# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР У - 008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

## №1

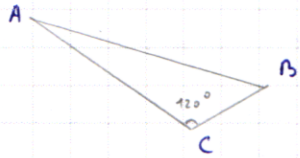
$y = x^2$ $\quad x^2 = 169 \quad x = \pm 13 \quad b_1 = 2|x| = 26$

$y = 169$ $\quad x^2 = 64 \quad x = \pm 8 \quad b_2 = 16$ $\quad$ $b_1, b_2, b_3$ – стороны треугольника с углом $120^\circ$

$y = 64$

$y = a$ $\quad x^2 = a \quad x = \pm\sqrt{a} \quad b_3 = 2\sqrt{a}$

Так как сторона AB – наибольшая, значит она может быть равна $b_1$ или $b_3$




1) $(b_1 - max)$ по теореме косинусов: $b_1^2 = b_2^2 + b_3^2 - 2b_2b_3 \cdot \cos 120^\circ$ $\quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$b_1^2 = b_2^2 + b_3^2 + b_2 b_3$

$26^2 = 16^2 + 4a + 32\sqrt{a} \quad /4$

$169 = 64 + a + 8\sqrt{a}$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = -15 \text{ (посm.)} \\ \sqrt{a} = 7 \qquad a = 49\end{array}\right.$

2) $(b_3 - max)$ по теореме косинусов: $b_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_1 b_2$

$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 \quad /4$

$a = 169 + 64 + 104 = 169 + 168 = 337$

Ответ: $a = 49$ или $a = 337$

## №3

1) Рассмотрим случай, когда первые в цифр – „5"

тогда остаётся ещё 12 пустых мест, в которые можно вписать либо „9", либо „0" (2 варианта)

Значит всего вариантов, удовлетворяющих условию, будет $2^{12} - 2$

(исключая варианты, когда все оставшиеся цифры „0" или „9")

2) Рассмотрим оставшиеся случаи:

в подряд стоящих „5" могут располагаться всего в 13 местах (один из них уже рассмотрен)

Первая цифра будет „9" (т.к. число не может начинаться с нуля)

Значит остается еще 11 мест с двумя вариантами

тогда ~~всего~~ вариантов будет : $12 \cdot 2^{11} - 1$ (исключая случай, когда нет ни одного нуля)

3) всего вариантов будет: $2^{12} - 2 + 12 \cdot 2^{11} - 1 = 2^{12}(1+6) - 3 = 2^{12} \cdot 7 - 3$

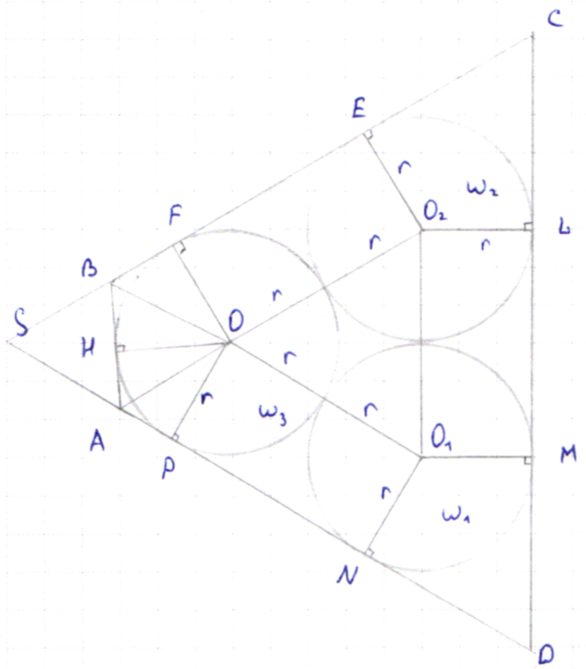
$2^{10} = 1024$ $\quad 4096 \times 7 = 28672$ $\quad 28672 - 3 = 28669$

$2^{11} = 2048$

$2^{12} = 4096$

Ответ: 28669

№4




а) $AD + BC - AB - CD = 10$

$AP + PN + ND + BF + FE + EC - AH - HB - CL - LM - MD = 10$

$AP = AH$, $BH = BF$, $EC = CL$, $MD = DN$ (как касательные, проведённые из одной точки)

$PN + FE - LM = 10$

$POO_1N$, $MO_1O_2L$, $EO_2OF$ – прямоугольники

$PN = FE = LM = 2r$

$2r + 2r - 2r = 2r = 10$

$r = 5$

б) продлим AD и BC до пересечения в точке S

Нетрудно заметить, что $\triangle SCD$ – равносторонний ($SD \parallel OO_2$ ; $SC \parallel OO_1$ ; $CD \parallel O_1O_2$ ; $\triangle OO_1O_2$ – равносторонний, т.к. каждая сторона равна $2r$; $\triangle SCD \sim \triangle OO_1O_2$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-008
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $\angle BSA = 60^\circ$

1. рассмотрим четырёхугольник SFOP

$\angle FOP = 360^\circ - \angle BSA - \angle OFS - \angle OPS = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$

2. $\triangle OBF = \triangle OBH$ (OB - общая, $OH = OF = r$)

$\angle HOB = \angle FOB = \frac{1}{2} \angle HOF$

3. $\triangle OAH = \triangle OAP$ (OA - общая, $OH = OP = r$)

$\angle AOH = \angle AOP = \frac{1}{2} \angle HOP$

$\angle BOA = \angle BOH + \angle AOH = \frac{1}{2} \angle FOH + \frac{1}{2} \angle HOP = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

в) $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OB \cdot \sin \angle BOA = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \sin 60^\circ = 21 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} AB \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AB$

$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot AB = 21 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

Ответ: $r = 5$ ; $\angle AOB = 60^\circ$ ; $AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

## №5

$\log_{\sqrt{3+x} - x} (x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{3+x} - x} (x+5) - \log_{\sqrt{x+3} - x} (\sqrt{x+3} - x) \geq 0$

используем совпадение по знаку:

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x + 5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0$

D:
1. $x + 5 > 0$
2. $x + 3 \geq 0$
3. $\sqrt{x+3} - x > 0$
$\sqrt{x+3} > x$
$x + 3 > x^2$
$x^2 - x - 3 < 0$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\begin{cases} x > -5 \\ x \geq -3 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$

x ?? -1,? ?? 2,2

4. $\sqrt{x+3} - x \neq 1$ $\quad x \neq -2$, $x \neq 1$

найдём нули:

1. $\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$
$\sqrt{x+3} = x + 1$ $(x \geq -1)$
$x + 3 = x^2 + 2x + 1$
$x^2 + x - 2 = 0$
$\left[\begin{array}{l} x = -2 \text{ (пост.)} \\ x = 1 \end{array}\right.$

2. $2x+5-\sqrt{x+3}=0$

$2x+5=\sqrt{x+3}$

$(x \geq -2{,}5)$

$4x^2+20x+25=x+3$

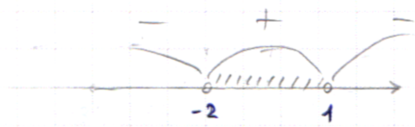
$4x^2+19x+22=0$

$D=19^2-22\cdot4\cdot4=361-352=9=3^2$

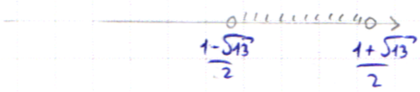
$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-19+3}{8}=\frac{-16}{8}=-2 \\ x=\frac{-19-3}{8}=-\frac{22}{8}=-\frac{11}{4}=-2{,}75 \text{ (пост.)} \end{array}\right.$$

нули: $x=1$

$x=-2$




D:




Ответ: $x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ 1\right)$

№7

представим, что любое число из этих промежутков будет иметь один из этих видов $35k$

$35k+1$

$35k+2$

...

$35k+34$

Заметим, что числа вида $35k$ находятся в конце каждого промежутка, а значит будут принимать максимальное значение

Чтобы найти наименьшее значение суммы, возьмём числа с минимальными остатками от деления на 35

(причём, чтобы ~~их~~ разность любых двух не делилась на 35, ~~каждое~~ числа должны иметь разные остатки от деления на 35)

возьмём числа, имеющие вид $35k+1$; $35k+2$; $35k+3$; .... $35k+25$

1-ый промежуток: числа имеют вид $0\cdot35+n$

2-ой : $3\cdot35+n$

3-ий : $2\cdot35+n$

4-ый : $3\cdot35+n$

5-ый : $4\cdot35+n$

$\sum = (1+2+3+...+25)+35\cdot5\,(0+1+2+3+4)=\frac{1+25}{2}\cdot25+35\cdot5\cdot10=$

$=13\cdot25+175\cdot10=325+1750=2075$

$$\begin{array}{r} \times\ 25 \\ 13 \\ \hline 75 \\ 25\ \ \\ \hline 325 \end{array}$$

Ответ: 2075

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$

$\sin^2 7x = \frac{1-\cos 14x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{2}\cos 14x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 3 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) - 4 =$

$= \sin(-3x)\cdot\sin(+x) - 4 = -\sin 3x \sin x - 4$

$g'x = (\sin 3x)' \cdot \sin x + \sin 3x \cdot (\sin' x) = \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x = \frac{1}{2}\sin(x+3x) =$

$= \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$4x = \pi n \quad (n \in Z)$

$x = \frac{\pi n}{4}$ возьмём $n = 0, 1, 2, 3$

$-\sin 45 \cdot \sin 135 = -\frac{1}{2}$

$-\sin 90 \cdot \sin 270 = +1$

$-\sin$

~~$\sin 3x$~~. минимальное $-4,5$

Ответ: наименьшее $-4,5$, наибольшее $-3$.

4-008

??

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

О: $x+5>0$ $x>-5$

$x+3\geq 0$ $x\geq -3$

$\sqrt{x+3}-x>0$

$x+1\geq 0$

$x>-1$

$\sqrt{x+3}-x>0$

$\sqrt{x+3}-x=0$

$\sqrt{x+3}=x$ $x\geq 0$

$x+3=x^2$

$x^2-x-3=0$

$D=1+12=13$

$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$-$ $+$ $-$

$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)-\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)\geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x)\geq 0$

$\sqrt{x+3}-x-1=0$

$\sqrt{x+3}=x+1$

$x+3=x^2+2x+1$

$x^2+x-2=0$

$\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$

$+$ $+$ $-$

$-\frac{11}{4}$ $-2$ $1$

$-1$

$2x+5-\sqrt{x+3}=0$

$2x+5=\sqrt{x+3}$ $x>-2{,}5$

$4x^2+20x+25=x+3$

$4x^2+19x+22=0$

$-\frac{19}{4}$ $\frac{32}{4}$

$D=361-4\cdot4\cdot22=$

$=361-352=9$

$x=\frac{-19\pm 3}{8}$ $=$ $\frac{-22}{8}=-\frac{11}{4}$

$\frac{-16}{8}=-2$

$19\cdot19=171+19\cdot10=361$; $4\cdot22=88\cdot4$: $16\cdot22=132+22\cdot10=352$

Ответ: $(-1;1)$

№7

$35k$

$35k+1$

$35k+2$

$\dots$

$35k+34$

$35k$

$35k+1$

$\dots$

$35k+25$

$\Sigma = 1+2+\dots+25+5\cdot35\cdot0+5\cdot35\cdot1+5\cdot2\cdot35+5\cdot3\cdot35+$

$+5\cdot4\cdot35=\frac{1+25}{2}\cdot25+35(0+5+10+15+20)=$

$=13\cdot25+35\cdot50=325+1750=$

$=2075$

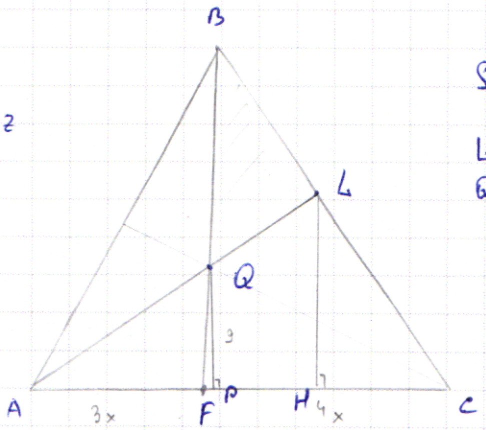
$25\cdot13=75+250=325$

$35\cdot50=1750$

$16\cdot7=112$

$S=S_{ABC}=112\,z$

$16\cdot3=48$




$S_{BQL}:S_{BAC}=1:16$

$S_{BQL}=7\,z$

$LH-?$

$QP=9$

$S_{ABF}:S_{ACF}$

$S_{BFC}=64\,z$

$S_{BAF}:S_{BCF}=3:4$

$S_{FQLC}=57\,z$

$S_{BCF}:S_{ABC}=4:7$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{ABC}}{S_{BCF}}=\frac{1}{16}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{64}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $y = x^2$

$x^2 = 169 \quad x = \pm 13 \quad 26 \; (676)$

$x^2 = 64 \quad x = \pm 8 \quad 16 \; (256)$

$x^2 = a \quad x = \pm\sqrt{a} \quad 2\sqrt{a} \; (4a^2)$

$169 \cdot 4 = 676$; $26 \cdot 26 = 676$; $64 \cdot 4 = 256$

$\cos 120^\circ = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$

1) $676 = 256 + 4a^2 - 2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}\cdot\cos 120^\circ = 256 + 4a^2 + 2\cdot 16\cdot\sqrt{a}$

$169 = 64 + a^2 + 8\sqrt{a}$

$a^2 + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\sqrt{a} = -15$ (иост.)

$\sqrt{a} = +7$

$a = 49$

$13 \cdot 8 = 104$

$26 \cdot 4 = 104$

2) $4a = 676 + 256 + 2\cdot 16\cdot 26\cdot\frac{1}{2}$

$a = 169 + 64 + 4\cdot 26 = 169 + 64 + 104 = 169 + 168 = 337$

1, 2, 3, 4, 5 !, 6, 7

№2

$g(x) = \sin 5x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin a\sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$

$g'_x = (\sin 5x)'\cdot\sin 9x + \sin 5x\cdot(\sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' =$

$= 5\cos 5x\cdot\sin 9x + 9\cos 9x\cdot\sin 5x - 14\cos 7x +$

№3

13 вер. с 5

$2^{12}$

1 с. $2^{12}$

+

12 с. $2^{11}$

$2^{12} + 12\cdot 2^{11} = 2^{12}(1+6) = 2^{12}\cdot 7$

$2^{10} = 1024$

$2^{11} = 2048$

$2^{12} = 4096$

$4096 \cdot 7 = 28672$

28672

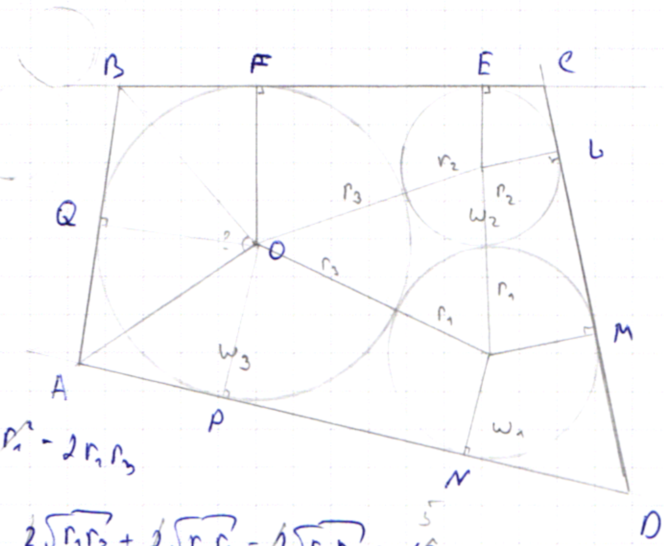
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$AD + BC - AB - CD = 10$

$PN + FE - LM = 10$

$(r_1 + r_3)^2 = PN^2 + (r_3 - r_1)^2$

$\cancel{r_1^2} + \cancel{r_3^2} + 2r_1r_3 = PN^2 + \cancel{r_3^2} + \cancel{r_1^2} - 2r_1r_3$

$4r_1r_3 = PN^2$

$2\sqrt{r_1r_3} = PN$

$2\sqrt{r_1r_2} = LM$

$2\sqrt{r_2r_3} = FE$

$2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_2r_3} - 2\sqrt{r_1r_2} = 10$

$\sqrt{r_1r_3} + \sqrt{r_2r_3}$

$\sqrt{r_3}\,(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) = 5 + \sqrt{r_1r_2}$

$r_3\,(r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2}) = 25 + r_1r_2 + 10\sqrt{r_1r_2}$

$r_1 = r_2 = r_3$

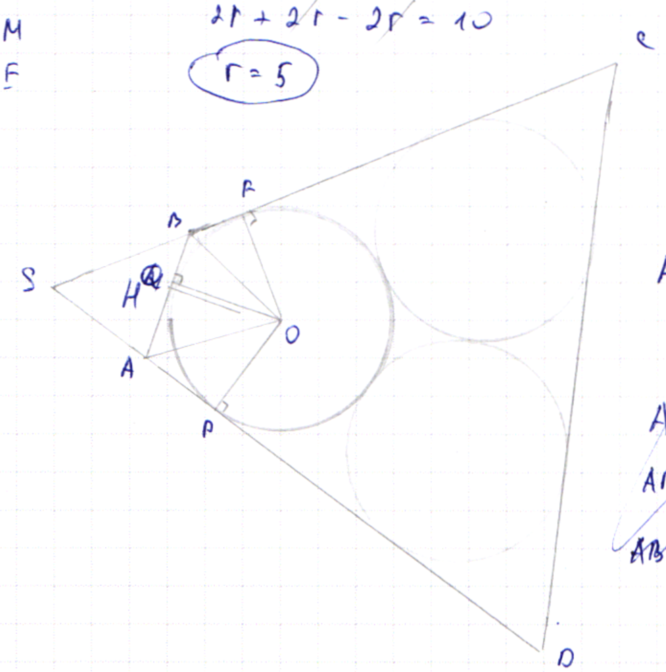
$2r = PN$

$2r = LM$

$2r = FE$

$2r + \cancel{2r} - \cancel{2r} = 10$

$r = 5$




$\angle = 60^\circ$

$AO \cdot BO = 42$

$AB - ?$

$S_{ABO} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}$

~~$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cdot \cos 60^\circ =$~~

~~$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 42$~~

~~$AB^2$~~ $BQ^2 =$

$S_{ABO} = \frac{1}{2} AB \cdot r$

$AB \cdot r = 21\sqrt{3}$

$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2} \cdot (\cos 4x - \cos 14x)$$

$$\sin^2 7x = \frac{1 - \cos 14x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 90^\circ}{2}$$

$$\sin^2 90 = 1 = \frac{1 - \cos 180^\circ}{2} = \frac{2}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)