

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

11-013

Заполняется ответственным секретарем

- ✓ 1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
- ✓ 3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
- ✓ 7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Возрастающий ряд натуральных чисел 25 начинается с 1, тогда же остатки от деления на 35 образуют степенную прогрессию.

a_1, a_2, \dots, a_{25} (a_1, \dots, a_{25} - остатки)

Известно, что разность любых двух соседних чисел не делится на 35, т.е. среди 25 чисел нет равнозначных, т.е. все остатки различные.

Наша задача состоит в том, чтобы определить, какие 25 чисел образуют данную прогрессию. Для этого рассмотрим разность соседних чисел $a_{n+1} - a_n$, которая должна делиться на 35, но не делиться на 7 и не делиться на 5.

Поскольку все остатки различны, разность соседних чисел должна делиться на 35, но не делиться на 7 и не делиться на 5.

Следовательно, разность соседних чисел должна делиться на 35.

Возрастающий ряд натуральных чисел не зависит от того, какие значения имеют числа a_1, a_2, \dots, a_{25} .

от начальных значений ряда остатков

Формальными он будет только

$a_1=0, a_2=1, \dots, a_{25}=24$, но это не так в каждой

в какой-либо разности соседних чисел с соответствующим членом прогрессии, а именно $a_n = n-1, n \leq 25$.

неч, взаимно ^{раз} $a_n = n, n \in \mathbb{N}, n \leq 25$.

Значит наименьшее значение будет равно $(1 + \dots + 25) + 35 \cdot 5 \cdot 0 + 35 \cdot 5 \cdot 1 + 35 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 3 + 35 \cdot 5 \cdot 4 = 25 \cdot 13 + 35 \cdot 5 \cdot 10 =$
 $= 25(13 + 70) = 25 \cdot 83 =$
 $= 2075$

Ответ: 2075

1.

1.) $y = x^2 \quad y = 169 \rightarrow$ отрезок равен $d_1 = 26$

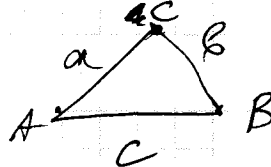
2.) $y = x^2 \quad y = 64 \rightarrow$ отрезок равен $d_2 = 16$

3.) $y = x^2 \quad y = a \rightarrow x^2 = a$
 $x_1 = -\sqrt{a} \quad y_2 = a \quad A_1(-\sqrt{a}; a)$
 $x_2 = +\sqrt{a} \quad y_2 = a \quad A_2(\sqrt{a}; a)$
 отрезок равен $d_3 = 2\sqrt{a}$

4.) По т. косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

в т.р.



в искомым т.р. угол 120° — наибольший, а против большей стороны лежит больший угол.

Положим, что $2\sqrt{a}$ — большая сторона, тогда

$$2\sqrt{a} = \sqrt{2b^2 + 16^2} = 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ =$$

$$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$$

~~26 < 2\sqrt{a} < 38~~
 $a = 13^2 + 8^2 + 13 \cdot 8 = 337$
 $36 < 2\sqrt{a} < 38 \Rightarrow$ каждая сторона меньше суммы двух других, значит такой треугольник составим

теперь положим, что

26 — наибольшая сторона (16 не может быть наиб. стороной)

$$26 = \sqrt{(2\sqrt{a})^2 + 16^2} - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2b^2 = 4a + 16^2 + 2\sqrt{a} \cdot 16$$

$$13^2 = a + 8^2 + \sqrt{a} \cdot 8$$

$$a + 8\sqrt{a} + 8^2 - 13^2 = 0$$

Пусть $\sqrt{a} = t$

$$t^2 + 8t + (8^2 - 13^2) = 0$$

$$D = 64 - 4(8^2 - 13^2) = 4(16 + 13^2 - 8^2) = 4 \cdot 121 = (22)^2$$

$$t_1 = \frac{-8 + 22}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$t_2 = \frac{-8 - 22}{2} \text{ (нет решений, т.к. } 2\sqrt{a} > 0 \text{ по условию)}$$

Значит, $\sqrt{a} = 7$ $a = 49$

$$2\sqrt{a} = 14$$

~~$$14 < 16 + 26$$~~

$$16 < 14 + 26$$

$$26 < 14 + 16$$

Значит, такой треугольник ~~нельзя~~ построить.

Возвращаясь все варианты.

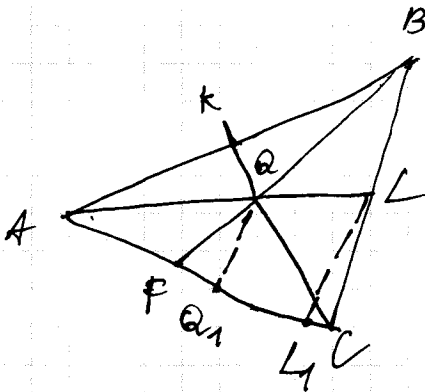
Ответ: $a = 337$, $a = 49$

13.

Цифра 115^н идёт в разряд. Всего эти 6 цифр
в совокупности могут занимать $18 - 6 + 1 = 13$ позиций.
Вспомогательный вариант событий, 6 мест
занято, осталось 12 и можно использовать 2-е цифры,
значит ~~все~~ всего таких чисел $13 \cdot 2^{12}$, но цифра
нельзя не может стоять на месте а таких чисел всего
 $12 \cdot 2^{11}$. Значит, на самом деле чисел, удовлетворяющих
в условию, всего $13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} = 2^{12} \cdot 7 = 4096$

Ответ: 4096

№6.



1) Проведём через т. Q ~~линию~~ к прямой c.k.

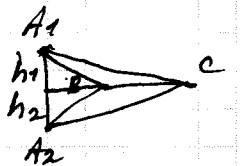
2.) $\triangle AAQ_1 \sim \triangle ALL_1 \Rightarrow \frac{AQ_1}{L_1L} = \frac{AQ}{AL}$

$$\frac{9}{L_1L} = \frac{AQ}{AL}, \quad \frac{L_1L}{9} = 1 + \frac{QL}{AQ}$$

$$\frac{L_1L}{9} - 1 = \frac{QL}{AQ}, \quad \frac{1}{\frac{L_1L}{9} - 1} = \frac{AQ}{QL}$$

$$\frac{1}{\frac{L_1L}{9} - 1} + 1 = \frac{AL}{QL}, \quad \frac{1}{\frac{L_1L}{9} - 1} = \frac{AL}{QL} - 1$$

$$\frac{L_1L}{9} - 1 = \frac{1}{\frac{AL}{QL} - 1}, \quad \frac{L_1L}{9} = \frac{1}{\frac{AL}{QL} - 1} + 1$$



$$L_1L = 9 \left(\frac{1}{\frac{AL}{QL} - 1} + 1 \right)$$

Существует теорема, суть которой: ~~...~~ $\frac{S_{A_1BC}}{S_{A_2BC}} = \frac{h_1}{h_2}$

$$\frac{AL}{QL} - ?$$

Пусть $S_{ABC} = 1$, тогда $S_{BQL} = \frac{1}{17}$

Пусть $\frac{BL}{LC} = k$, тогда $S_{CQL} = \frac{1}{17k}$, $S_{AQB} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)$

$S_{AQC} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)$. Отсюда, вся площадь $\triangle ABC$ равна

$$\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right) + \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)}{k} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Умножим обе части уравнения на $4 \cdot 17 k^2$

$$4k^2 + 4k + 3k^2 + 3k + 3k + 3 = 17 \cdot 4k^2$$

$$7k^2 + 10k + 3 = 17 \cdot 4k^2$$

$$61k^2 - 10k - 3 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 61 \cdot (-3) = 4 \cdot 208 = (8\sqrt{13})^2$$

$$k_1 = \frac{10 + 8\sqrt{13}}{61 \cdot 2} = \frac{5 + 4\sqrt{13}}{61}$$

$$k_2 = \frac{10 - 8\sqrt{13}}{61 \cdot 2} \quad (\text{т.к. } k > 0, \text{ то данное выражение}$$

не имеет смысла)

Значит, ~~$k = \frac{5 + 4\sqrt{13}}{61}$~~ $\frac{AL}{QL} = \frac{S_{ABC}}{S_{CDB}}$

$$= \frac{1}{\frac{1}{17} + \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})}} = \frac{1}{17} + \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})}$$

$$2.) \frac{1}{17} + \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})} - 1 = \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})} - \frac{16}{17}$$

$$3.) \frac{1}{\frac{AL}{QL} - 1} = \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})} - \frac{16}{17}$$

$$4.) \frac{L_1 L}{9} = \frac{61}{17(5+4\sqrt{13})} + \frac{1}{17}$$

$$L_1 L = \frac{549}{17(5+4\sqrt{13})} + \frac{9}{17} \quad (\text{рассчитали от } L \text{ до границы } AE)$$

Ответ: $\frac{549}{17(5+4\sqrt{13})} + \frac{9}{17}$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{14}$

$\times 26$ 22 + 13	$\begin{array}{r} 35 \overline{) 5} \\ 7 \overline{) 7} \\ 11 \end{array}$
$13 \cdot 24$	25
$(1+24) \cdot 12 + 25$	25 нами, остатков
$25 \cdot 12$	1 ... 25
$25 \cdot 13$	35 (h-1)

1. $y = x^2$ $y = 169$
 $x^2 = 169$
 $x = \pm 13$ $A_1(-13; 169)$ $A_2(13; 169)$
 $d = \sqrt{(209-169)^2 + (13-(-13))^2} = 208$

2. $y = x^2$ $y = 64$
 $x^2 = 64$
 $x = \pm 8$ $B_1(-8; 64)$ $B_2(8; 64)$
 $d = 16$

3. $y = x^2$ $y = a$
 $x^2 = a$
 $x = \pm \sqrt{a}$
 $d_3 = \sqrt{(2\sqrt{a})^2} = 2\sqrt{a}$
 $\angle = 120^\circ?$

$$35 \cdot 50 + 35 \cdot 5 \cdot 1 + 35 \cdot 5 \cdot 2 + 35 \cdot 5 \cdot 3 + 35 \cdot 5 \cdot 4 = 35 \cdot 5 (0 + 1 + 2 + 3 + 4) =$$

$$1 + \dots + 24 \quad 1 + 2 + 3 + 4 \quad 35 \cdot 5 \cdot 10 \quad \times 25 \quad 80$$

$$(1+24) \cdot 12 + 25 \quad 3 \quad + (1 + \dots + 25) \quad \times 25 \quad 25 \quad \times 83 \quad 100 \cdot 20$$

$$25 \cdot 12 + 25 \quad 6 \quad 415 \quad 2000$$

$$25 \cdot 13 \quad 1226 \cdot \frac{26}{2} - 26 = 27 \cdot 13 - 26 \quad 166 \quad 2045$$

~~(1 + ... + 25)~~ теперь построим эти числа 25 (по остаткам)

2) Чтобы получить числа из промежутка $1/n$, то к началу к началу каждой группы остатков прибавим $35(n-1)$

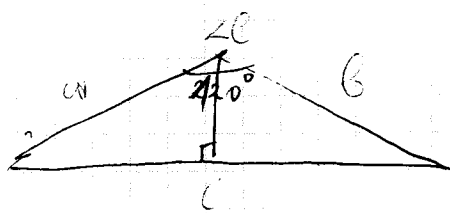
Отсюда ясно, что нам. знае. сумма 25 выпр. чисел не зависит от того какие промеж. мы выпр. числа, а лишь зависит от получаемого ряда остатков.

~~(1+2+...+25)~~ (0 + ... + 24) ~~15~~

1) Допустим имеется 25 выпр. чисел и эти, тогда фактом их остатки можно упорядочить от наимень. к больш.

$a_1 \dots a_{25}$

3) Наименьшим от будет при $S = (0 + \dots + 24)$



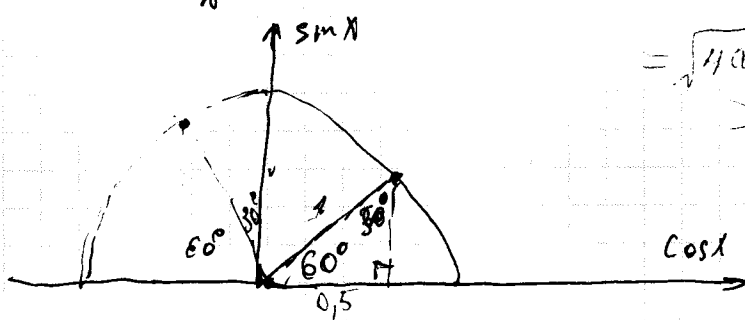
26 16
~~16~~ $2\sqrt{a}$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

1) правило косинусов. угол между сторонами, см

$$2) \sqrt{a} = \sqrt{26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16}$$

$$3) 26 = \sqrt{(2\sqrt{a})^2 + 16^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ} =$$



$$(21)^2 = 13 \cdot 8$$

$$(13+8)^2 = 13 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} \times 18 \\ 36 \\ \hline \times 19 \\ 38 \end{array}$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\frac{0.5}{1} = 0.5$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{a} = \sqrt{26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16}$$

$$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16$$

$$14 \quad a = \frac{26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16}{4} = \frac{13^2 + 8^2 + 13 \cdot 8}{1} = 169 + 64 + 104$$

$$64 + 169 + 16$$

$$229 + 4 + 16$$

$$233 + 16$$

$$249$$

$$169 - 64 = 105 + 16$$

$$121$$

$$\begin{array}{r} 126 \\ 16 \\ \hline 142 \end{array}$$

$$339$$

$$\begin{array}{r} \times 15 \\ 15 \\ \hline 505 \end{array}$$

$$164 + 64 + 5 =$$

$$228 + 5 = 233 + 104 =$$

$$337$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline 249 \\ 141 \\ 79 \\ \hline 321 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10^{18} \rightarrow 18 - 4 - 11 = 3$
 $18 - 6 + 1 = 13$
 $2^{13} \cdot 13 - 2^{11} \cdot 12 = 2^{12} (13 - 6) = 2^{12} \cdot 7$
 $64 \cdot 64 \cdot 7$
 $(2^3)^4 = (2^4)^3 \cdot 8^4 = (2^5)^2$
 $(13 \cdot 2^{11} - 12 \cdot 2^{11}) = 2^{12} (13 - 6) = 2^{12} \cdot 7$

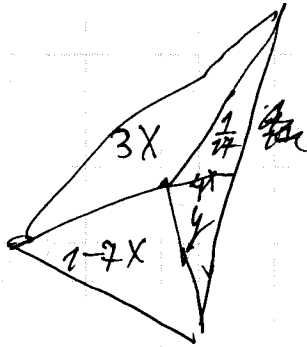
$\frac{S_{AGL}}{S_{BGL}} = \frac{1}{16}$
 $r(A) = 4$
 $r(L) = 7$
 $\frac{AL}{AQ} = ?$
 $\frac{AL}{AQ} = \frac{9}{9 + AL}$
 $9 = \frac{AL}{9 + AL}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$
 $S_{BGL} = \frac{1}{2} \cdot BL \cdot h_1$
 $S_{AGL} = \frac{1}{2} \cdot AL \cdot h_2$
 $\frac{S_{AGL}}{S_{BGL}} = \frac{AL \cdot h_2}{BL \cdot h_1} = \frac{1}{16}$
 $\frac{AL}{BL} = \frac{h_1}{16 h_2}$
 $\frac{AL}{BL} = \frac{1}{16} \cdot \frac{h_1}{h_2}$
 $\frac{AL}{BL} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$
 $\frac{AL}{9 + AL} = \frac{1}{32}$
 $32 AL = 9 + AL$
 $31 AL = 9$
 $AL = \frac{9}{31}$

64.64.7

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ \hline 384 \\ \hline 4096 \end{array}$$

36



$$\frac{3x}{1-2x} \quad \frac{\frac{1}{17}}{y}$$

$$k + 1 + \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4}(1+\frac{1}{k}) = 17$$

$$\frac{k + \frac{1}{k} + \frac{3}{4}(1+\frac{1}{k}) + \frac{3}{4}(1+\frac{1}{k})}{k} = 17$$

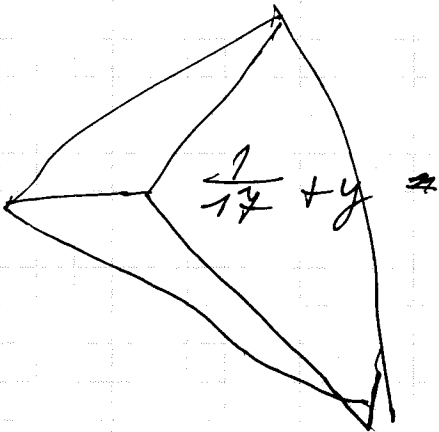
~~17y = 1-2x~~

$$\frac{BL}{LC} = k$$

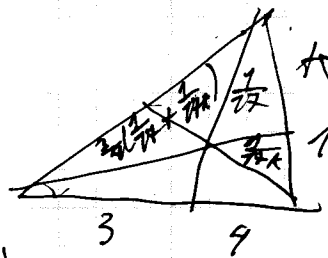
$$17y = \frac{1-2x}{3x}$$

$$\frac{\frac{1}{17}}{y} = k$$

$$y = \frac{1}{17k}$$



$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + y \right)$$



$$\frac{1}{17y} = k$$

$$y = \frac{1}{17k}$$

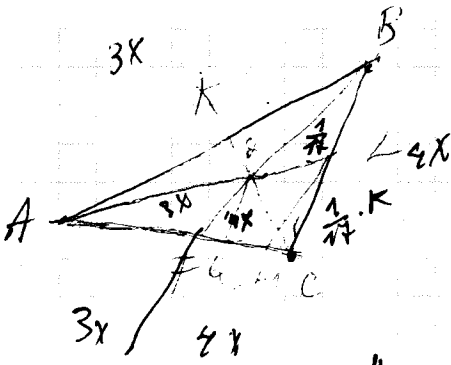
$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)$$

$$\frac{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)}{2} = \frac{k}{1}$$

$$\frac{\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)}{k} = 1$$

$$2 = \frac{\frac{3}{4} \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17k} \right)}{k}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{1-3x-4x}{3x} = \frac{4-7x}{3x}$$

$$\frac{4-7x}{3x} = \frac{4L}{4L}$$

$$\frac{9}{4L} = \frac{4G}{4L}$$

$$\frac{1}{LL_1-9} = \frac{AL-1}{QL}$$

$$LL_1 = 9 + \frac{1}{\frac{AL-1}{QL}}$$

$$LL_1 = 9 \frac{AL}{AQ} = 9 \frac{AQ}{AQ}$$

$$LL_1 = 9 \frac{AQ + QL}{AQ} =$$

$$= 9 \left(1 + \frac{QL}{AQ} \right) = 9 + \frac{QL}{AQ} =$$

$$\frac{QL}{AQ} = ? \Rightarrow \text{??}$$

$$4 \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{17} \right) = \frac{4}{17} - \frac{1}{17} - \frac{1}{17} \cdot K$$

Пусть $S_{ABC} = 1$, тогда известно, что

$$S_{BAC} = \frac{1}{17}$$

$$\frac{S_{AQB}}{S_{QAB}} = \frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{3}{4}$$

$$S_{ABF} = \frac{3}{7}$$

$$S_{BFC} = \frac{4}{7}$$

$$1 = \frac{\frac{1}{7} - x}{\frac{1}{7} - x}$$

$$S_{FQLC} = \frac{4}{7} - \frac{1}{17}$$

$$LL_1 - 9 = \frac{QL}{AQ}$$

$$\frac{S_{AQB}}{S_{BAC}} = \frac{S_{ABF} - 3x}{S_{BFC} - 4x}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{\frac{3}{7} - 3x}{\frac{4}{7} - 4x} = \frac{1}{LL_1 - 9} = \frac{AQ}{QL}$$

$$\frac{3-21x}{4-28x}$$

$$1 + \frac{1}{LL_1 - 9} = \frac{AL}{QL}$$

$$\frac{AL}{QL} - 1 = \frac{1}{LL_1 - 9}$$

$$\underline{k+1} + \frac{3}{4}(k+1) + \frac{3}{4} \frac{(k+1)}{k} = 17k$$

~~$$k+1 + \frac{3}{4}k + \frac{3}{4}k + \frac{3}{4}k + \frac{3}{4} = 17k$$~~

$$k+1 + \frac{3}{4}k + \frac{3}{4} + \frac{3k}{4} + \frac{3}{4} \geq 17k$$

$$\left(k + \frac{3}{4}k\right) + \left(1 + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} + \frac{3}{4k} = 17k$$

$$\frac{7}{4}k + \frac{7}{4} + \frac{3}{4k} = 17k$$

$$7k^2 + 10k + 3 = 17 \cdot 4k^2$$

$$(17 \cdot 4 - 7)k^2 - 10k - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 41 \\ \hline 68 \\ 4 \\ \hline 81 \end{array}$$

~~68~~
$$61k^2 - 10k - 3 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 61 \cdot 3 =$$

$$4(25 + 61 \cdot 3) = 4 \cdot 208 = 4 \cdot 4^2 \cdot 13$$

$$= 8^2 \cdot 13$$

$$\begin{array}{r} 208 \quad | \quad 2 \\ 104 \quad | \quad 2 \\ \hline 52 \quad | \quad 2 \\ 26 \quad | \quad 2 \\ 13 \quad | \quad 13 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \cdot 13 \end{array}$$

Значит

~~$$\frac{AL}{QL} = 1$$~~

$$= (8\sqrt{13})^2 = 208$$

$$k_1 = \frac{-10 + 8\sqrt{13}}{61 \cdot 2} = \frac{5 + 4\sqrt{13}}{61}$$

$$2 \cdot 13$$

$$\frac{1}{17} \neq \frac{1}{17 \cdot \frac{5 + 4\sqrt{13}}{61}}$$

$$k_2 = \frac{10 - 8\sqrt{13}}{61 \cdot 2}$$

$$\times \frac{16}{13}$$

$$48$$

$$\left(k_2 < 0, \text{ поэтому не подходит}\right) \frac{2 \cdot 8}{208}$$