

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

13-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 1

1) Найти длины первых двух отрезков.

$$y = x^2$$

$$\text{if } y = 169 \Rightarrow x = \pm 13 \Rightarrow l_1 = 13 - (-13) = 26$$

$$\text{if } y = 64 \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow l_2 = 8 - (-8) = 16$$

2) Рассмотрим 3 случая расположения угла  $120^\circ$  и сторон  $l_1, l_2, l_3$ .

2.1)  $120^\circ$  лежит против  $l_3$ :

По Th cos:

$$l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos(120^\circ) = 26^2 + 16^2 + 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2} = 676 + 256 + 416 = 1348$$

$$l_3 = \sqrt{1348} = 2\sqrt{337}$$

$$x = \pm \sqrt{337} \Rightarrow y = x^2 = 337 = a \Rightarrow \underline{a = 337}$$

2.2)  $120^\circ$  лежит против  $l_1$ :

По Th cos:

$$l_1^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \cos(120^\circ) = 256 + l_3^2 + 2 \cdot 16 \cdot l_3 \cdot \frac{1}{2} = 676$$

$$l_3^2 + 16l_3 - 420 = 0, \quad l_3 > 0, \quad \text{по смыслу задачи.}$$

$$\frac{D}{4} = 64 + 420 = 484 = 22^2$$

$$l_3 \in \left( \frac{-16 \pm 22}{2} \right) = \frac{-8 \pm 11}{1} = 14$$

$$x = \pm 7 \Rightarrow y = x^2 = 49 = a \Rightarrow \underline{a = 49}$$

2.3)  $120^\circ$  лежит против  $l_2$

$$256 = \frac{676 + l_3^2 + 26l_3}{> 196} \Rightarrow \text{решений нет.}$$

Ответ: 337; 49

### Задача № 2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1) - \frac{1}{2} (\cancel{2 \cos^2 7x} - 1 - 2 \sin^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 \Leftrightarrow$$

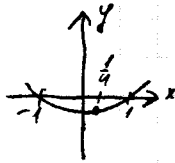
$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cancel{\sin^2 7x} - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - \cos^2 x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x - \frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) - \frac{1}{2} - 4 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4,5 \neq$$

Пусть  $\cos 2x = t$ ,  $t \in [-1, 1]$

$$g(t) = t^2 - \frac{1}{2}t - 4,5$$

$$t_0 = -\frac{(-1/2)}{2} = \frac{1}{4}$$



$$g(-1) = +1 + \frac{1}{2} + 4,5 = -3$$

$$g(1) = 1 - 0,5 - 4,5 = -4$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{72}{16} = -\frac{73}{16} \Leftrightarrow -\frac{5625}{10000} = -0,5625 \Leftrightarrow -4 \frac{5625}{10000} = -4,5625$$

$$g(t)_{\min} = -4,5625$$

$$g(t)_{\max} = -3$$

Ответ:  $g(t)_{\min} = -4,5625$ ;  $g(t)_{\max} = -3$

### Задача № 3

1) Рассматриваем случаи, когда число начинается на 555555:

555555  $\dots$   
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n_2}$

Как-во возможных комбинаций в таком случае:  $2^{12} - 2$  (исключая два случая, когда в числе не содержится ни одного нуля и ни одной "9").

2) Рассматриваем случаи, когда число не начинается на 555555:

9  $\dots$  555555  $\dots$ ,  $n \in [0, 11]$ . (число не может начинаться на "0").  
 $\underbrace{\hspace{0.5cm}}_n$   $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-1}$

Всего таких случаев будет:  $11 \cdot 0 + 1 = \underline{12}$ .

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для каждого из ~~одной~~ двенадцати случаев кол-во возможных наборов можно представить в виде:  $2^n - 1$  (исключая случай, ~~не~~ содержащий "0").

3) Всего таких чисел:

$$2^{12} - 2 + 11 \cdot (2^{11} - 1) = 2 \cdot (2^{11} - 1) + 11 \cdot (2^{11} - 1) = 14 \cdot (2^{11} - 1) = 14 \cdot 2047 = 28.658$$

Ответ: 28.658.

Задача № 5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 & (1) \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 & (2) \\ x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x \in [-3, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \neq 1 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$(1) \sqrt{x+3}-x > 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -3 \\ x \geq 0 \\ x \in (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3; 0) \\ x \in [0, \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$(*) : x^2 - x - 3 < 0$$

$$D_5 : 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \Rightarrow x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$(2) \sqrt{x+3}-x+1$$

$$\sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+3+x^2+2x+1 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \Rightarrow x \neq 1 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

$$(*) x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$$

Заметим, что для  $\forall x \in \mathbb{O} \mathbb{D} \mathbb{Z}$   $x+5 > 1 \Rightarrow$  для того чтобы:

$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$ , нужно добиться того, что  $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ \sqrt{x+3} \leq x+5 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ \sqrt{x+3} \leq x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x+3 > 0 \\ x \geq -1 \\ x+3 > x^2+10x+14 \quad (\text{умножить на } x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3, -1) \\ x \in (-2, 1) \\ \mathbb{O} \mathbb{D} \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in (-3, 1)$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x \leq x+5 \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \\ x \geq -3 \\ x+3 \leq 4x^2+10x+25 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x-2 \leq -2x \\ x \leq -2/3 \end{cases} \Rightarrow x \geq -2$$

(\*) :  $4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$$D = 361 - 352 = 9 = 3^2$$

$$x = \frac{-19 \pm 3}{8}$$

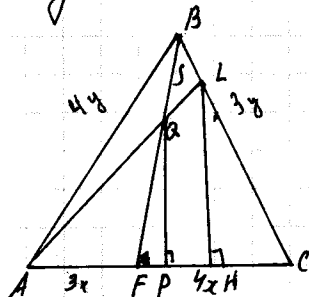
$$\begin{cases} x \leq -\frac{22}{8} \\ x \geq -2 \end{cases}$$

~~$\begin{cases} x \in (-3, -1) \\ x \in (-2, 1) \\ \mathbb{O} \mathbb{D} \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 1)$~~

$$\begin{cases} x \in (-3, -1) \\ x \in (-2, 1) \\ \mathbb{O} \mathbb{D} \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x \in [-2, 1)$$

Ответ:  $[-2, 1)$

Задача № 6



Дано:  $\triangle ABC$ ;  $AF:FC = 3:4$   
 $L \in BC$   
 $AL \cap BF = Q$   
 $S_{\triangle BQL} = S$   
 $S_{\triangle ABC} = 16S$   
 $QP = 9$

Найти:  $LH = ?$

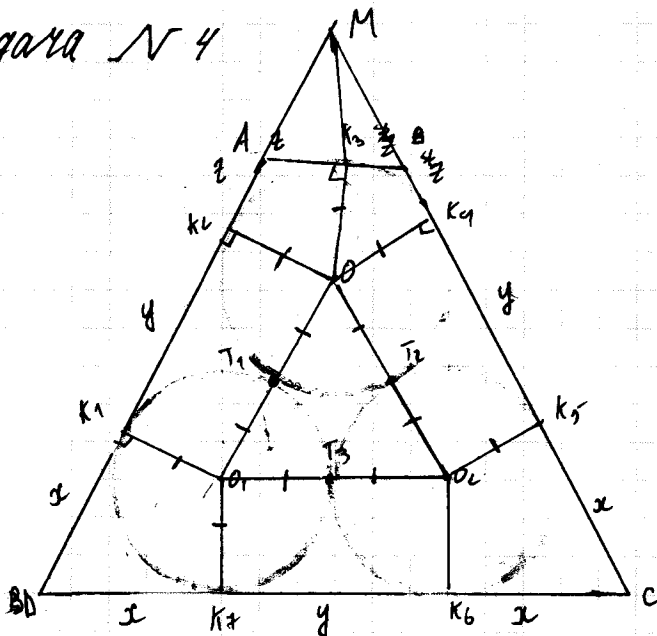
1)  $\text{AF:FC} = 3:4 \Rightarrow S_{\triangle AFB} = \frac{48}{37} S$ ,  $S_{\triangle BFC} = \frac{64}{7} S$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) S_{FQLC} = \frac{64}{4} S - S = \frac{57}{4} S$$

$$3) S_{\Delta BQL}$$

Задача № 4



Дано: ABCD - ч.к.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$  - касаются друг друга и стороны ч.к. ABCD

$$AD + BC - AB - CD = 10$$

O - центр  $\omega_3$

$$10 \cdot PO = 41$$

Найти: ~~AB~~ ч.к.?

а)  $\angle AOB$ ?

б) AB?

1)  $\Delta OO_1O_2$ :  $OO_1 = OO_2 = O_1O_2 \Rightarrow \Delta OO_1O_2$  - ~~не~~ равносторонний.

2) Существуют перпендикуляры  $O_1K_1, O_2K_2, O_3K_3$  и т.д.

3) т.к. стороны четырехугольника являются общими касательными, и  
 их центры  $O_1, O_2$  лежат на  $\perp \Rightarrow AD \parallel O_1O_2$ ;  $O_1O_2 \parallel AB \parallel CD$ ;  $O_2O_1 \parallel BC$

4) ~~и~~  $K_1K_2 = O_1O_2 = O_2O_1 = O_2O_1 = K_4K_3 = K_3K_2 = y$

5)  $K_1D = K_2D = K_3C = K_4C = x$ , как отрезки касательных

6)  $K_2A = AK_3 = K_3B = BK_4 = z$

7)  $AD + BC - AB - CD = 10$

$$x + y + z + x + y + z - 2z - 2x - y = 10$$

$$y = 10 = 2z \Rightarrow z = 5$$

8) Продолжим  $DA$  и  $CB$  до  $M$  и  $N$

$$\angle MDC = 60^\circ \quad (\triangle MDC \text{ с } OO_1O_2)$$

9) Рассмотрим  $\triangle MK_2DK_4$ :

$$\left. \begin{array}{l} \angle K_2DK_4 = 90^\circ \\ \angle M = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle K_2DK_4 = 110^\circ$$

10)  $\triangle AK_1D = \triangle AK_3D = \triangle K_3BO = \triangle K_4BO \Rightarrow \angle AOK_2 = \angle AOK_3 = \angle AOK_3 = \angle AOK_4 = \frac{110^\circ}{4} = 30^\circ$

11)  $\angle K_2DK_4 = \angle BOK_3 + \angle AOK_3 = 60^\circ$

12)  $AO = BO \Rightarrow AO \cdot BO = 41 = AO^2 = 41 = AO = \sqrt{41}$

13)  $\triangle AOK_3$ :  $\angle K_3 = 90^\circ \Rightarrow$  по тл Пифагора:  $AK_3^2 = AO^2 - OK_3^2 = 41 - 15 = 14 \Rightarrow AK_3 = \sqrt{14}$

14)  $AK_3 = K_3B \Rightarrow AB = 2AK_3 = 2\sqrt{14}$

Ответ: а) 5

б)  $60^\circ$

в)  $2\sqrt{14}$

Задача № 7

Если мы берем из мешка 1, 353 шмля  $x$ , то чтобы брать из остальных мешков  
 шмля так, что  $35 + x$ ,  $70 + x + 1$ , и т.д.

Какая последующая сумма будет увеличиваться шмльми на 10.

$$397 \cdot 5 + 40 = 1985 + 40 = 2025$$

Ответ: 2025



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+5 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$\sqrt{x+7} \leq x+5$$

$$x > -5$$

$$x+5 \leq x^2+10x+25$$

$$x^2+9x+20$$

$$D=0.1 \times 0.8 = 16.9 = 13$$

$$x = \frac{-9 \pm 13}{2}$$

$$\frac{x+5}{7} = \frac{10}{7} - 5.7$$

$$x = -11$$

$$x = 2$$

$$x \in [-11; +2]$$

$$\frac{141}{5}$$

$$1 \quad 37 \quad 73$$

$$\sqrt{x+7} = 1 \quad 37$$

$$x > -3$$

$$\sqrt{x+3} > x+1$$

$$x \leq -1$$

$$\sqrt{x+3} \geq x+2$$

$$\frac{-2L \pm \sqrt{4L^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2}$$

$$1.6$$

$$\frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 171}}{2}$$

$$D^2 + x - L$$

$$x \in [-2; 13]$$

$$[-2; 13]$$

$$\begin{array}{r} 4.22 \\ + 0.8 \\ + 4 \\ \hline -352 \\ 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 16 \\ \hline 7 \\ 112 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\frac{19}{16}$$

$$\frac{3.16}{7}$$

$$\frac{463}{7}$$

$$\sqrt{x+3} \leq x+5$$

$$x+3 \leq x^2+10x+25$$

$$x^2+9x+22 \geq 0$$

$$D = 9$$

$$x = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$x =$$

$$\frac{-2L}{4} = -5.5$$

$$x \geq 4$$

$$\frac{7}{57} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{BQ \cdot QL}{BF \cdot FK} = \frac{BQ \cdot QL}{BF \cdot FK}$$

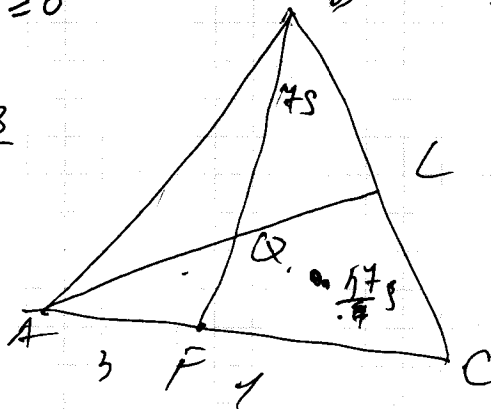
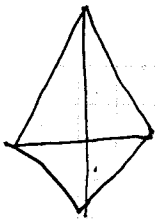
$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 36 & 72 & 108 & 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 145 \\ 180 \\ -325 \\ 72 \\ \hline 397 \end{array}$$

$$\frac{-10}{7}$$

$$\frac{64}{7}$$

$$\frac{59}{7}$$



$$3x \cdot 9 = K$$

$$7x \cdot 18 = 67.5$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} y &= 169 & x &= 13 & l_1 &= 26 \\ y &= 84 & x &= 8 & l_2 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \overline{)169} \\ \underline{16} \\ 9 \\ \underline{8} \\ 1 \\ \underline{1} \\ 0 \end{array}$$

$$\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 676 \\ \hline 256 \\ 9382 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 8 \\ \hline 208 \end{array}$$

$$l_3 = 676 + 256 + 26 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 932 \\ \hline 208 \\ 1140 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1140 \overline{)4} \\ \underline{8} \\ 34 \\ \underline{32} \\ 20 \end{array}$$

$$g(2) \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\sin A + \sin B =$$

$$\frac{x+y}{2} = 9 \quad \begin{cases} x+y=18 \\ x-y=10 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x &= 28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

$$y=4$$

$$\begin{array}{r} 1-6 \\ 2-7 \\ 3-8 \\ 13-14 \end{array} \quad (N=13)$$

$$\underbrace{555555}$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad 5$$

$$1-\sqrt{13} \quad 10$$

$$-\sqrt{13}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\text{ODZ: } x \geq -3$$

$$\sqrt{x+3}-x > 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$\exists D = 1+12=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \quad x \in \left( \frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$y = x^2$$

$$l_1 = 26$$

$$y = 169 \Rightarrow x = \pm 13$$

$$l_2 = 16$$

$$y = 64 \Rightarrow x = \pm 8$$

$$\sqrt{l_3^2} = \sqrt{676 + 256 + 2 \cdot 26 \cdot 16}$$

$$\begin{array}{r} -576 \quad | \quad 4 \\ \underline{4} \quad \quad | \quad 144 \\ -17 \quad \quad | \\ \underline{-16} \quad \quad | \\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ +676 \\ +256 \\ \hline 932 \\ +208 \\ \hline 1140 \quad | \quad 4 \\ \underline{8} \quad \quad | \quad 285 \\ -34 \quad \quad | \\ \underline{-32} \quad \quad | \\ 20 \end{array}$$

$$26^2 = \begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$16^2 = \begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 160 \\ \hline 256 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 285 \overline{) 5} \\ \underline{25} \quad \quad | \quad 3 \\ 35 \quad \quad | \quad 19 \\ \underline{30} \quad \quad | \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -676 \\ -256 \\ \hline -932 \\ \times 420 \\ \hline 420 \\ 1680 \\ \hline 1744 \end{array}$$

$$l_3 = 2\sqrt{285}$$

$$x = \pm\sqrt{285}$$

$$\textcircled{I} y = 285 = a$$

$$\begin{array}{r} -676 \quad | \quad 4 \\ \underline{4} \quad \quad | \quad 168 \\ -27 \quad \quad | \\ \underline{-24} \quad \quad | \\ 26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 260 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +932 \\ +416 \\ \hline 1348 \quad | \quad 4 \\ \underline{12} \quad \quad | \quad 337 \\ -14 \quad \quad | \\ \underline{-12} \quad \quad | \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -1744 \quad | \quad 4 \\ \underline{16} \quad \quad | \quad 109 \\ -14 \quad \quad | \quad 38 \\ \underline{-12} \quad \quad | \\ 24 \end{array}$$

$$l = \frac{-8 \pm 4\sqrt{109}}{2}$$

$$2\sqrt{109} - 4$$

$$x = \sqrt{109} - 2$$

$$\textcircled{II} y = 111 - 4\sqrt{109} = a$$

$$\begin{array}{r} +932 \\ +416 \\ \hline 1348 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ &= \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 14x \\ &= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) \sin 5x \end{aligned}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) &= -2 \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \cos(4x) - \cos 4x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} (1 - 2 \sin^2 2x) = -\sin^2 2x - \cos^2 2x - 3$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} + \sin^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 2x - 3$$

$$\cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \cos^2 2x - 3$$

$$\cos^2 2x - \cos^2 2x - 4$$

$$\cos^2 2x - (2 \cos^2 x - 1)^2 =$$

$$\cos^2 2x - (2 \cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 2x - 4$$

$$\cos^2 2x - \frac{1}{2} (2 \cos^2 x - 1) = 4,5$$

$$\cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = 4,5$$

$$t^2 - \frac{1}{2} t - 4,5 \quad t \in [-1, 1] \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$t = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = \frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{72}{16} = \frac{-71}{16}$$

$$f(-1) = 1 + \frac{1}{2} - 4,5 = -3$$

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} - 4,5 = -4$$

$$\begin{array}{r} -73 \overline{) 16} \\ \underline{64} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \phantom{0} \cdot 5 \\ \underline{16} \phantom{0} \\ 45 \cdot 5 \\ \underline{80} \\ 225 \cdot 5 \\ \underline{900} \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos^2 2x$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\frac{1125}{2000} \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 1125 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$$

$$\cos^2 2x - \cos^2 2x = \frac{1}{2}$$

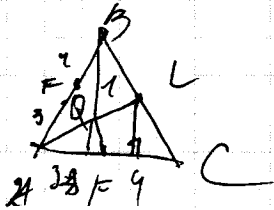
$$\begin{array}{r} 2047 \\ \times 2047 \\ \hline 14 \\ \hline 8188 \\ \hline 1047 \\ \hline 20658 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -74 \overline{) 16} \\ \underline{64} \phantom{0} \\ 9 \phantom{0} \end{array}$$

①  $555555$   $\underbrace{\hspace{10em}}_{12}$

$2^{12} - 2$        $2(2^{11}-1) + 12 \cdot (2^{11}-1) = 14(2^{11}-1)$

$555555$   $\underbrace{\hspace{10em}}_{12-4}$   
 $\underbrace{\hspace{2em}}_5$        $\underbrace{\hspace{2em}}_6$   
 $2^{11}-1$



$D = 156 + 410$

$\frac{D}{4} = 64 + 410 = 474 = \frac{161}{4+9}$

$\begin{array}{r} 10 \\ 22 \\ \hline 8 \\ 14 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1 \\ +16 \\ \hline 14 \\ +9 \\ \hline 16 \\ +214 \\ \hline 136 \\ +410 \\ \hline 546 \\ 668 \end{array}$

$\begin{array}{r} 22 \\ +12 \\ \hline 34 \\ +4 \\ \hline 38 \end{array}$

$\begin{array}{r} 2 \\ +16 \\ \hline 14 \\ +6 \\ \hline 20 \end{array}$

$\begin{array}{r} 16 \\ +224 \\ \hline 196 \\ +420 \\ \hline 616 \end{array}$

$\begin{array}{r} 20 \\ +6 \\ \hline 26 \\ +10 \\ \hline 36 \\ +14 \\ \hline 50 \end{array}$

$676 = 256 + 96 + 16 \cdot 8$

$676 = 196 + 196 + 16 \cdot 19$

$676 = 1 + \sqrt{13} \neq L$

$D3: (-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$\log_{\sqrt{x+3}}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}}(x+3)$   
 $x+5 > 0$   
 $x > -5$   
 $x+3 > 0$   
 $x > -3$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$        $x > -1$

$\sqrt{x+3} \neq x+1$

$x+3 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + 2x - 2$

$(x-1)(x+2) =$

$= x^2 + x - 2$

$x \in D: 1+8=9$

$x = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$x \neq 1$

$x = -2$

$x \neq 1$

$x = 1$

$\sqrt{x+3} > x$  if  $x < 0$   
 $\begin{cases} x < 0 \\ x > -3 \end{cases}$        $x+3$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 > x \end{cases}$

$2^1 - x - 3 < 0$

$D = 1+12=13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x \in \mathbb{R}; (-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}]$