МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 5-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Найдём длины этих прямых

(1) $2x^2 = 98$; $x = \pm 7$; $L_1 = 14$

(2) $2x^2 = 18$; $x = \pm 3$; $L_2 = 6$

(3) $2x^2 = a$; $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}$; $L_3 = 2\cdot\sqrt{\frac{a}{2}}$

Существенны два случая: 1) либо $L_3 > L_1$

2) либо $L_3 < L_1$,

т.к., из теор. sin, определяет, что большая сторона лежит против угла в 120°, что в свою очередь нужно для теор. cos.

1. случ. Предположим, что $L_3 > L_1$

Запишем теор. cos: $L_3^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2\cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos 120^\circ$

$2a = 196 + 36 + 84$; $2a = 316$; $a = 158$

$L_3 = 2\cdot\sqrt{79}$ $\qquad 2\cdot 8 < 2\cdot\sqrt{79} < 2\cdot 9$

$16 < L_3 < 18$, получаем, что: $\begin{cases} L_3 + L_2 > L_1 \\ L_1 + L_2 > L_3 \\ L_3 + L_1 > L_2 \end{cases}$ => треуг. построен

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

2. случ. , предположим, что $L_1 > L_3$

тогда, по теор. cos:

$$L_1^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \cos 120^\circ$$

$$L_1^2 = L_2^2 + L_3^2 + L_2 \cdot L_3$$

$$196 = 36 + 2a + 6 \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$\cancel{a + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{a}}$ $\quad 2a + 6 \cdot \sqrt{2a} - 160 = 0$

Замена $t = \sqrt{2a}$, $t \geq 0$

$t^2 + 6t - 160 = 0$, $t = -16$; $t = 10$

не подходит

$\sqrt{2a} = 10$; $2a = 100$; $a = 50$

$L_3 = 2 \cdot 5 = 10$;
$$\begin{cases} L_3 + L_1 > L_2 \\ L_2 + L_3 > L_1 \\ L_2 + L_1 > L_3 \end{cases} \Rightarrow \text{треуг. сущ.}$$

Ответ: при $a = 50$, 158

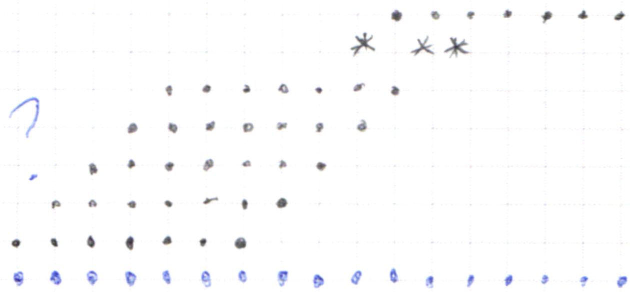
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

N - ?



Рассмотрим ситуацию, когда 1 "8" стоит в начале;

Остальные цифры могут принимать значения "0" и "7"; 2^{10} - возможных чисел; но нельзя чтоб были все "0" или "7".

$N_x = 2^{10} - 2$; Когда мы смещаем 1 "8" на 1 цифру вправо, снова появляется $N_x = 2^{10} - 2$ возможных чисел

$$N = 10 N_x = 10 \cdot (2^{10} - 2) = 10220$$

Ответ: $N = 10220$

№ 2

g_{min} - ? и g_{max} - ?

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - 2\cdot\cos^2 5x + 1) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

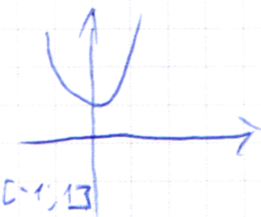
$$g(x) = \frac{1}{2}(2\cdot\cos^2 2x - 2\cdot\cos^2 5x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4$$

$$g(x) = \frac{2\cdot\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2}$$

$$g_{max} = \frac{2\cdot 1 + 1 + 7}{2} = 5 \quad (\cos 2x = 1)$$

$$g(x) = \cos^2 2x + \frac{1}{2}\cdot\cos 2x + \frac{7}{2} = t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{7}{2},$$



$t \in [-1;1]$

g_{min}, достиг в $x_в = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$g_{min} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2}$; $g_{min} = \frac{55}{16}$ $(\cos 2x = -\frac{1}{4}$

Ответ: $g_{min} = \frac{55}{16}$, $g_{max} = 5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тут возможно два случая:

1. $x+4=0$; $\sqrt{x+7}-x=0$ => $x=-4$, но тогда $\sqrt{x+7}-x=\sqrt{3}+4$

2. $x+4=1$; $\sqrt{x+7}-x=1$ => $x=-3$, но тогда $\sqrt{x+7}-x=5$

Получается, что нет реш.

Ответ: нет решений

№ 7

Смысл заключается в том, что разность первого нужного числа из "нового" списка с последним нужным числом из прошлого списка не делилась на 45, а так ищем минимальные элементы в списках. Разность последнего нужного элемента из послед. списка с первым нужным элементом из первого списка, тоже не будет ⋮ 45, т.к. $5 \cdot 6 = 30 < 45$ - (не успеет стать), из первого: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; из второго $n+1$ 52, 53, 54, 55, 56, 57 и т. д. ; ~~6~~ ...

☐ черновик ☒ чистовик

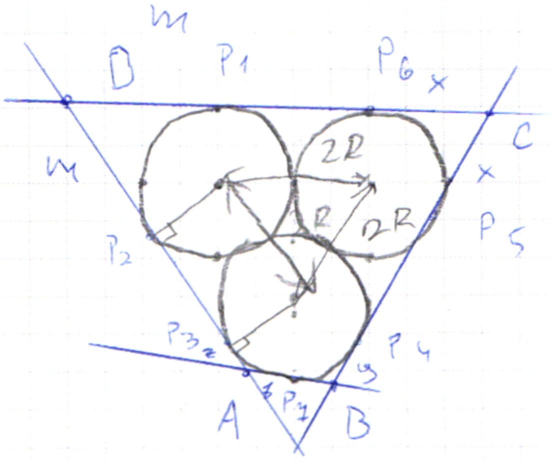
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~8~~

(Нумеровать только чистовики)

№4

а)



по свойству отрезков касательных

$CP_6 = CP_5 = x$

$DP_1 = DP_2 = m$;

$AP_3 = AP_7 = z$; $BP_7 = BP_4 = y$; т.к. окружности одинакового радиуса и опущенные радиусы к ~~нерпен.~~ касательным, перпендикулярны им, то $P_2P_3 = P_4P_5 = P_6P_1 = 2R$

$AD + BC - AB - CD = 12$

Перепишем в виде: $\cancel{m} + \cancel{z} + 2R + \cancel{y} + \cancel{x} + \cancel{2R} =$

$= 12 + \cancel{z} + \cancel{y} + \cancel{m} + \cancel{x} + \cancel{2R}$; $2R = 12$; $R = 6$

Ответ: $R = 6$

~~№5~~

~~$\log_{\sqrt{x+4} - x} (x+4) \geq 1$~~

~~Перепишем в виде: $(\sqrt{x+4} - x)^n = (x+4)$, где~~

~~$n \in [1; +\infty)$~~

☐ черновик ☑ чистовик Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

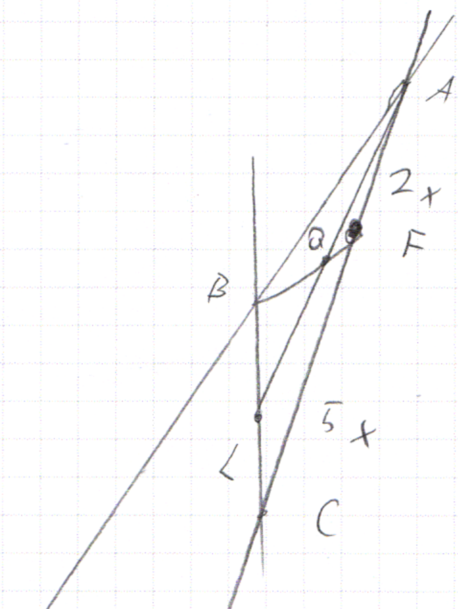
1. случ. $x=-4$

$(\sqrt{3}+4)^4=0$, неверно

2. случ. $x=-3$

$(\sqrt{4}$

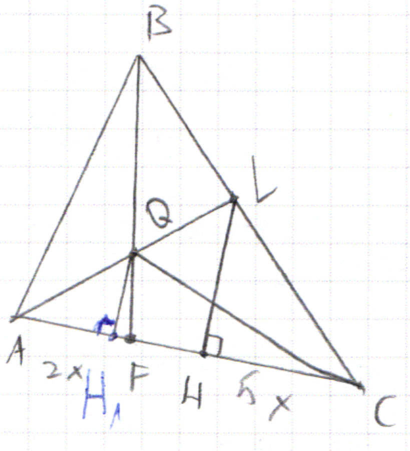
№6



$S_{BQL} : S_{BAC} = 5:12$

LH -?

$QH_1 = 6$



$S_{AQF} = \frac{1}{2} \cdot QH_1 \cdot 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 7 $N = 45$

$[1; 45]$; ~~[~~ 4 /

~~Из пром. [1; 225]~~ 30 штук

~~a-b ; 45~~

Пред. ситуация: разность первого из нового списка с последним из старого 46+5+1 того 45 не делилось на 45

Из первого пром.: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Из второго: 52, 53, 54, 55, 56, 57

~~91~~

~~54+6~~ ~~91+6~~

$$\begin{array}{r} 109 \\ + 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 310 \\ + 290 \\ \hline 600 \\ + 380 \\ \hline 980 \\ + 3 \\ \hline 983 \end{array}$$

~~91 − 57 = 44 34~~

Из третьего: 97, 98, 99, 100, 101, 102

Из четвёртого: 142, 143, 144, 145, 146, 147

Из 5-ого: 187, 188, 189, 190, 191, 192

$S = 7 \cdot 3 + 109 \cdot 3 + 199 \cdot 3 + 289 \cdot 3 +$

$+ 379 \cdot 3 = 3 \cdot (7 + 109 + 199 + 289 + 379) = 3 \cdot 983$

Ответ: $S_{min} = 3 \cdot 983$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+y)^2 = R$

$AO \cdot OB = 58$; $AB - ?$

$(36+y^2)(36+z^2) = 58^2$

$DA = 2R + p + z$

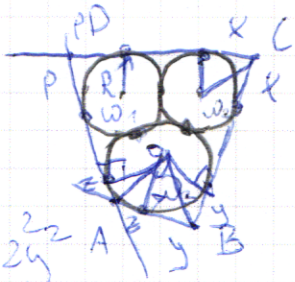
$AD + BC - AB - CD = 12$

$DC = p + x + 2R$

$CB = x + y + 2R$

$36 \cdot 36 + 36y^2 + 2y^2$

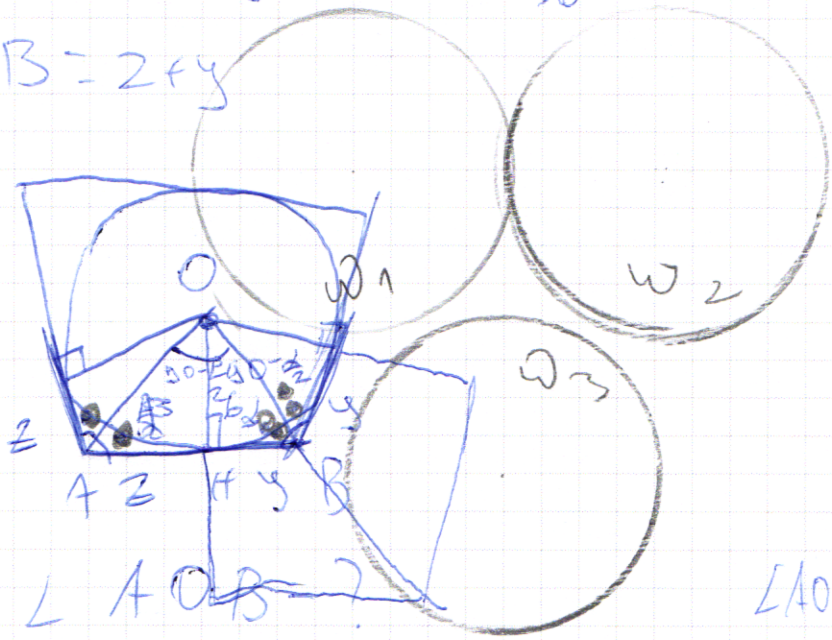
$AB = z + y$



$\sqrt{36 + \cancel{z^2} y^2}$

$AD = p + z$

$\boxed{AB = z + y}$



$180 = \angle AOB + \beta + \alpha$

$\angle AOB = 90 - \beta + 90 - \alpha$

$\angle AOB = ?$

$AB + BC +\ \ 2R + \cancel{p} + \cancel{z} + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{2R} - \cancel{z} - \cancel{y} - \cancel{p} - \cancel{x} - \cancel{2R} = 12$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \sin AOB \cdot AO \cdot OB = \frac{1}{2} OH \cdot AB$

Horray :)

$2R = 12$; $\boxed{R = 6}$

$\sin AOB \cdot AO \cdot OB = R \cdot AB$; $AO = \sqrt{R^2 + z^2} =$

$OB = \sqrt{R^2 + y^2}$, $AB = z + y$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$(\sqrt{x+7}-x)^{\geq 1} = (x+4)$

ОДЗ: R, кроме $0 < t < 0$

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x \geq 0 \\ \cancel{x \geq 2}\ \sqrt{x+7} \geq 0 \end{cases}$; $\sqrt{x+7}-x \neq 1$;

$x^2+2x+1 \neq x+7$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} > x \\ x \geq -7 \end{cases}$; $\sqrt{x+7} \neq 1+x$; $-3; 2$

$x^2+x-6=0$

$x^2-x-7 < 0$

$\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7 \neq (1+x)^2 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ x \geq -7 \end{cases}$; $\begin{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq -3; 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ x \geq -7 \end{cases}$

1. случ: $x+4=0$

$x=-4$;

$1^n = 1$

$0^n = 0$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$, перепишем в виде:

$(\sqrt{x+7}-x)^n = (x+4)$, где $n \geq 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t(2t+1)+4$

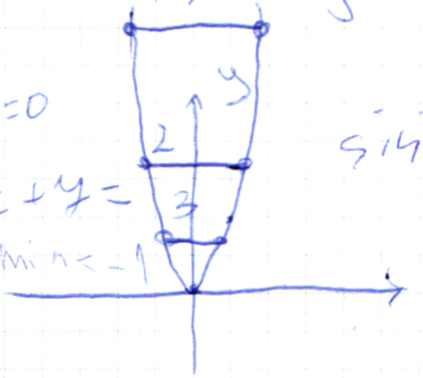
$a^{B} = x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$1\ x = \log_a B$, $a^x = B$

$-\frac{b}{2a} =$

Найдем длины отрезков



$\min = 0$

$2t^2 + t + 7 =$

$\min = -1$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$L_1 = 14$; $L_2 = 6$; $L_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

$\frac{1}{16}$

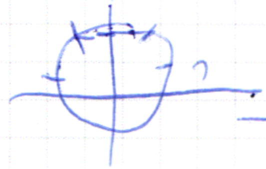
$\frac{7 \cdot 8 - 1}{16} =$

$\frac{56-1}{16} = \frac{55}{16}$

$2x^2 = 98$; $x^2 = 49$

$\cos 10x = 2 \cdot \cos^2 5x - 1$

$t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$



$x^2 = \frac{a}{2}$; $L_3 = 2x = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}$

$-2 \cdot \cos$

1. случ.

$\cos x + \cos y = -2 \cdot \sin\frac{x+y}{2} \cdot \sin\frac{x-y}{2}$ по теор. sin

L_3

$\frac{L_3}{\sin\alpha_3} = \frac{L_2}{\sin\alpha_2} = \frac{L_1}{\sin\alpha_1}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta =$
$= -2 \cdot$

$\frac{x+y}{2} = 7x$; $\frac{x-y}{2} = 3x$

$x + y = 14x$ $x - y = \frac{6x}{5}$ 9

то-есть против угла в $120°$ град. должна лежать большая сторона

$\frac{180-120}{2} = 30$

$2x =$ $\boxed{x = 10}$

$\cos^2 3x$

$y = 7x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1 случ.

$L_3 > L_1$

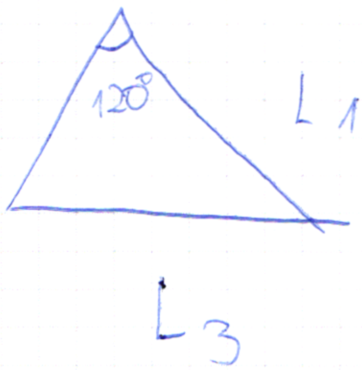
$L_1 + L_2 > L_3$ — сущ. треуг.

$\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ +14\ \ \\ \hline 196 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\ 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 6 \\ \hline 1\cancel{2} \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\ 196 \\ \hline 316 \end{array}$

$158 \,|\, \frac{2}{79}$

$\begin{array}{r} +196 \\ 120 \\ \hline 316 \end{array}$

$a = 316 \,|\, \frac{2}{158}$



$L_3^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2 \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot \cos 120^\circ$

$L_3^2 = 2 \cdot a = 196 + 36 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= 196 + 36 + 14 \cdot 6 = 196 + 36 + 84 =$

$= 196 + 120 =$

$= 316$

$316 \,|\, 2$, -30, 158, -14; $158 \,|\, 2$, 79

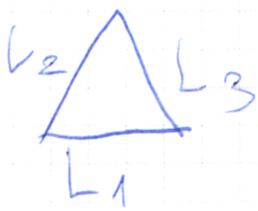
$a = \frac{316}{2} = \boxed{158}$; $L_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = 2 \cdot \sqrt{79}$

$8 < \sqrt{79} < 9$ $\quad L_1 + L_2 = 14 + 6 = 20$

Треуг. составлен

2. случ.

$L_1 > L_3$ $\quad L_2 + L_3 > L_1$



$L_1^2 = L_2^2 + L_3^2 - 2 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot \cos 120^\circ$

$196 = 2a + 36 + \cancel{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 6$ → потом потом

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

y_{min} - ? ; y_{max} - ?

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cos 2\alpha = (1-\sin^2\alpha) - \sin^2\alpha$

$2\cdot\sin^2 x = 1-\cos 2\alpha$

$\sin 3x$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\frac{a-b}{2} = 3x$; $\frac{a+b}{2} = 7x$

$a-b = 6x$; $a+b = 14x$

$2a = 20x$; $a = 10x$

$b = 4x$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = \sin 3x \cdot \sin 7x$

$\cos 10x = \cos 2\cdot 5x = 2\cdot\cos^2 5x - 1$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - 2\cdot\cos^2 5x - 1) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}\cdot\cos 4x - \sin^2 x + 3\frac{1}{2}$

$\cos 4x = 2\cdot\cos^2 2x - 1$

$\boxed{g(x) = \frac{2\cdot\cos^2 2x + \cos 2x + 5}{2}}$

$g(x) = \frac{1}{2}\cdot(2\cdot\cos^2 2x - 1) - \cancel{s}\,\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + 3\frac{1}{2}$

$g(x) = \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

N – ? , "0", "1", "8". → есть каждая цифра

0, 1

00

0, 1

1, 0

11

$N =$

$\boxed{N = 10220}$

$N_1 = 1024 - 2 = 1022$

$1 \cdot 2 + 2 = 10$

$N_2 =$

000

001

010

100

011

101

111

$\cancel{1}\ 8$

$2\sqrt{\frac{9}{2}} = 2 \cdot 5 = 10$

80

110

1024 – 2 = 1022

Ответ: N = 10220

196
– 36
160

0, 1

2 – 4 2^2

3 – 8 2^3

4 – 16 2^4

10 – 2^{10} = 1024

0000
0001
0010
0100
1000
0011
0101
1001

0110
1010
1100
0111
1101
1011
0111
1111