МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-033

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-033

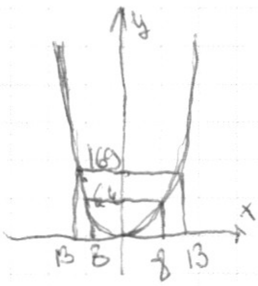
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Найдем длины высеченных отрезков:



Когда $\begin{cases} y=64 \\ y=x^2 \end{cases}$, то $x=\pm\sqrt{64}$

$x=\pm 8$, $\Rightarrow$

длиной отрезка будет расстояние между этими координатами, $\Rightarrow$

$l_1=16$. Отрезки параллельны оси x

$\begin{cases} y=169 \\ y=x^2 \end{cases} \Big| \Rightarrow x^2=169, \Rightarrow x=\pm 13, \Rightarrow l_2=26.$

Далее воспользуемся теор. косинусов, чтобы найти 3 сторону треугольника:

$$\left[\begin{array}{l} l_1^2=l_2^2+x^2-2\cos 120^\circ\cdot x l_2 \\ l_2^2=l_1^2+x^2-2\cos 120^\circ\cdot x l_1 \\ x^2=l_1^2+l_2^2-2\cos 120\cdot l_1 l_2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} l_1^2=l_2^2+x^2+x l_2 \\ l_2^2=l_1^2+x^2+x l_1 \\ x^2=l_1^2+l_2^2+l_1 l_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16^2=26^2+x^2+26x \\ 26^2=16^2+x^2+16x \\ x^2=26^2+16^2+26\cdot 16 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+26x+676-256=0 \to \text{нет корней, т.к. } D<0 \\ x^2+16x+256-676=0 \Big| \frac{D}{4}=22^2, \Rightarrow x=\frac{-8+22}{1}=14. \\ x^2=256+676+416 \to x=\sqrt{1348} \end{array}\right.$$

$x=-8-22=-30$ – неподх., т.к. $x>0$

$$\left[\begin{array}{l} x=14 \;\Big| \Rightarrow \text{координата } x=\frac{14}{2}, \text{ т.к. график симм. относ. оси } y \\ x=\sqrt{1348} \;\Big| \Rightarrow \text{координата } x=\frac{\sqrt{1348}}{2} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

Если координата по оси $x=7$, то в этот момент координаты точки будут $(7;49)$, координата по оси y равна 49, => нам нужна прямая $y=49$.

Если координата по оси $x=\sqrt{337}$, то в этот момент координата $y=337$, => нам нужна прямая $y=337$.

$$\Downarrow$$

$$a=49$$
$$a=337$$

Ответ: 49; 337

№3

~~Тогда всего таких чисел~~ Рассмотрим пример одного такого числа:

$$\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}_{5}\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{0 \text{ или } 9}=2^{12}$$

Далее мы можем двигать эти потери вправо:

$$\underbrace{1}_{\text{9, т.к. 0 не может быть в начале}}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}_{5}\cdot\underbrace{2^{11}}_{0 \text{ или } 9}=2^{11}$$

Всего мы сможем передвинуть 12 раз, поэтому всего вариантов:

$$12\cdot2^{11}+2^{12}=2^{12}\cdot6+2^{12}=2^{12}(6+1)=2^{12}\cdot7=28672$$

Ответ: 28672

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-033

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ \sqrt{x+3}-x \leq x+5 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right. \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \;;\; \sqrt{x+3}-x \neq 1 \;;\; \sqrt{x+3} \geq 0 \;,\Rightarrow x \geq -3 \end{cases}$$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$x \neq 1$

$x \in \left(-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-3;1) \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \quad x \in [-2; +\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \sqrt{x+3} \geq 2x+5 \;, \Rightarrow x \in [-3;-2] \end{cases} \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow$$

$x \in [-2;1)$

Ответ: $[-2;1)$

№7

Наша задача – подобрать числа с разными остатками от деления на 35, ведь если встретятся два числа с одинаковым остатком, то остаток их разности будет равен нулю, => разность будет $\vdots$ 35. Тогда мы должны подобрать по 5 наименьших чисел с разным остатком от деления на 35:

~~[1 ; 35] [36 ; 70] [...]~~
~~1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 45~~

~~При этом минимальный остаток должен быть у промежутка [106 ; 140], чтобы сумма была миним~~

[1 ; 35] [36 ; 70] [71 ; 105]

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 45 81 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85

[106 ; 140] [141 ; 175]

121 ; 122 ; 123 ; 124 ; 125 161 ; 162 ; 163 ; 164 ; 165

Тогда их суммой будет:

$$(1+2+3+4+5)5 + 40\cdot 5 + 80\cdot 5 + 120\cdot 5 + 160\cdot 5 =$$
$$5(15+40+80+120+160) = 5(415) = 5\cdot 415 = 2075$$

Ответ: 2075

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\cos^2 7x} + \frac{1}{2} + \cancel{\cos^2 7x} - \cos^2 x - 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 x - 3{,}5 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \cos^2 x - 3{,}5 =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 = 2\cos^2 x - 1 - \cos^2 x - 4 =$

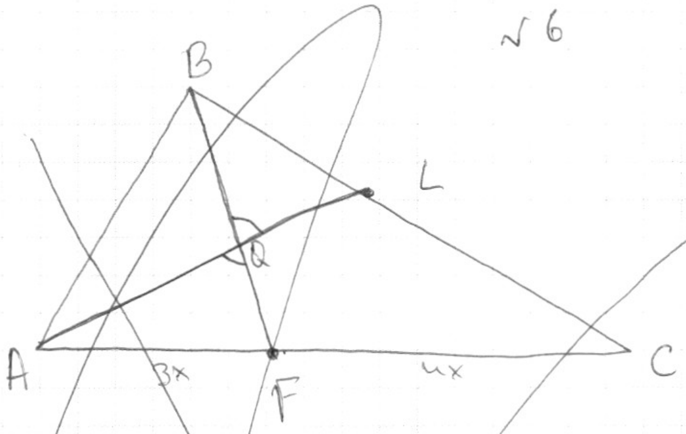
$= 2\cos^2 x - \cos^2 x - 5 = \cos^2 x - 5$

Рассм. ф-ю $g(x) = \cos^2 x - 5$. Макс. значение функции принимает, когда $\cos^2 x = 1$, т.к. $\cos^2 x \in [0;1]$. $g(x)_{MAX} = -4$

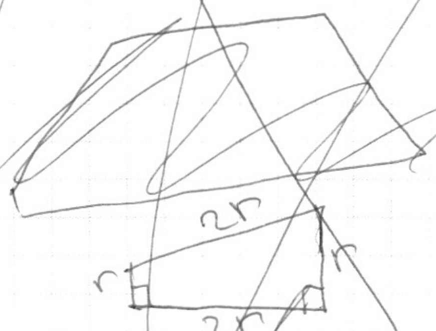
$g(x)_{min} = -5$, т.к. мин. значение $\cos^2 x = 0$

Ответ: макс: -4; мин: -5

№6



№4



$2r + x + y = AD$

$2r + x + m = DC$ ⊖ $y - m = AD - DC$

$2r + m + z = CB$

$2r + z + y = AB$ ⊖ $m - y = BC - AB$ ⊕

$AD - DC + BC - AB = 10$

~~$x + y = DA$~~

~~$x + m = DC$~~

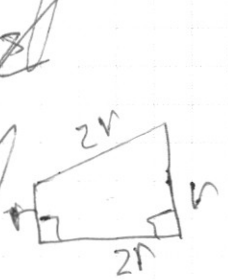
~~$m + z = BC$~~

$2r + x + y = AD$

$2r + x + m = DC$

$2r + m + z = CB$

$y + z = AB$ Здесь мы польз. св-вом касательных



$\Rightarrow$

1) $AD - DC = y - m$

$BC - AB = 2r + m - y$ $\Rightarrow AD - DC + BC - AB = 10 = 2r \Rightarrow r = 5$

2) $\angle AOB = 360 - 90° - 90° - 60° = 120°$, т.к. $\triangle O_1O_2O$ – р/с

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-033

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

в) $AO \cdot BO = 42$, $\Rightarrow$ $S_{AOB} = 42 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \cancel{120}\ 60 =$

$= \frac{21\sqrt{3}}{2}$

$S_{AOB} = AB \cdot OH$, где OH – высота из O на AB $= r$

$\frac{21\sqrt{3}}{2} = AB \cdot 5$

$AB = \frac{21\sqrt{3}}{10}$

Ответ: 1) 5 ; 2) ~~120~~ 60°; 3) $\frac{21\sqrt{3}}{10}$

№6

а)

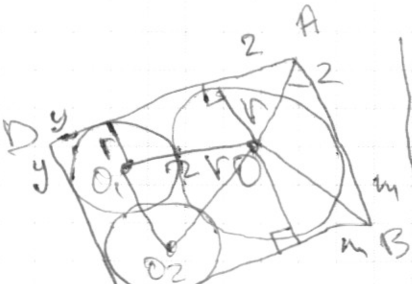
$2r + y + 2 = AD$

$2r + y + x = DC$

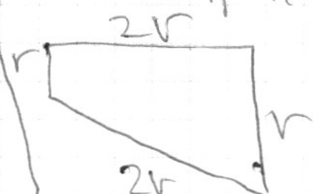
$2r + x + m = CB$

$AB = 2 + m$

$\Rightarrow$



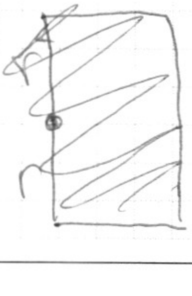
Рассм трап:



Основания равны оно прямоуг, $\Rightarrow$ трап – прямоугольник

$AD - DC + BC - AB = 2r = 10$, $\Rightarrow$ $r = 5$

б)



$\angle AOB = \angle O_1OO_2 = 60°$, т.к. $\triangle O_1OO_2$ равносторонний

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

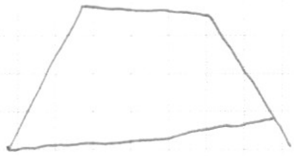
15-033

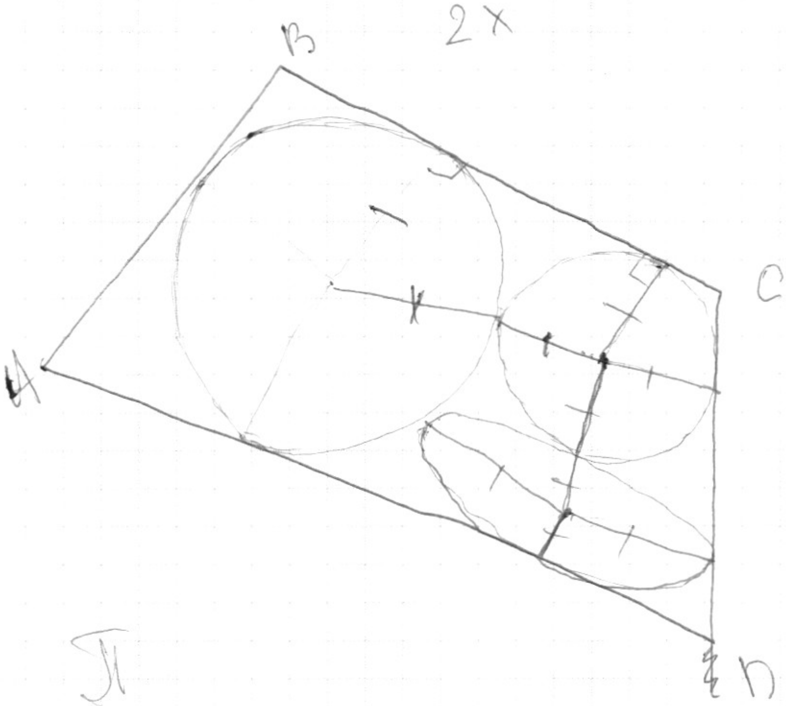
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





π

$\frac{\pi}{2}$ $\qquad 5x=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{10}$

$5x \cdot \sin 9x$ $\qquad 9x = \frac{9\pi}{10}$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$

$\cancel{\sin 5x \cdot \sin 9x}$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4$

$\frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\cos^2 7x} + \frac{1}{2} + \cancel{\cos^2 7x} - \cos^2 x - 4$

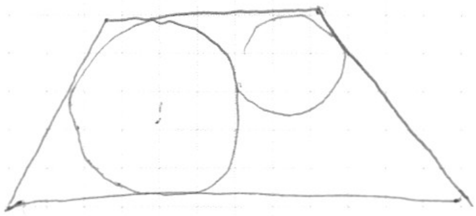
☑ черновик ☐ чистовик

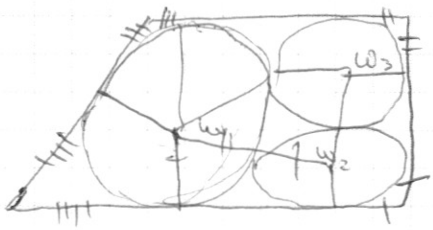
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\omega_1 + \omega_2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-033

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$22 \cdot 8$

N №5

log

$x+3 = x^2+2x+1$

$x^2+x-2=0$

$x_1 = 1$

$19 \times 19 = 171 + 19\ldots = 361$

$22 \times 8 = 176$, $176 \times 2 = 352$

$x+3 > x^2$

$x+3 \geq 4x^2+20x+25$

$x^2-x+3<0$

$1+12 = \sqrt{13}$

$4x^2+19x+22 \leq 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$361-352=9$

$\frac{-19 \pm 3}{8} = -2 ; -\frac{11}{4}$

$\frac{1}{2} + \frac{11}{4} < 1$

1 2

38 39

75 76

112 113

$\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2}+3 = -\frac{5+6}{2} = \frac{1}{2}$

$5a+1+2+3+4+5+$ $\frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$

$5b+6+7+8+9+10$

135

$415 \times 5 = 2075$

$5 \cdot 415$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

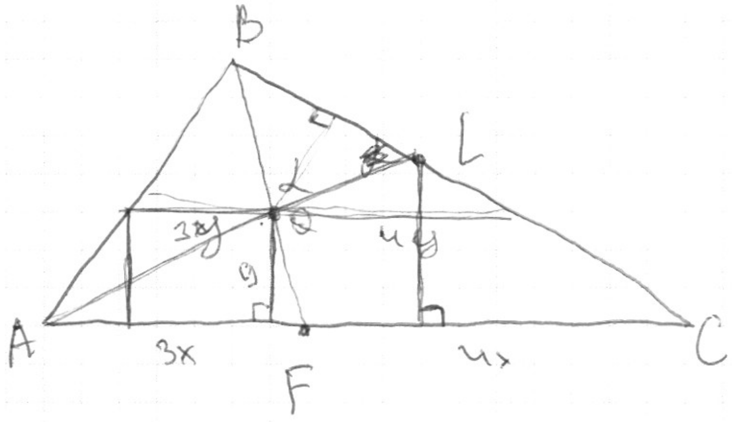
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

№6



$AL \cdot LC \cdot \sin\alpha + \cancel{AQ}\ AL \cdot BL \cdot \sin\alpha =$

$AL \cdot \sin\alpha \cdot BC - QL \cdot BL \cdot \sin\alpha =$

$\sin\alpha\,(\cancel{AL - BC}\ AL \cdot BC - QL \cdot BL) = \frac{15}{16}$

$BQ \cdot QL \cdot \sin\alpha = S_{BQL}$

$S_{AQF} = AQ \cdot QF \cdot \sin\alpha$

$S_{BAQ} = BQ \cdot AQ \cdot \sin\alpha$

S_{A}

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)