

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕСНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-022
Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & \text{№ 2} \\
 g(x) &= \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \\
 &= \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{\cos 10x + 1}{2} + 4 = \\
 &= \frac{\cos 4x - \cos 10x - 1 + \cos 2x + \cos 10x + 1}{2} + 4 = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \cos 4x + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 4 = \frac{1}{2} (2\cos^2 2x - 1) + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 4 = \\
 &= \cos^2 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + 4 = \cos^2 2x + \frac{1}{2} \cdot \cos 2x + \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2 \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + 0 = \\
 &= -4 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x - \sin 2x
 \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ - ищем крит. точки.

$$4 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x (4 \cos 2x + 1) = 0$$

$$\sin 2x = 0$$

$$2x = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{4}$$

Можно не искать значение x , т.к. уже имеем готовое значение выражения $\cos 2x$, из которого состоит $g(x)$.

Подставим значение $\cos 2x$ в $g(x)$:

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{7}{2} &= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \\
 &= \frac{1}{16} - \frac{2}{16} + \frac{58}{16} = \frac{55}{16} < 4
 \end{aligned}$$

Ответ: $\min_{x \in D(g)} g(x) = \frac{55}{16}$
 $\max_{x \in P(g)} g(x) = 5$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1 \quad \text{N5}$$

$$\begin{aligned} &\updownarrow \\ &(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}-x) \geq 0 \end{aligned}$$

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7}) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(\sqrt{x+7}-2x-4) \leq 0$$

Найдем нули $f(x) = (\sqrt{x+7}-x-1) / (\sqrt{x+7}-2x-4)$:

$$\sqrt{x+7} = x+1$$

$$x \geq -1$$

$$x+7 = x^2 + 2x + 1$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 25$$

$$x = -3 \text{ и } 2$$

$$\sqrt{x+7} = 2x+4$$

$$x \geq -2$$

$$x+7 = 4x^2 + 16x + 16$$

$$4x^2 + 15x + 9 = 0$$

$$D = 225 - 16 \cdot 9 = 81$$

$$x = -3 \text{ и } -\frac{3}{4}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \geq -7 \\ \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ x \neq 2 \\ x \in [-7; 0] \cup (0; \frac{1+\sqrt{25}}{2}) \end{cases}$$

↓

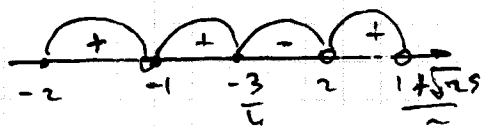
$$x \in (-4; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{25}}{2})$$

I $x \geq -1$



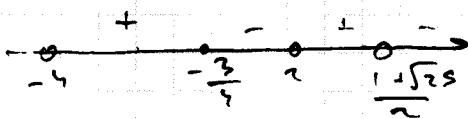
$$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$$

II $x \geq -2$, тогда при $x \in [-2; 1)$: $\sqrt{x+7} - x - 1 > 0$



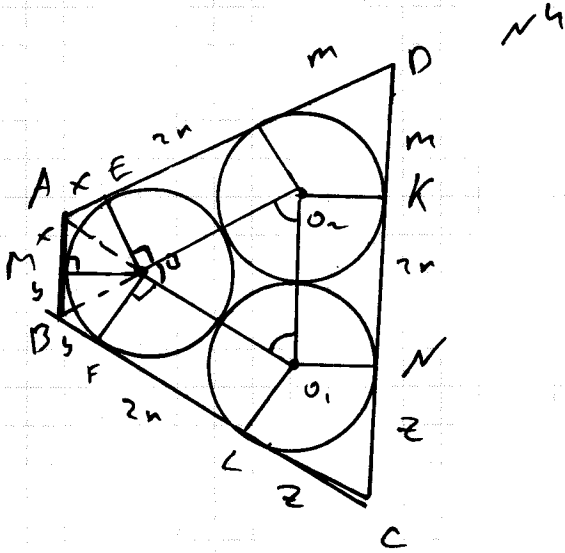
$$x \in [-\frac{3}{4}; 2)$$

III $x \geq -4$, тогда при $x \in (-4; -3)$: $\sqrt{x+7} - 2x - 4 \geq 0$



Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Решение

Дано: $r_1 = r_2 = r_3$;

$AD + BC - AB - CD = 12$;

O - центр окр. ω_3

$AO \cdot BO = 58$

Найти: а) r_1, r_2, r_3

б) $\angle AOB$

в) AB

1) $O_2 K \perp BC$; $O_1 N \perp BC \Rightarrow O_2 O_1 \parallel BC$;

$O_2 O_1 = KN = 2r_1 \Rightarrow BC = m + 2r + z$

2) $LC = NC$ (по теореме о касательных) $\Rightarrow LC = z$

Аналогично для других сторон, получим:

$BC = m + 2r_1 + z$; $AB = x + y$;

$AD = x + 2r_1 + m$; $BC = y + 2r_1 + z$;

3) $AD + BC - AB - CD = 12$

$$x + 2r_1 + m + y + 2r_1 + z - x - y - m - 2r_1 - z = 12$$

$$2r_1 = 12$$

$$r_1 = 6$$

4) AO - биссектриса $\angle EOM$; BO - биссектриса $\angle NOF$;

$$\angle EOF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$$

№ 7

Условие и разность любых двух выбранных чисел не делится на 45 означает, что все 6 чисел при делении на 45 будут иметь разные остатки. Всего чисел 30, а значит и остатков 30. Чем меньше будут числа, тем меньше будет их сумма. Заметим, что начало каждого промежутка имеет остаток от деления на 45 равный 1. В каждом промежутке по 45 чисел \Rightarrow остатки будут повторяться. Т.к. чисел 30 то действует следующий образ; из ~~первого~~ ^{последней} ~~промежутка~~ ^{промежутка} берем первые 6 чисел (у них разные остатки), из ~~следующего~~ ^{следующего} берем 6 чисел, начиная с 7-ого (+6), и т.д.

Получим такие числа:

~~136, 137, 138, 139, 140, 141~~
~~97, 98, 99, 100, 101, 102~~
~~58, 59, 60, 61, 62, 63~~

с 1-ой позиции
с 7-ой позиции
с 13-ой позиции

5:
(180) 181, 182, 183, 184, 185, 186
(147) 142, 143, 144, 145, 146, 147
(104) 103, 104, 105, 106, 107, 108
(61) 64, 65, 66, 67, 68, 69
(18) 25, 26, 27, 28, 29, 30

с 1-ой позиции (остатки с 1 по 6)
с 7-ой позиции (остатки с 7 по 12)
с 13-ой позиции (остатки с 13 по 18)
с 19-ой позиции (остатки с 19 по 24)
с 25-ой позиции (остатки с 25 до 30)

Сложим числа и получим их сумму.

Ответ: 3165

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1

ОДЗ:
 $a > 0$

$2x^2 = 58$
 $x^2 = 29$
 $x = \pm 7$

$2x^2 = 18$
 $x^2 = 9$
 $x = \pm 3$

$2x^2 = a$
 $x^2 = \frac{a}{2}$
 $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}$

I

II

III

Длина отрезка $x_1, x_2 = 14$

Длина отрезка $x_3, x_4 = 6$

Длина отрезка $x_5, x_6 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

По теореме косинусов:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos \angle A$$

I $196 = 36 + 29 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{2a} \cdot \frac{1}{2}$

$$160 = 2a + 6\sqrt{2a}$$

$$80 - a = 3\sqrt{2a}$$

$$6400 - 160a + a^2 = 36 \cdot 2a$$

$$a^2 - 778a + 6400 = 0$$

$$D = 31684 - 25600 = 6084$$

$$\sqrt{D} = 78$$

$$a = 50 \text{ и } 128$$

$$\text{I)} \quad 36 = 2a + 196 - 2 \cdot \sqrt{2a} \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{-160}{20} = \frac{2a}{20} + \frac{14\sqrt{2a}}{20}$$

Ø

$$\text{II)} \quad 2a = 36 + 196 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2a = 232 + 84$$

$$2a = 316$$

$$a = 158$$

Ответ: $a = 158; 50; 128$

№3

* * * * * * * | * | * | * | * | * | * | * | * | *

Всего способов раскрасить раз из семи 8 - 12

способы:

1) В начале семь 8; если в конце ноль, то способов выбора оставшихся цифр $2^9 - 1 = 511$ (не подходит случай, когда один нуль), если в конце 7, то также 511 способов; всего 1022

2) В начале 7 (ноль не может быть), затем раз из 8 и $2^9 = 512$ способов выбора оставшихся цифр

Для оставшихся 10 способов кол-во вариантов расстановки будет $10 \cdot 512$ (все также как и во 7-ом случае, только меняются позиции цифр)

Тогда всего способов составления нулевой

17 значного числа: $1022 + 11 \cdot 512 = 1022 + 5632 = 6654$

Ответ: 6654

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including various algebraic and trigonometric calculations and arithmetic problems.

Examples of work shown:

- $$\begin{array}{r} 42 \\ + 42 \\ \hline 84 \\ \hline 168 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 232 \\ + 232 \\ \hline 464 \\ + 696 \\ \hline 1160 \end{array}$$
- $$53824 - 25600 = 28224$$
- $$\begin{array}{r} 24400 + 3824 = 28224 \\ \hline 770 \quad | \quad 54 \\ \hline 122 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 6084 \\ - 42 \\ \hline 788 \\ - 168 \\ \hline 104 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 178 \\ + 178 \\ \hline 356 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 232 \\ + 84 \\ \hline 316 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 178 \\ + 178 \\ \hline 356 \\ + 1246 \\ \hline 1424 \\ + 178 \\ \hline 1602 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 4400 \\ + 1684 \\ \hline 6084 \end{array}$$
- $$\begin{array}{r} 6084 \\ - 58 \\ \hline 6026 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$y = 2x^2$$

903

$$\begin{array}{r} 232 \\ + 232 \\ \hline 464 \\ - 696 \end{array}$$

$$98 = 2x^2$$

$$x^2 = 49$$

$$18 = 2x^2$$

$$x = \pm 3$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

C

D

98

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = \frac{9}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{2}}$$

78

$$\begin{array}{r} 78 \\ + 78 \\ \hline 156 \end{array}$$

115

$$D = 24$$

B

-7

-3

3

7

$$2000 + 3824 = 6400$$

$$= 6724$$

$$25000$$

$$CD = 14 ;$$

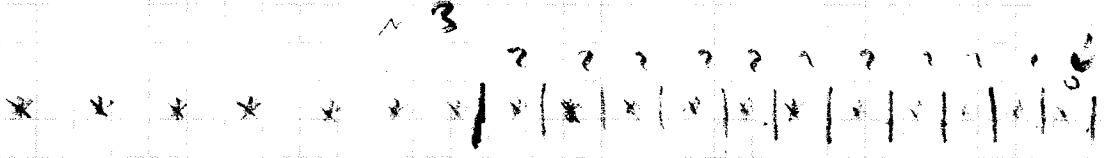
$$AB = 6 ;$$

$$EF = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{18}$$

$$-1600 - 772 + 6400 = 232$$

$$\begin{array}{r} 232 \\ + 232 \\ \hline 464 \\ - 696 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



12 способов размещения чисел от 1 до 6

$$\begin{array}{r} + 512 \\ \hline 11 \\ \hline 5632 \end{array}$$

$$3G + 6(AE + BC) + 2G \cdot AE = 58$$

$$6AE + 6BC + BC \cdot AE = 22$$

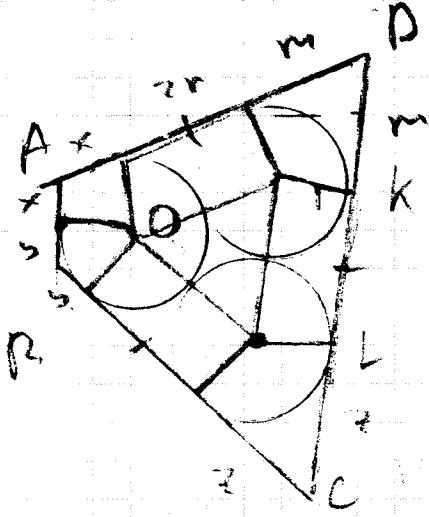
$$AE(6 + BC) + 6BC = 22$$

$$AE = \frac{22 - 6BC}{6 + BC}$$

$$AD = BC + AE = 10 + 12$$

$$AD + BC = 12 + 12 = 24$$

$$\begin{aligned} x + 2y + m + y + x + 2n - \\ - x - y - z + n - m = \\ = \end{aligned}$$



$$AD = \frac{58}{20}$$

$$MB = BC + 12$$

$$MA = AE + 12$$

$$\begin{aligned} AD &= 6 + AE \\ OB &= BC + 6 \end{aligned}$$

$$\frac{(6 + BC)(6 + AE) = 58}{(6 + BC)(6 + AE) = 58}$$

$$AO = \frac{54}{BD}$$

$$+ \frac{1101}{999} = \frac{1500}{999}$$

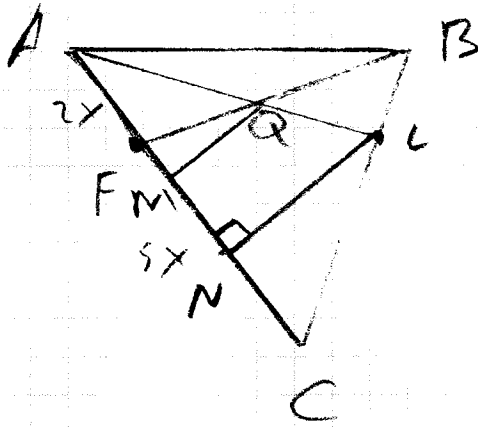
$$+ \frac{673}{667} = \frac{1500}{667}$$

$$AB^2 = BO^2 + \frac{54^2}{BD^2} + \frac{54^2}{BD^2} + BO^2$$

AB

$$\begin{array}{r}
 +181 \\
 182 \\
 \hline
 +363 \\
 183 \\
 \hline
 546 \\
 +184 \\
 \hline
 730 \\
 185 \\
 \hline
 915 \\
 +186 \\
 \hline
 1101
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +142 \\
 143 \\
 \hline
 +285 \\
 144 \\
 \hline
 +429 \\
 145 \\
 \hline
 +574 \\
 146 \\
 \hline
 720 \\
 +147 \\
 \hline
 867
 \end{array}$$



∠BQL
∠BAC

NL - ?

QM = C

$$\begin{array}{r}
 +520 \\
 320 \\
 \hline
 840 \\
 +147 \\
 \hline
 987
 \end{array}$$

I $184 + 186 + 185 + 185 + 180 + 81 = 721$

$$\begin{array}{r}
 +290 \\
 430 \\
 \hline
 720
 \end{array}$$

II $146 + 144 + 145 + 141 + 140 + 147 = 720$

$$\begin{array}{r}
 720 \\
 +147 \\
 \hline
 867
 \end{array}$$

III $60 + 64 +$

$$\begin{array}{r}
 +64 \\
 65 \\
 \hline
 +129 \\
 66 \\
 \hline
 +195 \\
 67 \\
 \hline
 +262 \\
 68 \\
 \hline
 +330 \\
 69 \\
 \hline
 499
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +107 \\
 104 \\
 \hline
 +207 \\
 105 \\
 \hline
 +312 \\
 106 \\
 \hline
 +418 \\
 107 \\
 \hline
 +525 \\
 108 \\
 \hline
 633
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +275 \\
 28 \\
 \hline
 +31 \\
 27 \\
 \hline
 +47 \\
 27 \\
 \hline
 +108 \\
 29 \\
 \hline
 +135 \\
 30 \\
 \hline
 165
 \end{array}$$