МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 14-С17

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(0)=2\sin^4(0)-\sin^2(0)-4=-4$

$g(\pi)=2\sin^4(\pi)-\sin^2(\pi)-4=-4$

$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\sin^4\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)-4=2-1-4=-3$

$g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\sin^4\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right)-4=2-1-4=-3$

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin^4\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-4=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-4=-4\frac{1}{8}$

$g\left(\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin^4\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}\right)-4=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-4=-4\frac{1}{8}$

$g\left(\frac{7\pi}{6}\right)=2\sin^4\left(\frac{7\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right)-4=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-4=-4\frac{1}{8}$

$g\left(\frac{13\pi}{6}\right)=2\sin^4\left(\frac{13\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{13\pi}{6}\right)-4=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-4=-4\frac{1}{8}$.

Итак, наименьшее значение функция принимает в точках $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и оно равно $-4\frac{1}{8}$, а наибольшее – при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, и оно равно -3.

Ответ: наименьшее значение $g(x)=-4\frac{1}{8}$;
наибольшее значение $g(x)=-3$.

Задание 5

Решить неравенство.

Решение

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

Найдем ОДЗ неравенства.

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0,\\ x+3\geq 0,\\ \sqrt{x+3}-x\neq 1,\\ x+5>0;\end{cases}$$

(продолжение см. на обороте)

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+3} \geq x; \\ \sqrt{x+3} \neq x+1; \\ x \geq -3; \\ x \geq -5; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x+3 \geq x^2, \\ x \geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x+3 \geq 0, \\ x \leq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ x+3 \neq x^2+2x+1, \\ x \geq -3; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x^2-x-3 \leq 0, \\ x \geq 0, \end{array}\right. \\ x \leq 0, \end{array}\right. \\ x^2+x-2 \neq 0, \\ x \geq -3; \end{array}\right.$$

Решим первое неравенство методом интервалов.

$f(x) = x^2 - x - 3$. Нули:

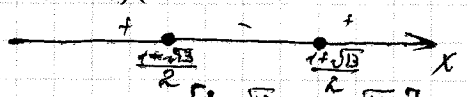
$x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$f(x) \leq 0$

$\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right) \leq 0$



Итак, $x \in \left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Рассмотрим первый случай:

I случай. $0 < \sqrt{x+3} - x < 1$

Тогда

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \leq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3} - x)$

$x + 5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$2x + 5 \geq \sqrt{x+3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

больше 35), третий – $70+r_{11},\dots,70+r_{15}$, четвертый – $105+r_{16},\dots,105+r_{20}$, пятый – $140+r_{21},\dots,140+r_{25}$, причем $r_p\neq r_t$, $r_i\geq 1$, $r_i\leq 35$.

Сумма всех чисел запишется:

$S=0+r_1+0+r_2+\dots+0+r_5+35+r_6+35+r_7+\dots+35+r_{10}+70+r_{11}+\dots+70+r_{15}+$ $+105+r_{16}+\dots+105+r_{20}+140+r_{21}+\dots+140+r_{25}=r_1+r_2+\dots+r_{24}+r_{25}+0+5\cdot 35+$ $+5\cdot 70+5\cdot 105+5\cdot 140=r_1+\dots+r_{25}+0+175+350+525+700=r_1+\dots+r_{25}+$ $+1750.$

Сумма примет наименьшее значение, если $r_1+r_2+\dots+r_{25}$ примет наименьшее значение. Т.к. r_i принимает целые значения в диапазоне от 1 до 35, то наименьшее значение $r_1+r_2+\dots+r_{25}$ равно $1+2+\dots+25$, что равно сумме первых 25 членов арифметической прогрессии с первым членом и разностью 1, т.е.

$(r_1+r_2+\dots+r_{25})_{наим}=1+2+\dots+25=\frac{2+24}{2}\cdot 25=13\cdot 25=325.$

Тогда

$S_{наим}=1750+325=2075.$

Ответ: 2075.

Задание 2

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

Решение

$g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\sin((7-2)x)\sin((7+2)x)-\sin^2 7x-\cos^2 x-$ $-3=(\sin 7x\cos 2x-\cos 7x\sin 2x)(\sin 7x\cos 2x+\cos 7x\sin 2x)-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$

$(\sin 7x\cos 2x)^2-(\cos 7x\sin 2x)^2-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\sin^2 7x\cos^2 2x-\cos^2 7x\sin^2 2x-$
$-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\sin^2 7x\cos^2 2x-(1-\sin^2 7x)\sin^2 2x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=$
$=\sin^2 7x\cos^2 2x+\sin^2 7x\sin^2 2x-\sin^2 2x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\sin^2 7x(\sin^2 2x+\cos^2 2x-$
$-1)-\sin^2 2x-\cos^2 x-3=-(1-\sin^2 x)-\sin^2 2x-3=-4+\sin^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x=$
$=-4+\sin^2 x-2(\sin^2 x\cdot(1-\sin^2 x))=-4+\sin^2 x-2\sin^2 x+2\sin^4 x=2\sin^4 x-\sin^2 x-4.$

Тогда $g'(x)$ равна

$g'(x)=(2\sin^4 x-\sin^2 x-4)'=2\cdot 4\sin^3 x\cdot\cos x-\cos x\cdot 2\sin x$

Найдем крит. точки.

$8\sin^3 x\cdot\cos x-2\sin x\cos x=0;\ |:2$

$\sin x\cos x(4\sin^2 x-1)=0;$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=0,\\ \sin^2 x=\frac{1}{4};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ \sin x=\frac{1}{2},\\ \sin x=-\frac{1}{2};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Найдем значения функции в точках $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (через 2π значения повторяются, т.к. период синуса равен 2π).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ω_1 кас. $\omega_2 \Rightarrow O_2O_1 = 2r$

ω_1 кас. $\omega_3 \Rightarrow O_1O = 2r$

ω_2 кас. $\omega_3 \Rightarrow O_2O = 2r$, треугольник равносторонний.

Значит, $\angle OO_1O_2 = \angle O_1O_2O = \angle O_1OO_2 = 60°$.

Пусть K, P - точки касания ω_1, ω_2 и CD. $O_1K \perp CD$, $O_2P \perp CD \Rightarrow$ $O_1K \parallel O_2P$. $O_1K = O_2P = r \Rightarrow O_2PKO_1$ - параллелограмм, и $PK = O_1O_2 = 2r$.

Аналогично доказывается, что $LS = 2r$, $TQ = 2r$ (L, S - точки касания ω_2, ω_3 и AD; T, Q - ω_1, ω_3 и BC). Кроме того, O_2PKO_1 - прямоугольник.

Из четырехугольника O_1KDL $\angle KDL$ равен

$\angle KDL = 360° - 90° - 90° - (360° - 90° - 90° - 60°) = 180° - 120° = 60°$, и $DK = DL = KL$.

Докажем это. $\angle KO_1L = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$, и из $\triangle KO_1L$ по теореме косинусов $KL = \sqrt{r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 120°} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}r$; $\angle O_1KL = \angle O_1LK = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$ ($\triangle O_1KL$ - р/б). Тогда

$\angle DKL = 90° - 30° = 60°$; $\angle DLK = 90° - 30° = 60°$. Итак, $DL = DK = KL = \sqrt{3}r$.

$SA = AR$, $BQ = BR$ (R - точка касания ω_3 и AB), как отрезки касательных.

Итак,

$AD + BC - AB - CD = AS + SL + LD + BQ + TQ + TC - AR - BR - PC - DK - KP =$
$= AS - AR + BQ - BR + 2r + \sqrt{3}r + 2r + \sqrt{3}r - \sqrt{3}r - \sqrt{3}r - 2r = 2r$;

$2r = 10$;

$r = 5$.

2) $\angle AOB = \angle SOQ - \angle SOA - \angle QOB$.

$\angle SOQ = 360° - 90° - 90° - 60° = 120°$.

$\triangle SOA = \triangle ROA$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow \angle SOA = \angle ROA = \frac{1}{2}\angle SOR$.
Аналогично $\angle QOB = \angle ROB = \frac{1}{2}\angle QOR$.
Тогда
$\angle AOB = \angle SOQ - \angle SOA - \angle QOB = \angle SOR + \angle QOR - \frac{1}{2}\angle SOQ - \frac{1}{2}\angle QOR = \frac{1}{2}(\angle SOQ + \angle QOR) =$
$= \frac{1}{2}\angle SOQ = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ$.
3) $S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}\cdot OR\cdot AB = \frac{1}{2}r\cdot AB = 2,5\,AB$
$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}\cdot OB\cdot OA\cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 42 = \frac{21\sqrt{3}}{2}$
$\frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{5AB}{2}$
$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5} = 4,2\sqrt{3}$.
Ответ: 1) $r = 5$
2) $\angle AOB = 60^\circ$
3) $AB = 4,2\sqrt{3}$.

Задание 7

Пинокkио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1;35]$, $[36;70]$, $[71;105]$, $[106;140]$, $[141;175]$. Разность никаких 2 выбранных чисел не делится на 35. Найти наименьшее значение суммы всех выбранных чисел.

Решение

Разность 2 чисел делится на 35, если они дают при делении на 35 одинаковые остатки. Действительно, пусть $a \underset{35}{\equiv} k$, $b \underset{35}{\equiv} m$, тогда $a - b \underset{35}{\equiv} k - m$, и $k - m = 0$, только если $k = m$.
Значит, у выбранных чисел не найдется двух одинаковых остатков при делении на 35. Числа из первого промежутка можно представить как $0 + r_1$, $0 + r_2$, $0 + r_3$, $0 + r_4$, $0 + r_5$ (выбранные числа; r_i - остаток от деления на 35, причем если остаток равен 0, то $r_i = 35$). Аналогично второй промежуток - $35 + r_6, \dots, 35 + r_{10}$ (все числа

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

корней нет.
Из (3) $a=337$.
Итак, $a=337$ или $a=49$.
Ответ: при $a=49$ и $a=337$.

Задание 3

Найти количество 18-значных чисел, содержащих только цифры „0", „5" и „9" (каждая цифра встречается хотя бы раз) таких, что цифр „5" ровно шесть, и они идут подряд.

Решение

Пятерок ровно шесть, они идут подряд, т.е. их можно считать „одним знаком" 13-значного числа (12 цифр не равны 5, а еще 6-пятерки, идущие подряд; заменив эту группу, например, цифрой „7", получим 13-значное число).
Цифра „7" (т.е. группа пятерок) может стоять на любом из 13 мест. Далее „цифра „7"" – это „группа пятерок".

I случай

Цифра „7" стоит на первом месте. Тогда оставшиеся 12 цифр – любые 12-значные наборы из цифр „0" и „9", за исключением наборов „все нули" и „все девятки" (т.к. тогда встречается не каждая цифра). Таковых:
$2^{12}-2=4096-2=4094$ (набора).
Итак, в этом случае имеем 4094 числа.

II случай

Цифра „7" стоит не на первом месте. Тогда на первом месте стоит цифра „9" (число не может начинаться с нуля).

11 цифр, не равных 7 – любые 11-значные наборы из цифр „0" и „9", за исключением набора „все девятки", т.к. тогда в числе не будет ни одного нуля. Таковых

$2^{11}-1=2048-1=2047$ (наборов).

На любом месте со второго по тринадцатое может стоять цифра „7" (всего 12 мест), т.е. всего чисел

$2047\cdot 12=24564$ числа.

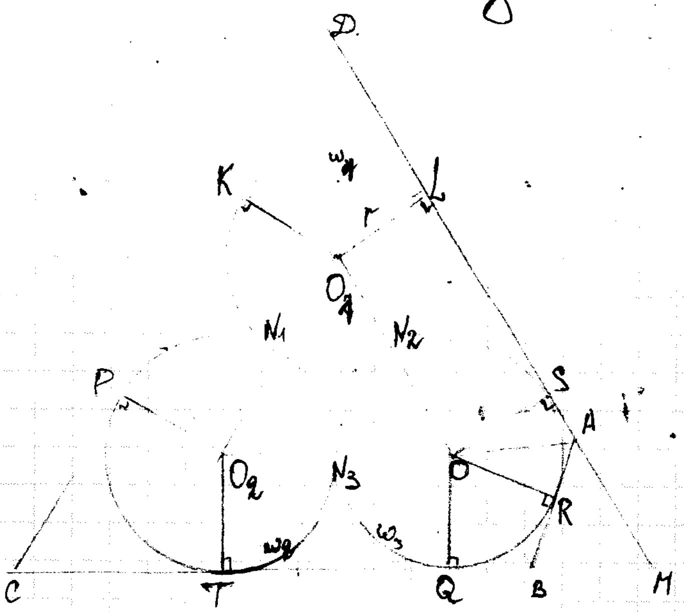
Итак, всего таких чисел

$24564+4094=28658$ чисел.

Заменив цифру „7" группой пятёрок, получим тот же результат.

Ответ: 28658 чисел.

Задание 4



Дано: $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – попарно кас-ся, радиус – r

ω_1 кас-ся AD, DC; ω_2 кас-ся CD, BC; ω_3 кас-ся AD, BC, BA

Найти: 1) r, если

Дано (1): $AD+BC-AB-CD=10$

2) $\angle AOB$

3) AB, если

Дано (3): $AO\cdot BO=42$

Решение

1) $\triangle O_1O_2O$ – равносторонний со стороной 2r. Докажем это.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

Парабола $y=x^2$ пересекает прямые $y=169$, $y=64$, $y=a$, высекая на каждой из них отрезок. При каких a из этих трех отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

Решение

Найдем координаты точек пересечения параболы с прямыми и квадраты длин высекаемых отрезков.

$x^2=169$

$x=\pm13 \Rightarrow$

точки с координатами $(13;169)$ и $(-13;169)$ - точки пересечения парабалы и прямой $y=169$, длина высекаемого отрезка (ее квадрат) l_1^2 равен

$l_1^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(13+13)^2+(169-169)^2=26^2=676.$

$x^2=64$

$x=\pm8 \Rightarrow$

точки с координатами $(8;64)$ и $(-8;64)$ – точки пересечения параболы и прямой $y=64$, квадрат высекаемого отрезка (длины его) l_2^2 равен

$l_2^2=(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2=(8+8)^2+(64-64)^2=16^2=256.$

Парабола высекает на прямой $y=a$ отрезок, поэтому уравнение $x^2=a$ имеет 2 различных корня, т.е. $a>0$, и эти корни равны:

$x=\pm\sqrt{a}$.

Значит, точки с координатами $(\sqrt{a};a)$ и $(-\sqrt{a};a)$ - точки пересечения парабалы и прямой $y=a$, а квадрат длины высекаемого отрезка

l_3^2 равен

$l_3^2=(x_5-x_6)^2+(y_5-y_6)^2=(\sqrt{a}+\sqrt{a})^2+(a-a)^2=(2\sqrt{a})^2=4a$, т.к. $a>0$.

Длины этих отрезков равны: $l_1=26$, $l_2=16$, $l_3=2\sqrt{a}$.

По теореме косинусов возможны 3 варианта:

$$\left[\begin{array}{l} l_1^2=l_2^2+l_3^2-2l_2\cdot l_3\cdot\cos 120^\circ, \\ l_2^2=l_3^2+l_1^2-2l_3\cdot l_1\cdot\cos 120^\circ, \\ l_3^2=l_1^2+l_2^2-2l_1\cdot l_2\cdot\cos 120^\circ. \end{array}\right.$$

Подставим значения и решим совокупность уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} 676=256+4a-2\cdot16\cdot2\sqrt{a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right), \\ 256=4a+676-2\cdot26\cdot2\sqrt{a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right), \\ 4a=256+676-2\cdot16\cdot26\cdot\left(-\frac{1}{2}\right); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 4a+32\sqrt{a}-420=0, & (1) \\ 4a+52\sqrt{a}+420=0, & (2) \\ 4a=1348; & (3) \end{array}\right.$$

Решим (1). Пусть $\sqrt{a}=t$, $t\geq0$, тогда

$4t^2+32t-420=0; \ |:4$

$t^2+8t-105=0;$

$D_1=4^2+105=121=11^2$

$t=-4\pm11=\left[\begin{array}{l}-15<0\\ 7\end{array}\right.$

Вернемся к прежней переменной.

$\sqrt{a}=7$

$a=49.$

Решим (2). Пусть $\sqrt{a}=p$, $p\geq0$, тогда

$4p^2+52p+420=0; \ |:4$

$p^2+13p+105=0;$

$D=13^2-4\cdot105=169-420=-251<0;$

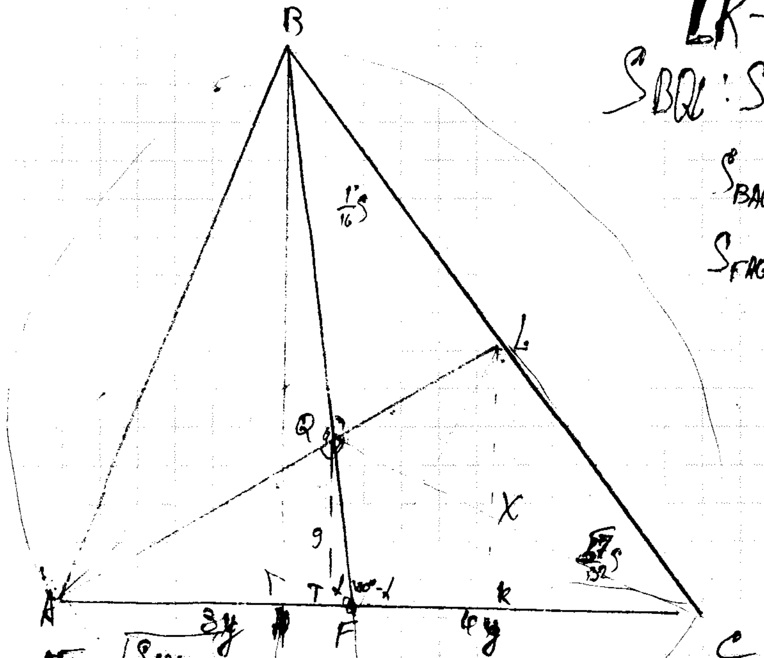
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-017, ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$LK - ?$

$S_{BQL} : S_{BAC} = \frac{1}{16}$

$S_{BAQ} : S_{BQL} = AQ : QL$

$S_{FAQ} : S_{BAQ} = FQ : QB$

$\frac{7}{16}$ $\frac{42}{\ }$ $\frac{7}{132}$

$S_{FQC} = \frac{4}{3} S_{FAQ}$

$S_{FAL} = \frac{3}{7} S_{LAC}$

$KL : QT = \sqrt{\frac{S_{ACL}}{S_{AQT}}} =$

$X : 9 =$

$S_{BAF} = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot \sin\angle \cdot BF$

$S_{BCF} = \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sin\angle \cdot BF$

$S_{FLC} = \frac{4}{7} S_{AC}$

~~$X : h = 7 : 64$~~

$S_{BAF} = \frac{3}{7} S_{ABC}$

$S_{BCF} = \frac{4}{7} S_{ABC}$

$\frac{1}{16} ABC : \frac{4}{7} ABC = \frac{7}{64}$ от S_{BFC}

~~$S_{QFC} = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{7} = \frac{132 - 7 - 48}{132} = \frac{67}{132} (S_{ABC})$~~

$\frac{4}{7} - \frac{1}{16} = \frac{64 - 7}{132} = \frac{57}{132}$

$h \cdot 7y = h \cdot 3y + (X \cdot 7y - 9 \cdot 3y) + \frac{1}{16}(h \cdot 7y)$

$\frac{BQ \cdot QL \cdot \sin\beta}{AQ \cdot QF \cdot \sin\beta}$

$7y \cdot \frac{15}{16} = 3 \cdot 7y^2 \cdot X - 9 \cdot 9y^2$

$\frac{7 \cdot 15}{16} = 21Xy - 81y$

$\frac{35}{16} = y(7X - 27)$ $\quad y = \frac{35}{16(7X-27)}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\ldots (\sin 5x - \sin 7x)(\sin 8x \cos x + \cos 8x \sin x) = (\sin 5x - \sin 7x) \sin 9x$

$2\sin 6x \cdot \sin(-x)$?

$\sin(7-2)x = \sin 7x \cos 2x - \cos 7x \sin 2x$

$\sin(7+2)x = \sin 7x \cos 2x + \cos 7x \sin 2x$

$\sin^2 7x \cos^2 2x - \cos^2 7x \sin^2 2x = \sin^2 7x \overset{\cos^2 2x}{-} \sin^2 2x + \sin^2 7x \sin^2 2x =$

$= \sin^2 7x - \sin^2 2x$

$\sin^2 x(1-\cos^2 x) = \sin^4 x = (\sin^2 x)^2$

$(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)$

$-2\sin^2 x(1-\sin^2 x) = -2\sin^2 x + 2\sin^4 x$

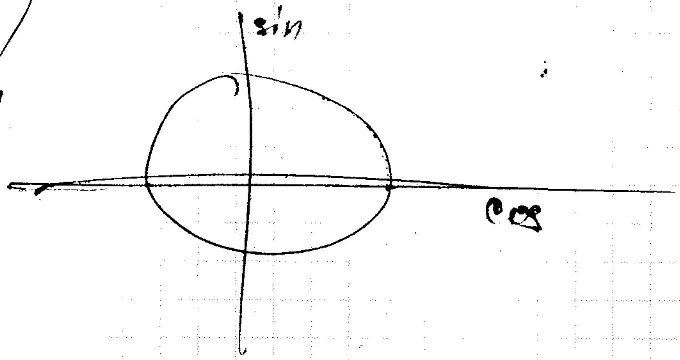
$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot (f(x))'$

~~$2\cos x \cdot (4\sin^3 x)' - \cos x \cdot (2\sin x)'$~~

~~$2\cos x \sin x(4\sin^2 x - 1) = 0$~~

~~$(2\sin^4 x)' - (\sin^2 x)' = 2(\sin^3 x)'$~~

$(2\sin^4 x)' = 2 \cdot$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-017
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=x^2$
$y=169$: отрезок длиной 26
$y=64$: отрезок длиной 16

$y=a$: отрезок длиной $2\sqrt{a}$

По т. косинусов

$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}(2\sqrt{a})^2 = 26^2+16^2+26\cdot 16\\ 26^2=(2\sqrt{a})^2+16^2+2\sqrt{a}\cdot 16\\ 16^2=(2\sqrt{a})^2+26^2+2\sqrt{a}\cdot 26\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4a=676+256+416 \Rightarrow a=337\\ 676=4a+256+32\sqrt{a}\\ 256=4a+676+52\sqrt{a}\end{array}\right.$$

$420=4t^2+32t$
$105=t^2+8t$
$D_1=4^2+105=121$
$t=-4\pm 11=\left[\begin{array}{l}-15\\7\end{array}\right. \Rightarrow a=49$

$4t^2+52t+420=0$
$t^2+13t+105=0$
$D=169-4\cdot 105<0$
$\varnothing$

26·26: 156, 52, 676
26·16: 156, 26, 416
676 + 256 + 416 = 1348
1348 : 4 = 337
420 − 169 = 251

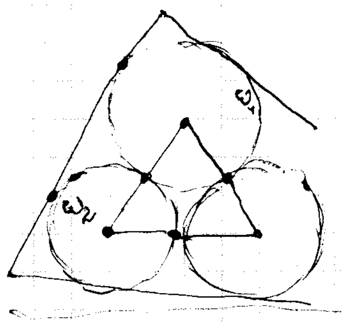
2047 · 12 = 4094 + 2047 = 24564 + 4094 = 28658

555555 или 9

1024
2048
4096

$AO=\frac{42}{BO}$

$AO^2+BO^2-2\cdot 42\cdot\frac{1}{2}=$
$=AO^2+BO^2-42$



$a^{\log_a b}=b$

$AO=\sqrt{r^2+x^2}$

$\sqrt{3}r$ 60

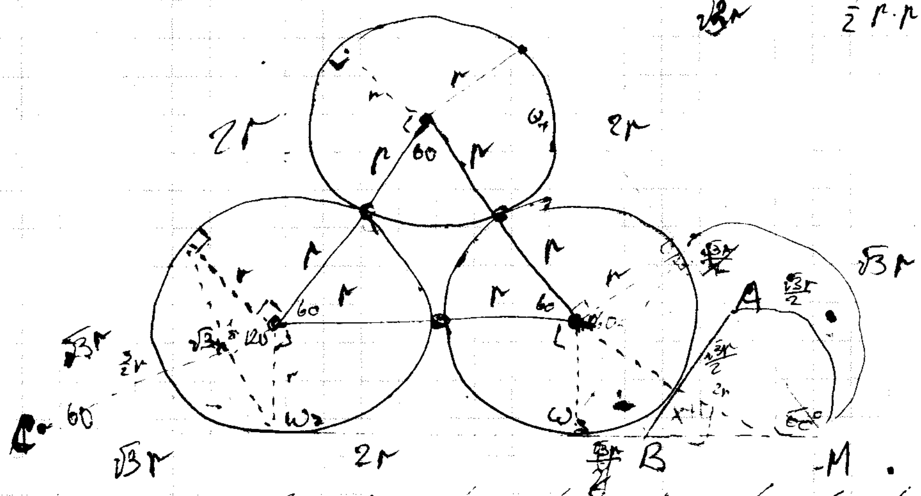
$\sqrt{3}r$

$r^2+r^2+r^2=3r^2$

$\sqrt{3}r$

$\frac{1}{2}r\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}r^2}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{3}r\cdot h$

$h=\frac{1}{2}r$



~~$\sqrt{3}r+2r+\frac{\sqrt{3}r}{2}+\sqrt{3}r+2r+\frac{\sqrt{3}r}{2}-\frac{\sqrt{3}r}{2}-\sqrt{3}r-\sqrt{3}r-2r$~~

~~$\frac{(4+\sqrt{3})r}{2}=10$~~

~~$r=\frac{20}{4+\sqrt{3}}$~~

$x+2r+\sqrt{3}r+\sqrt{3}r+2r+y-\sqrt{3}r-2r-\sqrt{3}r-x-y$

$2r=10 \qquad r=5$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ $\quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

1) $\sqrt{x+3} - x > 1$

$\sqrt{x+3} > 1 + x$

$\left[\begin{cases} x+3 > 1+2x+x^2 \\ x \geq -1 \end{cases}\right.$

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad x \in [-3; -1)$

$x^2 + x - 2 < 0$

$(x-1)(x+2) < 0$

$-2 \quad 1$

$(-2; 1) \cup [-3; -1)$

$[-3; 1)$

$[-3; 1)$

$x \geq -5 \rightarrow ОДЗ$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

1

$25 \cdot 13 = 75 + 250 = 325$

25 разных остатков

$0 \cdot 35 + a + b + c + d + e + 1 \cdot 35 + f + g + h + i + j + 2 \cdot 35 + k + l + m + n + o + 3 \cdot 35 + p + q + r + s + t +$
$+ 4 \cdot 35 + u + v + w + x + y$

$\sin 5x = \sin(4x + x) = \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x =$

$\sin 9x = \sin 8x \cos x + \cos 8x \sin x$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\alpha + \cos\beta$

7 $\quad$ 2

$\frac{1}{2}(\cos 7x - \cos 9x)$

refes sin?

$-\sin^2 7x$

$(\sin 7x)^2 = (\sin(8x - x))^2 =$
$= (\sin 8x \cos x - \cos 8x \sin x)^2 =$
$= \sin^2 8x \cos^2 x + \cos^2 8x \sin^2 x -$
$- 2\sin 8x \cos 8x \sin x \cos x$

$\sin 4x \sin 8x \cos^2 x + \cos 4x \cos 8x \sin^2 x + \sin 4x \cos 8x \sin x \cos x +$
$+ \sin 8x \cos 4x \sin x \cos x - (\sin 8x \cos x - \cos 8x \sin x)^2 - \cancel{\cos^2 x} =$
$= \sin 8x \cos x(\cos 4x \sin x + \sin 4x \cos x) + \sin 8x \cos x(-\sin 8x \cos x + \cos 8x \sin x) =$
$= \sin 8x \cos x(\sin(5x) + \sin(-7x))$

$\cos 8x \sin x(\cos 4x \sin x + \sin 4x \cos x) + \cos 8x \sin x(\cos x \sin 8x - \cos 8x \sin x) =$
$= \cos 8x \sin x(\sin 5x + \sin(-7x))$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)