МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 5-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Пусть отрезок отсеченный параболой $y=2x^2$ и прямой $y=98$ равен $b$, $y=2x^2$ и $y=18$ — $c$, $y=2x^2$ и $y=a$ — $d$

Найдем длину отрезков $b$ и $c$:

$2x^2=98 \Leftrightarrow x^2=49 \Leftrightarrow x=\pm 7 \Rightarrow b=14$

$2x^2=18 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3 \Rightarrow c=6$

Тогда возможно два случая: 1) $d$ — сторона, лежащая против угла в $120°$ и 2) $b$ — сторона, лежащая против угла в $120°$

Рассмотрим 1-ый случай: Тогда по т. косинусов

$d^2=b^2+c^2-2bc\cos 120 \Leftrightarrow d^2=14^2+36+2\cdot 14\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=$

$=196+36+84=316 \Rightarrow d=2\sqrt{79}$

т.к. $d=2\left|\sqrt{\frac{a}{2}}\right|$ $\left(2x^2=a \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$, то $a=158$

Рассмотрим 2-ой случай: По т. косинусов

$b^2=d^2+c^2-2dc\cos 120° \Leftrightarrow 196=d^2+36+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6d \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d^2+6d-160=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=10 \\ d=-16 \end{array}\right.$ — не подходит т.к. для параболы $E=[0;+\infty)$

$d=2\left|\sqrt{\frac{a}{2}}\right| \Rightarrow a=50$

Ответ: 50; 158

№2. $g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g'(x)=\sin 3x\cdot\cos 7x+\cos 3x\cdot\sin 7x-2\sin x\cos x-$

$-2\sin 5x\cos 5x=\sin(3x+7x)-\sin 2x-\sin 10x=$

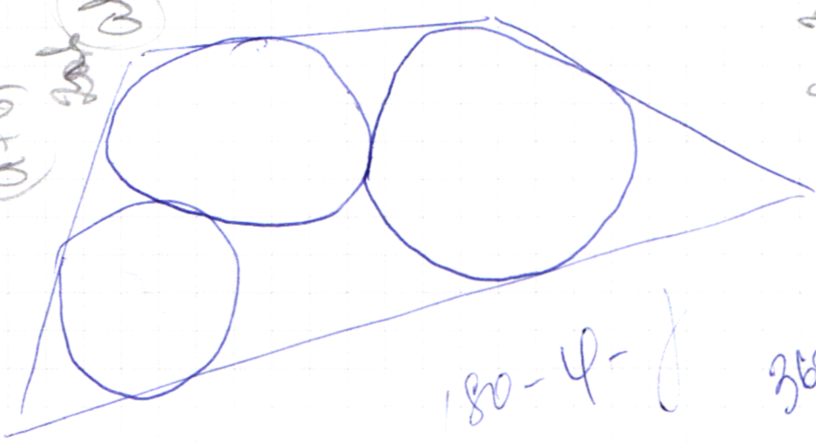
$=-\sin 2x$

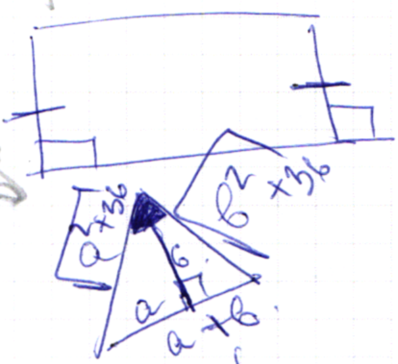
[1;45] [46;90] [91;135] [136;180] [181;225]

↓A

B

A − B : 45





$(a+b)^2 = a^2+b^2+36\cdot 2 - 2\cdot 6\cdot\frac{(a+b)}{\sin\alpha}\cos\alpha$

$58 = 36 - 58\cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{22}{58} = -\frac{11}{29}$

$(a+b)^2 = a^2+36+b^2+36-2\sqrt{(a^2+36)(b^2+36)}\cos\alpha$

$2ab = 36\cdot 2 - 2\cdot 6(a+b)$

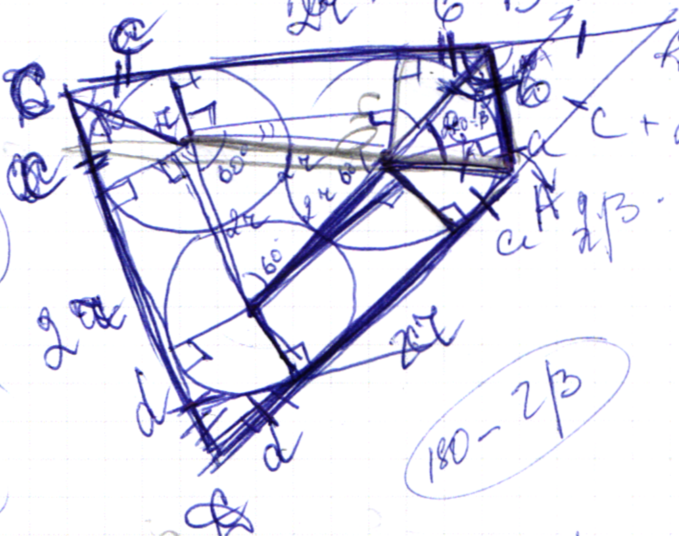
180 − φ − γ

360 − α = γ

α + β = 180

360° − 180° + β = γ

180 + β = γ



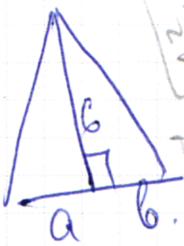
AD + BC − AB − CD = 12.

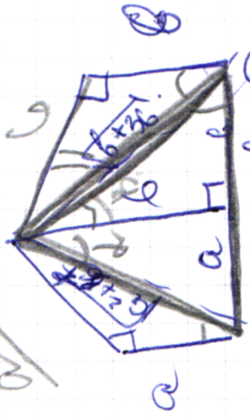
180 − 2β

$d + 2r + a + b + 2r + c$

$a - b - c - 2r - d = 12.$

r = 6.





$S = \frac12(a+b)\cdot 6 = \frac12\sqrt{(a^2+36)(b^2+36)}\cdot\sin\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-011
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g'(x)=0$

$-\sin 2x=0$

$2x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

Максимальное значение — синус изменяет значение с „−" на „+", поэтому $2x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Минимальное значение — синус изменяет значения с „+" на „−", поэтому $2x=\pi+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

Ответ: max — $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; min — $\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

№3 1) $\underbrace{8\ldots 8}_{7\text{ цифр}}\underbrace{8\ldots\ldots\_\_}_{10\text{ цифр}}$ т.к. "0" и "7" должны хотя бы раз встречаться, то ~~крайние~~ для „крайнего" случая последние две цифры "7" и "0". При этом предположим, что предыдущие 8 цифр — "8". Теперь будем „убирать" по одной последнюю "8" заменяя её на "7" и "0". Кол-во 17-значных цифр при этом увеличивается в 2 раза. Поэтому кол-во вариантов $2^{10}$

2) $\underbrace{\_}_{1\text{ цифра}}\underbrace{8\ldots 8}_{7\text{ цифр}}\underbrace{\_\_\_\_}_{9\text{ цифр}}$ Первой может стоять только 7, а последние 9 цифр рассматриваются точно так же как и в пункте 1. Поэтому кол-во вариантов $2^9$. Далее можно „передвигать" ~~7~~ "8" на разряд назад. При этом кол-во ~~цифр~~ вариантов остается $2^9$.

В итоге, получаем кол-во вариантов $2^{10}+9\cdot 2^9=5632$

Ответ: 5632

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 & (1) \\ \sqrt{x+7}-x \leq x+4 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} 0<\sqrt{x+7}-x < 1 & (3) \\ \sqrt{x+7}-x \geq x+4 & (4) \end{cases} \end{array}\right. \\ x+4>0 \end{cases}$$

(1) $\sqrt{x+7} > x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ (\sqrt{x+7})^2 > (x+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[-1;2) \\ x\in[-7;-1) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-7;2)$$

(2) $\sqrt{x+7} \leq 2x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ (2x+4)^2 \geq x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-2;-\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

(3) $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x<1 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}<x+1 \\ \sqrt{x+7}>x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+7 < x^2+2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x^2+x-6>0 \\ \left[\begin{array}{l} x\in\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right) \\ x\in[-7;0) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-7;-3)\cup(2;+\infty) \\ x\in[-7;0)\cup\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-7;-3) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-011 ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) $\sqrt{x+7} - x \geq x+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+4 \geq 0 \\ x+7 \geq 4x^2+16x+16 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ 4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right) \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -7 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right] \\ x \in [-7; -2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \cancel{x \in \varnothing}$

$\Leftrightarrow x \in [-7; -2) \cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right]$

Возвращаемся к исходной системе

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in [-7; 2) \\ x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x \in [-7; -3) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right) \\ x \in [-7; -2) \cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right] \end{cases} \end{array}\right. \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \\ x \in [-7; -3) \end{array}\right. \\ x > -4 \end{cases} \Leftrightarrow$

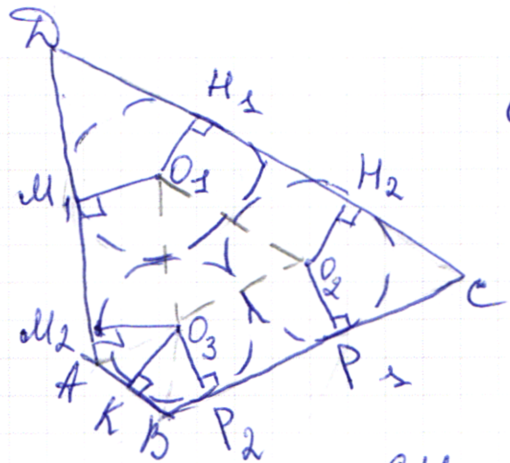
$\Leftrightarrow x \in (-4; -3) \cup \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

Ответ: $(-4; -3) \cup \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

№4 Пусть центр окружности $\omega_1 - O_1$, $\omega_2 - O_2$, $\omega_3 - O_3$. Соединим т. $O_1$, $O_2$, и $O_3$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)




а) Четырёхугольники $O_1O_2H_2H_1$, $O_2O_3P_2P_1$, $M_1M_2O_1O_3$ – прямоугольники (для $O_1O_2H_2H_1$: $O_1H_1 \perp CD$, $O_2H_2 \perp CD$, $O_1H_1 = O_2H_2$; аналогично для других).

$CH_2 = CP_1$; $BP_2 = BK$; $AK = AM_2$; $DM_1 = DH_1$ – т.к. касательные к окружностям, проведенные из одной точки. Пусть радиус окружностей равен $r$. Тогда

$$AD + BC - AB - CD = 2r + DM_1 + AM_2 + 2r + BP_2 + CP_1 - AK - BK - 2r - CH_2 - DH_1 = 2r = 12 \Rightarrow r = 12$$

б) Ответ: 12

№6 Рассмотрим $\triangle BFC$ и секущую $AL$. Тогда по т. Менелая $\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BQ}{FQ}\cdot\frac{AF}{AC} = 1$

Пусть $AF = 2x$, $FC = 5x$

$$\frac{S_{BFC}}{S_{AFC}} = \frac{\frac{1}{2}BF\cdot 5x\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}BF\cdot 2x\ \sin(180^\circ-\alpha)} = \frac{5}{2}$$

$$S_{BFC} + S_{AFC} = S_{ABC}$$

Пусть $S_{ABC} = 7y$ $(7y = 5y + 2y = S_{BFC} + S_{AFC})$

Если $\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$, то $S_{BQL} = \frac{35y}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-011 ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{x+7} - x < 1$.

$\sqrt{x+7} < x+1$.

$\begin{cases} x+1 \geq 0. \\ x+7 < x^2+2x+1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ (x+3)(x-2) > 0 \end{cases}$

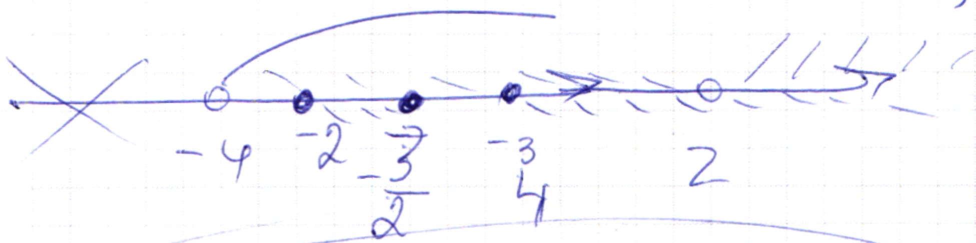
$x \in [2; +\infty)$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$.

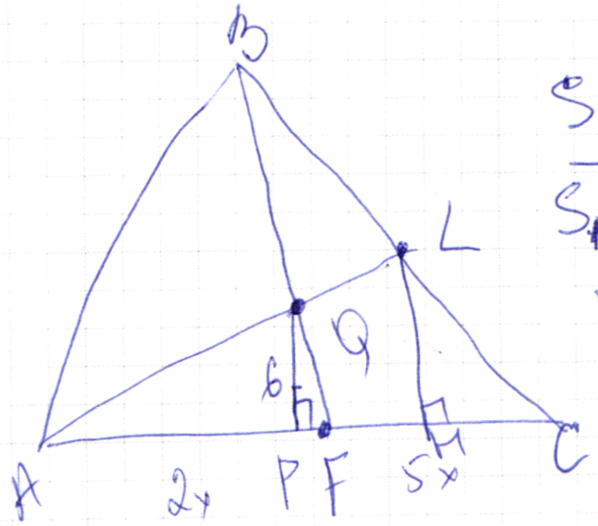
$\left[ \begin{array}{l} x \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right]. \\ \begin{cases} 2x+4 < 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\begin{cases} 2x < -2. \\ x \geq -7 \end{cases}$

$x \in [-7; -2) \cup \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right]$.

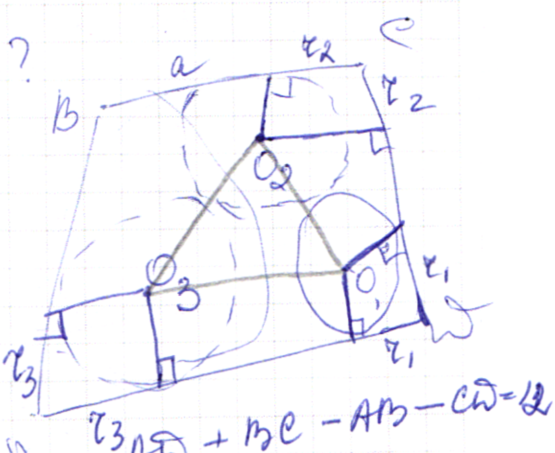



$x \in \left[-2; -\frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$

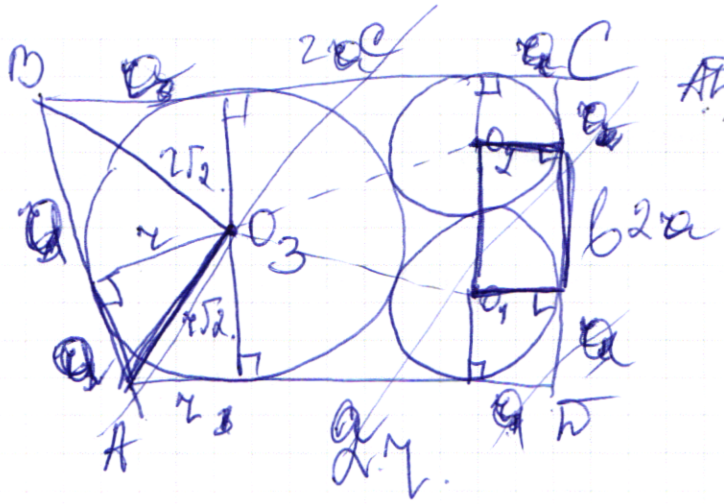



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$.

$LH - ?$




$AD + BC - AB - CD = 12$

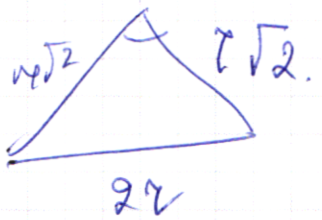


$AD + BC - AB - CD = 12.$

$4r + 4r - 2r - 4r = 12.$

$2r = 12$

$r = 6.$



$4r^2 = 2r^2 + 2r^2 - 2 \cdot 2 \cdot r^2 \cos \angle$

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x + \cos^2 5x - \sin^2 x + 4.$

$(\cos^5 x - \sin x)$

~~sin3x s~~ $uv = u'v + v'u$

$(uv)' = u' \cdot v'$ $(\sin 3x \sin 7x)' = \cos 3x \sin 7x + \cos 7x \sin 3x.$

$\sin 10x. - 2\sin 10x - 2\sin 2x = 0.$

$\sin' \alpha = \cos \alpha$

$\cos' \alpha = -\sin \alpha.$

$-\sin 10x - 2\sin 2x = 0.$

$g'(x) = \cos 3x \cdot \sin 7x + \cos 7x \cdot \sin 3x + 2\cos 5x \cdot (-\sin 5x) -$

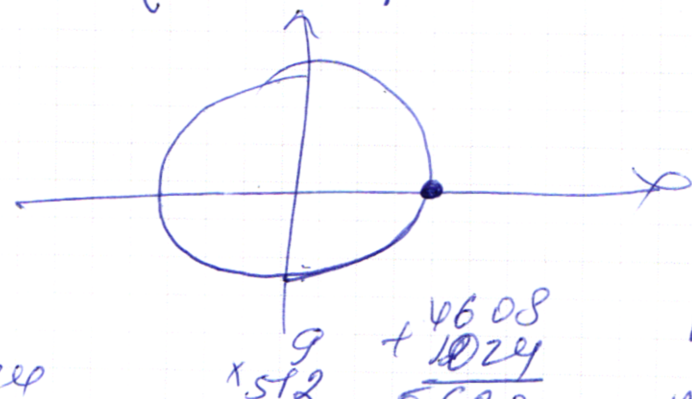
$- 2 \sin x \cos x$

$\sin(7x + 3x) - \sin 10x - \sin 2x = 0$

$\sin 2x = 0.$

$2x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$



$\max: 2x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

$\min = 2x = 2\pi n, n \in Z.$

$x = \pi n, n \in Z.$

1024 × 512

9 × 512 = 18 ... 4608

45 ... 4608

4608 + 1024 = 5632

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

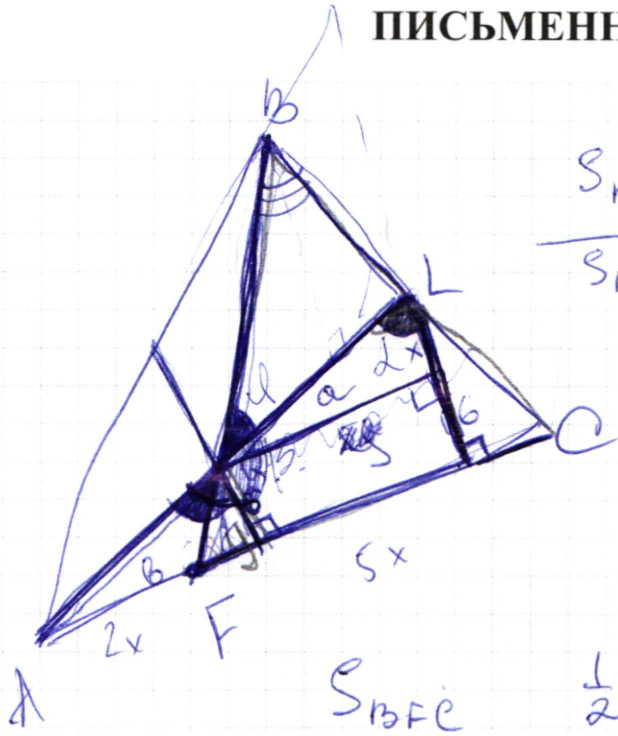
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

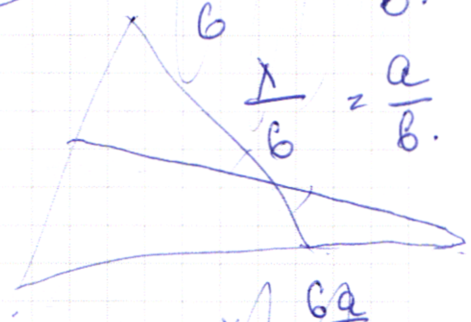
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$\gamma + \varphi = \alpha$.

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$.

$\frac{x+b}{6} = \frac{a+b}{b}$.



$\frac{x}{6} = \frac{a}{b}$.

$x = \frac{6a}{b}$.

$\frac{\frac{6a}{b} + b}{6} = \frac{a+b}{b}$.

$\frac{S_{BFC}}{S_{AFC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BF \cdot 5x \sin\alpha}{\frac{1}{2} BF \cdot 2x \cancel{\sin}(180-\alpha)} = \frac{5x}{2x}$.

$d = \frac{b}{\cos\gamma}$

$S_{BFC} + S_{AFC} = 7x = 12y$.

$x = \frac{12y}{7}$.

$2\beta = 5y$.

$\alpha = \frac{7 \cdot 5}{12} = \frac{35}{12}$.

$ab + b = a + b$

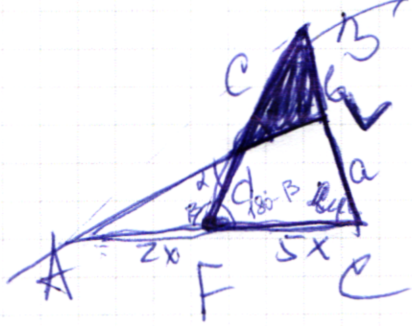
$a + b = ab$

$b = 1$

$x = 6a$

$\frac{S_{BQL} = \frac{1}{2} BQ \cdot QL \sin\alpha}{S_{AFQ} = \frac{1}{2} QF \cdot AF \sin\alpha} = \frac{BQ \cdot QL}{QF \cdot 2x}$

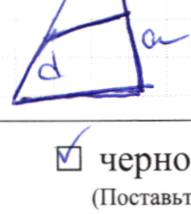
$\frac{35}{12} x$




$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{2x}{7x} = 1$

$7x = 12y$

$5x = \frac{5 \cdot 12}{7}$




$\frac{1}{2} cb \sin\alpha = 5y$

$\frac{1}{2}(a+b)(b+d)\sin\alpha = \frac{5 \cdot 12}{7}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

0

8888888 8888888 ~~88~~70

7 10

07 → 707, 007

70 → 770, 070

2

0707
0007
7707
7007

+ 2

07 → 3, A → 4, B → 5

70 →

$2^{n-1}$

$n-1=3$

$n=4$

$2^a$ a - номер разряда с конца.

$2^{10} = 1024$ + . $1024 / 2 = 512$

888 888880

7 1 7 9

1 + 1.

$2^9 \cdot 9 + 2^{10} =$

$= 512 \cdot 9 + 1024.$

$2^9 =$

0 → 2 → A → 3
7 →

7 1 7 1

7 $2^2$

7 0 $2^2$ 7 8 $2^8$

$2^8 \times 2$.

7 2 7 3 6

$2^7 \times 4$

$2^6 \times 8$

$2^9 \times 8$

4 6

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{cb}{(a+b)(c+d)}=\frac{7}{12},$$

$$\frac{ac}{bd}=\frac{7}{2}.$$

$$\frac{cb}{ac+bc+ad+bd}=\frac{7}{12}.$$

$$ac=\frac{7bd}{2}.$$

$$\frac{ac+ad+bd}{cb}+1=\frac{12}{7}.$$

$$\frac{\frac{9bd}{2}+ad}{cb}=\frac{5}{7}.$$

$$\frac{d\left(\frac{9}{2}b+a\right)}{cb}=\frac{5}{7}.$$

$$\times\ 9 \quad 14$$
$$36$$
$$+9$$
$$126.$$
$$+81$$
$$207$$
$$+196$$
$$403$$

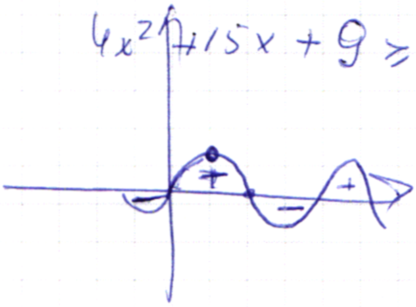
$$x^2+2x+1<x+7$$

$$x^2+x-6<0.$$

$$(x+3)(x-2)<0.$$


$$4x^2+16x+\cancel{16}-x-7$$

$$4x^2+15x+9\geq 0.$$



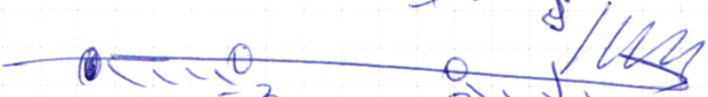

$$\frac{6a+6b}{\sqrt{(a^2+36)(b^2+36)}}:\frac{a}{a^2+36}\cdot\frac{6}{b^2+36}$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$$

$$\sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}$$

$$\cos y=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+36}}.$$

$$a+b=a^2$$




$$\frac{1+\sqrt{29}}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+36}}\right)^2}=\frac{a^2}{a^2+36}.\quad\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{a^2+36}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{36}{a^2}}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-011

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \\ \begin{cases} 0<\sqrt{x+7}-x<1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \end{array}\right.$$

$x+4>0.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in[-7;2) \\ x\in[-2;-\frac{3}{2}]\cup[-\frac{3}{4};+\infty) \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[2;+\infty). \\ x\in[-7;-2)\cup[-\frac{3}{2};-\frac{3}{4}] \end{cases} \end{array}\right. \\ x>-4 \end{cases}$$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x.$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}.$

$$\begin{cases} 2x+4\geq 0. \\ (2x+4)^2 \geq x+7 \end{cases}$$

~~~~

$$\begin{cases} x\geq -2. \\ 4x^2+16x+16-x-7\geq 0 \end{cases}$$

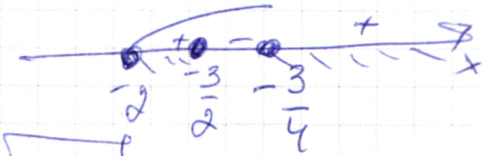
$4x^2+15x+9\geq 0.$

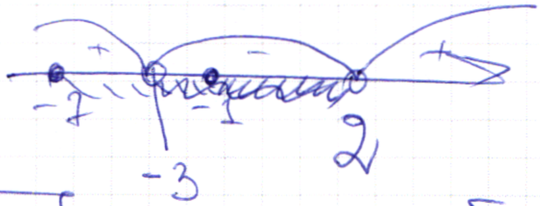
$D=225-16\cdot 9=$
$=9(25-16)=81$

$x_1=\frac{-15+9}{16}=\frac{-6}{16}=-\frac{3}{4}$

$x_2=\frac{-15-9}{16}=-\frac{24}{16}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}.$

$4(x+\frac{3}{4})(x+\frac{3}{2})\geq 0.$





$\sqrt{x+7}-x>0.\quad x\in[-7;+\infty).$

$x \geq \sqrt{x+7}>x$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0. \\ x+7\geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>x^2 \\ x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2-x-7>0.$

$D=1+28=29$

$x_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\sqrt{x+7}>x+1.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1<0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\geq 0 \\ (x+7)>x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2+2x+1-x-7<0.$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x\geq -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$$

$(x+3)(x-2)<0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_ (Нумеровать только чистовики)
~~~~

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$-2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\alpha - \cos\beta.$

$2\sqrt{79} = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$ $\alpha + \beta = 6x$

$\alpha - \beta = 14x$ $d = 2x$

$79 = \frac{a}{2}$ $2\alpha = 20x$ $x = 5$

$a = 79 \cdot 2.$ $\alpha = 10x$ $25 = \frac{a}{2}$

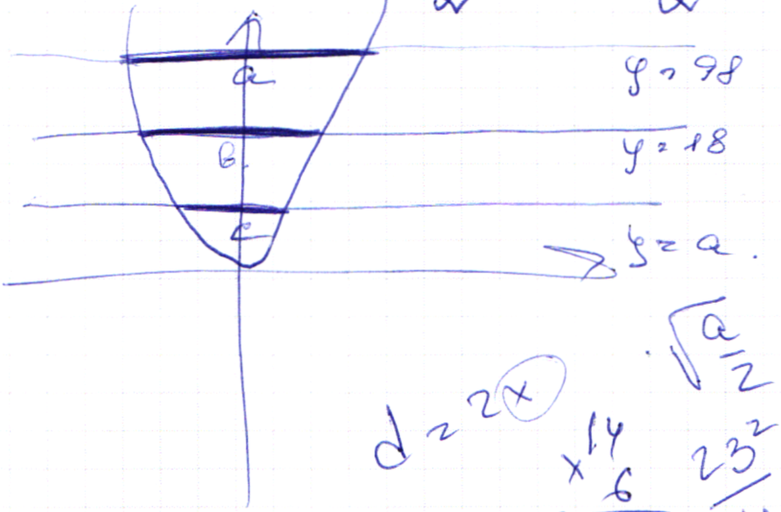
$\beta = -4x.$ $a = 5$

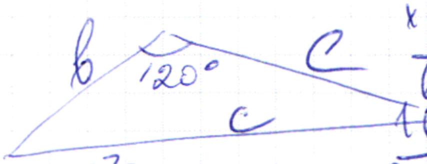
$g(x) = -\frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = -\frac{\sin 4x}{2} + \frac{\sin 10x}{2} - 2\sin x \cos x - 2\cos 5x \sin 5x$

$-2\sin 2x.$ $-2\sin 10x.$




$\times\begin{array}{r}162\\14\\\hline 648\\162\\\hline 2268\end{array}$

$\sqrt{\frac{a}{2}}$ $a = \frac{23^2}{2}$ or

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120°$

$d = 2x$

$\times\begin{array}{r}14\\6\\\hline 84\end{array}$ $\frac{23^2}{4} = \frac{a}{2}$ $2x^2 = 98$ $\times\begin{array}{r}81\\2\\\hline 162\end{array}$ $+\begin{array}{r}196\\81\\\hline 277\end{array}$

$14^2 = 36 + c^2 + 6c.$ $+\begin{array}{r}84\\36\\\hline 120\end{array}$ $x^2 = \frac{98}{2} = 49$

$c^2 + 6c + 36 - 14^2 = 0.$ $x = \pm 7.$ $a = 14$

$+\begin{array}{r}120\\196\\\hline 316\end{array}$

$4(9 - 49) = 0$ $2x^2 = 18$

$c^2 + 6c - 160 = 0.$ $x^2 = 9$ $b = 6.$

$D = 36 + 4 \cdot 160 =$ $\times\begin{array}{r}18\\18\\\hline 4\end{array}$ $x = \pm 3$

$= 4 \cdot 169$

$c_1 = \frac{-6 + 2 \cdot 13}{2} = -3 + 13 = 23.$ $316 : 4 = 79$ $a = 23$

$c_2 = \frac{-6 - 2 \cdot 13}{2} < 0.$ $-13 - 3 =$

$c^2 = 14^2 + 81 + 2 \cdot 14 \cdot 81 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 196 + 81 + 2 \cdot 14 \cdot 81 =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)