

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

11-022

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

Для начала найдем где стороны треугольника

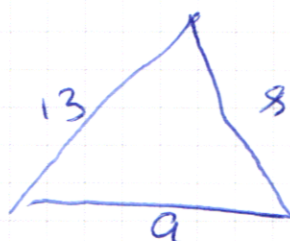
$$y = x^3$$

1) $169 = x^2$

$x = 13$

2) $64 = x^2$

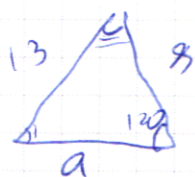
$x = 8$



Т.к. мы не знаем какой-
из углов ради 120° то
рассмотрим все 3 случая:

• первые два случая не подходят (действия
выполнены в черновиках):

3 случая будет:



$$169 = a^2 + 64 - 2 \cdot 8 \cdot a \cdot \cos(120)$$

$$169 = a^2 + 64 + 8a$$

$$a = 7$$

Ответ: При $a = 7$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Запишем минимальные возможные цифры; разность $2x$ которых не делится на 35:

1, 2, 3, 4, 5, 41, 42, 43, 44, 45, 81, 82, 83, 84, 85,
121, 122, 123, 124, 125, 161, 162, 163, 164, 165.

Найдем сумму: $(1+2+3+4+5) \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 80 \cdot 5 + 120 \cdot 5 + 160 \cdot 5 = 75 + 200(1+2+3+4) = 2075$

Ответ: 2075

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3}-x \geq 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \geq 5 \\ x+5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ \times 22 \\ \hline 22 \\ 44 \\ \hline 22 \\ \hline 44 \\ \hline 88 \\ \hline 110 \\ \hline 220 \\ \hline 440 \\ \hline 880 \\ \hline 1760 \end{array}$$

$$x+3 \geq x^2+2x+1$$

$$4x^2+20x+25 \geq x+3 =$$

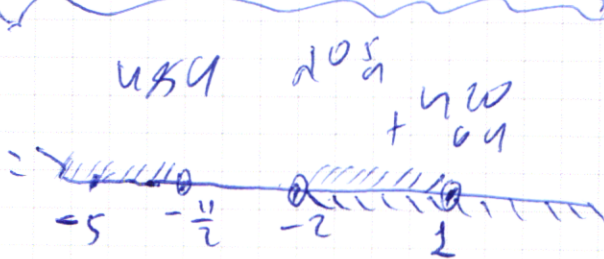
$$x \geq -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1) \leq 0 \\ (x+2)(x+\frac{11}{4}) \geq 0 \end{cases}$$

$$1) \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -2 \quad 1 \quad 15 \\ \hline x \in [-2; 1] \end{array}$$

~~2) $\begin{cases} 0 \leq \sqrt{x+3} \leq 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$~~

$$2) \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -\frac{11}{4} \quad -2 \\ \hline x \in [-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2; +\infty] \end{array}$$



$$\begin{array}{r} + 170 \\ + 69 \\ \hline 239 \end{array}$$

$$233$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ \times 33 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\Rightarrow x \in [-2; 1] + \frac{233}{104}$$

$$2) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{x+3} - x \leq 1 \\ (x+5) \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \sqrt{x+3} - x \geq 0$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

$$\textcircled{2} \sqrt{x+3} - x \leq 1$$

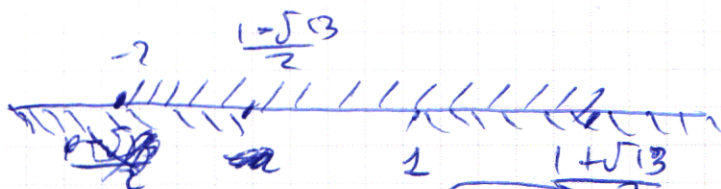
$$x+3 \leq x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x + 2 \geq 0$$

$$x_{1,2} = 1, -2;$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -2 \quad 0 \quad 1 \end{array}$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$



$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}; 1 \right) \cup \left(1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

$$x \in \left[1; \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \right]$$

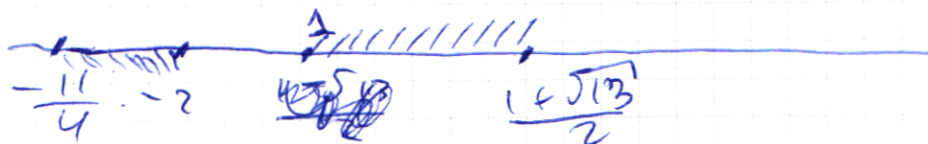
$$\textcircled{3} (x+5) \leq \sqrt{x+3} - x$$

$$(x+2) \left(x + \frac{11}{4}\right) \leq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -\frac{11}{4} \quad -2 \end{array}$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{11}{4}\right) \cup \left(-2; +\infty\right)$$

$$x \in \left(-\frac{11}{4}; -2\right)$$



Нет решений. (общих корней)

$$\text{Ответ: } x \in \left[-2; 1 \right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\delta + c - (A + d) = 10$$

$$a = d \quad a = d$$

$$b = 2d \quad d = 2r$$

$$\delta = 2d$$

$$2d + c - (d + x)$$

$$2x + c - (d + x) = 10$$

$$3d$$

$$2d + c - 3d = 10$$

$$5d - 2d = 10$$

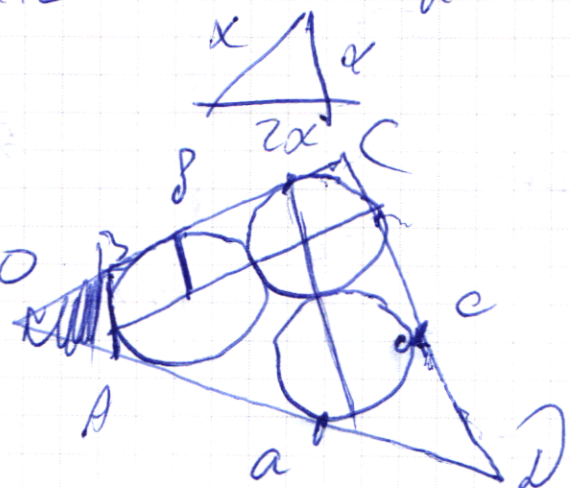
$$3d = 10$$

$$d = \frac{10}{3}$$

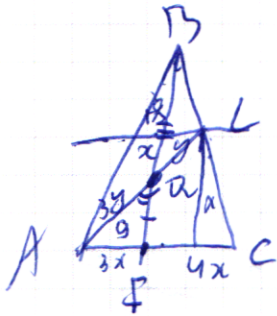
$$r = \frac{5}{3}$$

$$\delta = 2r$$

$$d = r$$



$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \gg 1$$



$$\frac{h-3x}{2} = g$$

$$227$$

$$h_{\text{нов}} = 27$$

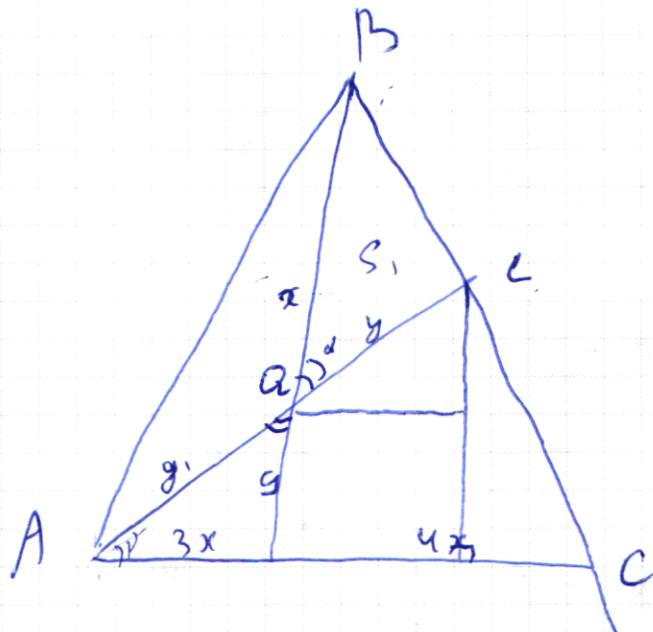
$$h-3x = g$$

$$\frac{27-7x}{2}$$

$$\frac{g}{x} = \frac{3y}{y}$$

$$\frac{3}{x} = 3$$

$$x = 1$$



175

35

70

105

140

$$\begin{array}{r} 121 \\ + 35 \\ \hline 156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ + 35 \\ \hline 155 \end{array}$$

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 35 \\ \hline 116 \end{array}$$

35,34

5 0

180

116

120

13

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 35 \\ \hline 116 \end{array}$$

xx

555555

12346

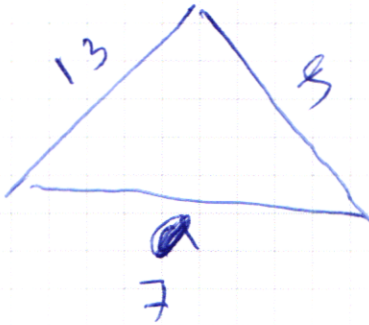
17345 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 7122374

7677787980

75

12345 41 42 43 44 45 81828384 85

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$-\frac{1}{2}$$

$$a^2 = 169 + 64 - 2 \cdot 13 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 = 169 + 64 + 13 \cdot 8$$

$$169 = a^2 + 64 + 2 \cdot 8 \cdot a$$

$$a^2 + 8a = 105$$

$$D = 22$$

$$a = \frac{-8 \pm 22}{2} = 7$$

$$169 = 49 + 64 + 8 \cdot 7$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 81
- 82
- 83
- 84
- 85
- 121
- 122
- 123
- 124
- 125
- 161
- 162
- 163
- 164
- 165

$$(1+2+3+4+5) \cdot 5 = 75$$

$$40 \cdot 5 + 80 \cdot 5 + 120 \cdot 5 + 160 \cdot 5$$

$$10(4)$$

$$50(4 + 8 + 12 + 16) =$$

$$100(2 + \dots)$$

$$200(1 + 2 + 3 + 4) =$$

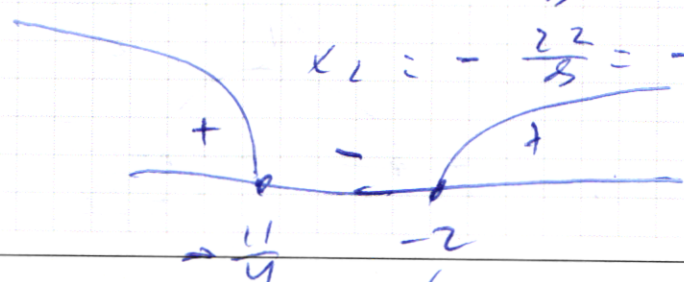
$$= 2000 \quad \text{2075}$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-19 + 3}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19 - 3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$$



$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 23 \\ \hline 48 \\ 32 \\ \hline 368 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 92 \\ \hline 46 \\ 188 \\ \hline 2116 \end{array} \quad \begin{array}{r} 361 \\ - 288 \\ \hline 73 \end{array}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3} - x \geq 1 \\ (x+5) \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 92 \\ \hline 46 \\ 188 \\ \hline 2116 \end{array} \quad \begin{array}{r} 23 \\ \times 92 \\ \hline 46 \\ 188 \\ \hline 2116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ 171 \\ \hline 361 \end{array}$$

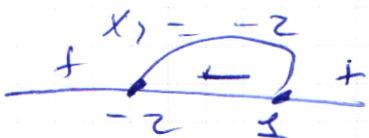
$$x+3 \geq 1+2x+x^2$$

$$1 - \sqrt{13} \leq x \leq 1 + \sqrt{13}$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$



$$x \in [-2; 1]$$

1300

35

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

-19

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{x+3} - x \leq 1 \\ (x+5) \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$x \leq \sqrt{x+3} \leq 1+x$$

$$x^2 \leq x+3 \leq x^2+2x+1$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq 0$$

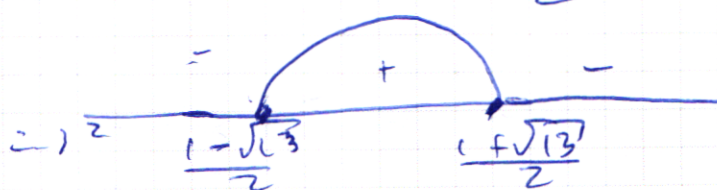
$$x+3 \geq x^2$$

$$-x^2 + x + 3 \geq 0$$

$$x^2 - x - 3 \leq 0$$

$$D = 1 + 12 = \sqrt{13}$$

$$x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 4 \\ \hline 88 \\ \times 4 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 361 \\ - 352 \\ \hline 9 \end{array}$$