

$\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$x+6 < x + 2x + x^2$

$x^2 + x - 6 > 0$

$\left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\begin{array}{r} 10 \\ \times 10 \\ \hline 25 \end{array}$

$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 225 \end{array}$

$x+7 \le 4x^2+16x+16$

$D = 1+24 = 25$

$\frac{-1 \pm 5}{2};$

2

$4x^2+15x+9 \ge 0$

$D = 225 - 126 = 99$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

1 1

-3

$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 126 \end{array}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)