# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 4-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

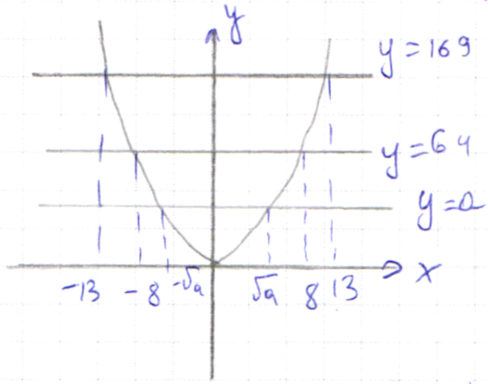
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1




$13-(-13)=26$

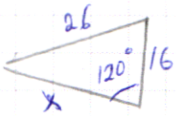
$8-(-8)=16$

$2\sqrt{a}=x$; $\sqrt{a}-(-\sqrt{a})=x$

Стороны треугольника: 26, 16, x, один из углов - $120°$

Рассмотрим 3 случая:

1)




$26^2=x^2+16^2+x\cdot16\cdot2\cdot\frac{1}{2}$

$26^2=x^2+16^2+16x$

$x^2+16x+16^2-26^2=0$; $x^2+16x-420=0$

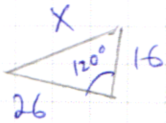
$D=16^2+420\cdot4=256+1680=1936=16\cdot121=(44)^2$

$$\begin{array}{r} +1680 \\ 256 \\ \hline 1936 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -1936 & 4 \\ 16 & 484 \\ \hline -33 & \\ 32 & \\ \hline 16 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -484 & 4 \\ 4 & 121 \\ \hline -8 & \\ 8 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

$x=\frac{-16\pm44}{2}$; $x=\frac{-16+44}{2}=\frac{28}{2}=14$

$2\sqrt{a}=14$; $\sqrt{a}=7$, $a=49$

2)




$x^2=26^2+16^2+26\cdot16\cdot2\cdot\frac{1}{2}=1348$

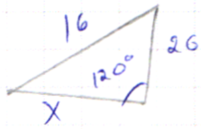
$=676+256+416$

$$\begin{array}{r} +26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +676 \\ 256 \\ \hline +932 \\ 416 \\ \hline 1348 \end{array}$$

$1348=4\cdot337$

$X = 2\cdot\sqrt{337}$ $\quad 30 < X < 40$, значит, X — большая сторона, что и требовалось (напротив $120°$)

$2\sqrt{a} = 2\cdot\sqrt{337}$; $\quad a = 337$

3) 


Невозможно, т.к. $120°$ — наибольший угол, но 16 — не наибольшая сторона.

Ответ: $a = 337$; $a = 49$

№2

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$

$g(x) = \frac{1}{2}\left(\cos 4x - \cos 14x\right) - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 7x + 1\right) - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \cancel{\cos^2 7x} - 1 + \cancel{\cos^2 7x} - \cos^2 x - 3 =$

$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 - \cos^2 x - 4 =$

$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$g'(x) = 4\cdot 4\cdot\cos^3 x\cdot(-\sin x) - 5\cdot 2\cos x\,(-\sin x) =$

$= -16\cos^3 x\cdot\sin x + 10\cos x\sin x = 0$

$5\cos x\sin x - 8\cos^3 x\sin x = 0$

$\cos x\sin x(5 - 8\cos^2 x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 0\\ 5 = 8\cos^2 x\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x = \pm 1\\ \cos^2 x = \frac{5}{8}\end{array}\right.$ — Точки перегиба функции; $\cos x = 0$ и $\cos x = \pm 1$ также являются граничными значениями $\cos x$.

Подставим значения $\cos x$ в $g(x)$:

$g(0) = 0\cdot 4 - 5\cdot 0 - 3 = -3$

$g(-1) = g(1) = 4 - 5 - 3 = -4$

$g\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = 4\cdot\frac{25}{64} - 5\cdot\frac{5}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{50}{16} - 3 =$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= -\frac{25}{16} - 3 = -4\frac{9}{16}$

~~g(x) наименьшее~~ =

$\min(g(x)) = -4\frac{9}{16}$

$\max(g(x)) = -3$

Ответ: $\min(g(x)) = -4\frac{9}{16}$ ; $\max(g(x)) = -3$

№3

$\underbrace{\overset{[1]}{*} * * * * *}$ * * * * * * $\underbrace{\overset{[13]}{*} * * * * *}$

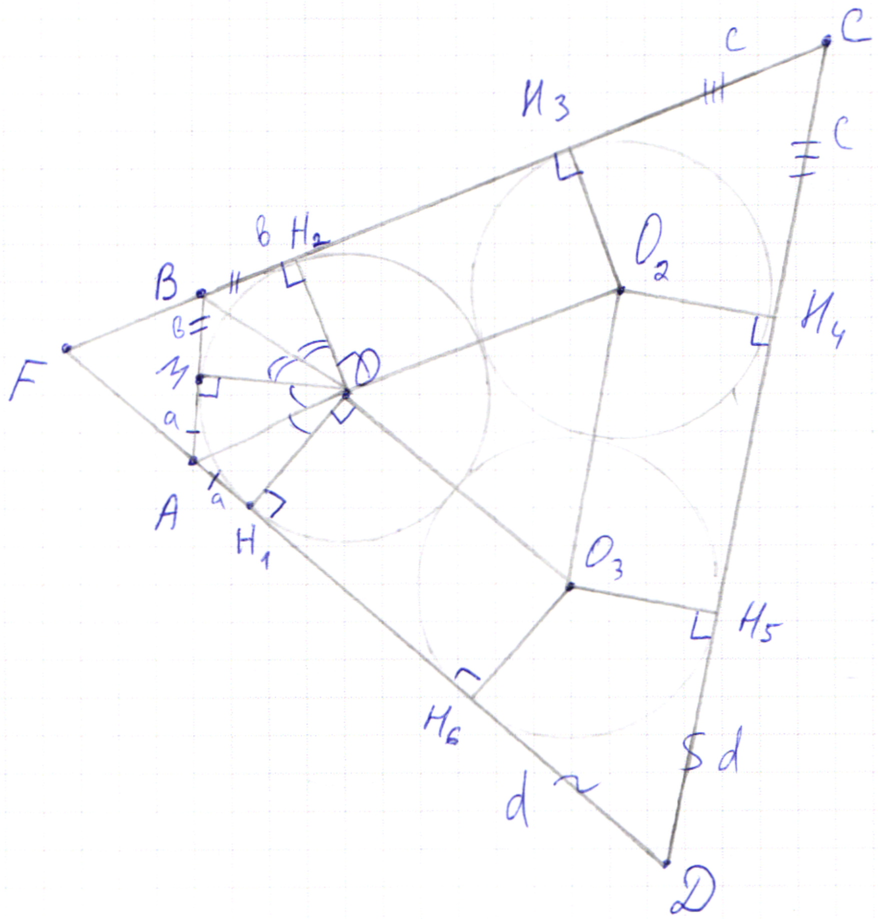
Шесть раз подряд цифры 5 могут располагаться 13-ю способами.

Свободных позиций (для 0 и 9) = 18 - 6 = 12, при этом каждая из цифр 0 и 9 должна встретиться в числе хотя бы раз.

На первой позиции стоит либо 5, либо 9. ~~Если стоит 5~~, Две позиции по-любому ~~за~~заняты 9 и 0, значит, оставшихся - 10, где можно выбрать 0 либо 9 $2^{10}$ способами.

Ответ: $13 \cdot 2^{10}$ чисел

№4




а) $AD + BC - AB - CD = 10$

$a + 2r + d + b + 2r + c - a - b - c - d - 2r = 10$

$2r = 10$

$r = 5$

б) Продлим BC и AD до пересечения в точке F. $\Delta OO_2O_3$ – равносторонний, $\angle O_2OO_3 = 60°$ ($OO_2 = 2r$, т.к. расстояние между центрами касающихся внешним образом окружностями равно сумме их радиусов). $OO_3H_6H_1$ – прямоугольник, значит $OO_3 \parallel FD$, аналогично $O_2O_3 \parallel CD$, $OO_2 \parallel FC$. $\Delta FCD$ – равносторонний, т.к. равносторонний – $\Delta OO_2O_3$. Значит $\angle BFA = 60°$. Из четырёхуголь-

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-002
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ника $FH_2OH_1$ $\angle H_2OH_1 = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ =$
$= 120^\circ$. $\triangle OMA = \triangle OH_1A$ по 2 катетам.
$\Rightarrow \angle MOA = \angle H_1OA$ ; $\triangle BOM = \triangle H_2OB$ по
2 катетам $\Rightarrow \angle H_2OB = \angle BOM$ ;
$2\angle BOM + 2\angle MOA = 120^\circ$
$\angle BOM + \angle MOA = 60^\circ = \angle BOA$.
$\angle AOB = 60^\circ$.

в) $S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} OM \cdot BA$

$42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot AB$

$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

Ответ: а) $r = 5$
б) $\angle AOB = 60^\circ$
в) $AB = \frac{21\sqrt{3}}{5} = 4{,}2\sqrt{3}$

№7

Т.к. разность 2 любых чисел не кратна 35, значит все выбранные числа имеют разные остатки при делении на 35.
Числа из 1-го промежутка имеют вид $35 \cdot 0 + r_{i,j}$, где $r \in [1; 35]$; из 2-го промежутка — $35 \cdot 1 + r_{i,j}$, $r \in [1; 35]$ и так далее.
Сумма всех выбранных имеет вид

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$35\cdot 0\cdot 5+35\cdot 1\cdot 5+35\cdot 2\cdot 5+35\cdot 3\cdot 5+35\cdot 4\cdot 5+$
$+\sum_{i}^{25} r_i = 35\cdot 5(1+2+3+4)+\sum_{i=1}^{25} r_i$

$\sum_{i=1}^{25} r_i = \frac{1+25}{2}\cdot 25 = 13\cdot 25$ (остатки от 1 до 25)

Если будет выбрано число, у которого остаток 0, то оно будет одним из 35, 70, 105, 140, 175. Но каждое из них является максимальным из своего промежутка, значит можно выбрать число меньше и с другим остатком.

$35\cdot 5\cdot 10+13\cdot 25 = 25(35\cdot 2+13) = 25\cdot 83$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 83 \\ \hline 75 \\ 200\phantom{0} \\ \hline 2075 \end{array}$$

Ответ: 2075

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5\leq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3}-x\geq 1 \\ x+5\geq \sqrt{x+3}-x \end{cases} \end{array}\right.$$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \\ x+5>0 \\ x+3\geq 0 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

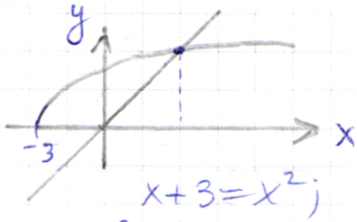
4-002
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sqrt{x+3} < 1+x \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \\ 2x+5 \le \sqrt{x+3} \end{cases}$ (можем возводить в квадрат, т.к. $\sqrt{x+3} - x$ на ОДЗ положительно)

2) $\begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ 2x+5 \ge \sqrt{x+3} \end{cases}$

1) $\begin{cases} x+3 < 1+2x+x^2 \\ \sqrt{x+3} > x \\ 4x^2+20x+25 \le x+3 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x-2>0 \\ \sqrt{x+3} > x \\ 4x^2+19x+22 \le 0 \end{cases}$

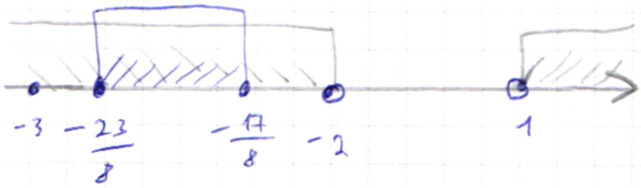



$x+3=x^2;$
$x^2-x-3=0$
$D=1+12=13$
$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\begin{cases} (x+2)(x-1)>0 \\ x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ D=19^2-22\cdot16=9 \end{cases}$ $\begin{cases} (x+2)(x-1)>0 \\ x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \left(x+\frac{23}{8}\right)\left(x+\frac{17}{8}\right)\le 0 \end{cases}$

$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 22 \\ 16 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$

$x=\frac{-20\pm3}{8}$; $x_1=-\frac{23}{8}$; $x_2=-\frac{17}{8}$

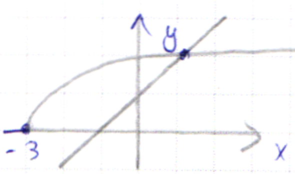



ОДЗ: $\begin{cases} x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ \cancel{x \ne \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}} \quad x\ne-2;1 \\ x>-5 \\ x\ge-3 \end{cases}$

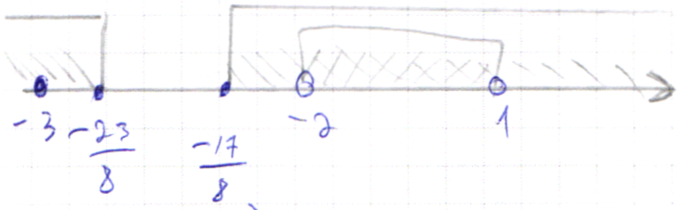
$x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) ~~$x+3 \ge 1+2x+x^2$~~

$\begin{cases} \sqrt{x+3} > x+1 \\ 4x^2+19x+22 \ge 0 \end{cases}$



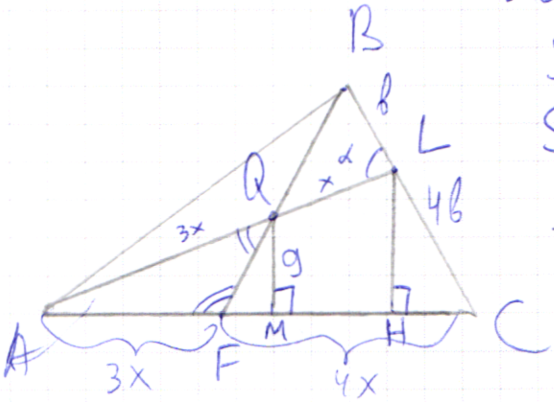

$x+3=x^2+2x+1$
$x^2+x-2=0;\ x=-2;1$




$x \in (-2; 1)$

Ответ: $\left[-\frac{23}{8}; -\frac{17}{8}\right] \cup (-2; 1)$

№6




$S_{BLQ} = \frac{1}{2} BL \cdot QL \cdot \sin\alpha$

$S_{ABC} = S_{ALB} + S_{ALC} =$

$= \frac{1}{2} AL \cdot BL \cdot \sin\alpha +$

$+ \frac{1}{2} AL \cdot LC \cdot \sin(180 - \alpha) =$

$= \frac{1}{2} \sin\alpha \, AL(BL + LC) =$

$= \frac{1}{2} \sin\alpha \cdot AL \cdot BC$

$BL \cdot QL = \frac{1}{16} \cdot AL \cdot BC$

По т. Менелая для $\triangle ALC$ и секущей $BF$:

$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{LC} = 1$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{LC} = 1; \quad 4AQ \cdot BL = 3QL \cdot LC$

$\begin{cases} \frac{BL}{LC} = \frac{3QL}{4QA} \\ \frac{BL}{BC} = \frac{AL}{16QL} \end{cases}$ $\quad \frac{3QL}{4QA} = \frac{AL}{16QL}$

$\frac{3QL}{QA} = \frac{AL}{4QL}$

$12QL^2 = AL(AL - QL) \quad QL = x$

$AL = a$

$12x^2 = a(a-x); \quad 12x^2 = a^2 - ax$

$a^2 - ax - 12x^2 = 0; \quad D = x^2 + 48x^2 = 49x^2;$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

И-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \frac{x \pm 7x}{2} = 4x$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{LC} = 1;$$

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{BL}{LC} = 1; \quad 4BL = LC$$

$$\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{AF}{AC} = 1$$

$$4 \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7} = 1;$$

Из подобия $\triangle AQM$ и $\triangle ALH$:

$$\frac{3x}{9} = \frac{4x}{LH}; \quad \frac{3}{9} = \frac{4}{LH}; \quad LH = 12$$

Ответ: 12

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

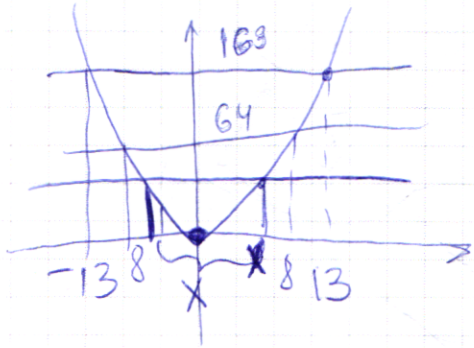
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-002

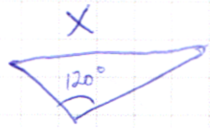
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




26
16
120°




$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$26^2 = 16^2 + x^2 + 2 \cdot 16 \cdot x \cdot \frac{1}{2} =$

$= 16^2 + x^2 + 16x$

$x^2 + 16x + 16^2 - 26^2 = 0$

$x^2 + 16x + (-10) \cdot 42 = 0$

$x^2 + 16x - 420 = 0$

$D = 16^2 + 420 \cdot 4 =$

$= 256 + 1680 > 26^2$

$$\begin{array}{r} \times\ 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52\ \ \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26\ \ \\ \hline 416 \end{array}$$

$x^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 =$

$= 676 + 256 + 416$

$$\begin{array}{r} +\ 676 \\ 256 \\ \hline +\ 1332 \\ 416 \\ \hline 1748 \end{array}$$

$16^2 = 26^2 + x^2 + 26x$

$x^2 + 26x + 26^2 - 16^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~35k + 10~~

$35\cdot 0 + r_0\,(1,2,3,4,5)$

$35\cdot 1 + r_1\,(1,2,3,4,5)$

$35\cdot 2 + r_2\,(1,2,3,4,5)$

$35\cdot 3 + r_3\,(1,2,3,4,5)$

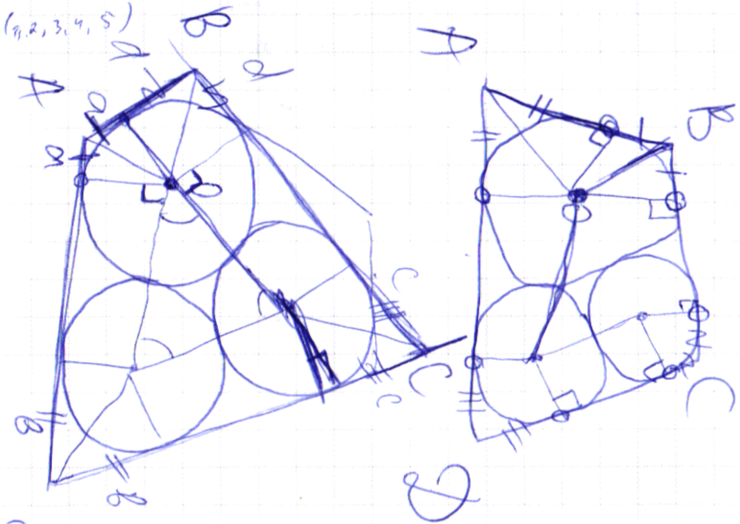
$35\cdot 4 + r_4\,(1,2,3,4,5)$

$0\cdot 5 + 35\cdot 5 + 35\cdot 2\cdot 5 +$

$+ 35\cdot 3\cdot 5 + 35\cdot 4\cdot 5 + 13\cdot 25$

$+\sum r$

$\frac{1+25}{2}\cdot 25 = 13\cdot 25$



$$\begin{array}{r} \times 83 \\ 25 \\ \hline 415 \\ 166 \\ \hline 2075 \end{array}$$

$35\cdot 5(\underbrace{1+2+3+4}_{10}) + 13\cdot 25$

$35\cdot 50 + 13\cdot 25 =$

$= 25(70+13) =$

$= 25\cdot 83$

$R = 5$

$d + 2r + d +$

$d + 2r + d +$

$d - 2r = 10 = 2r$

$AD + BC - AB - CD = 10$

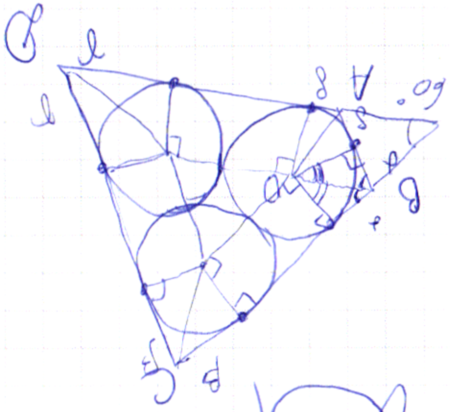
$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < \sqrt{x+3} - x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$R = 5$

$\alpha + \beta + \gamma + \beta = 180°$



$2 - 13$

$1\cdot 2^{10}$

3)

9

13 14 15 16 17 18

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

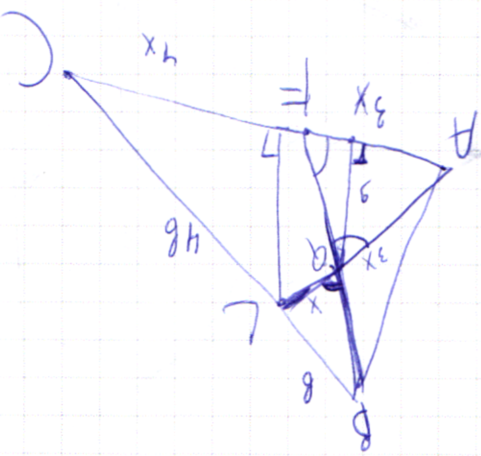
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

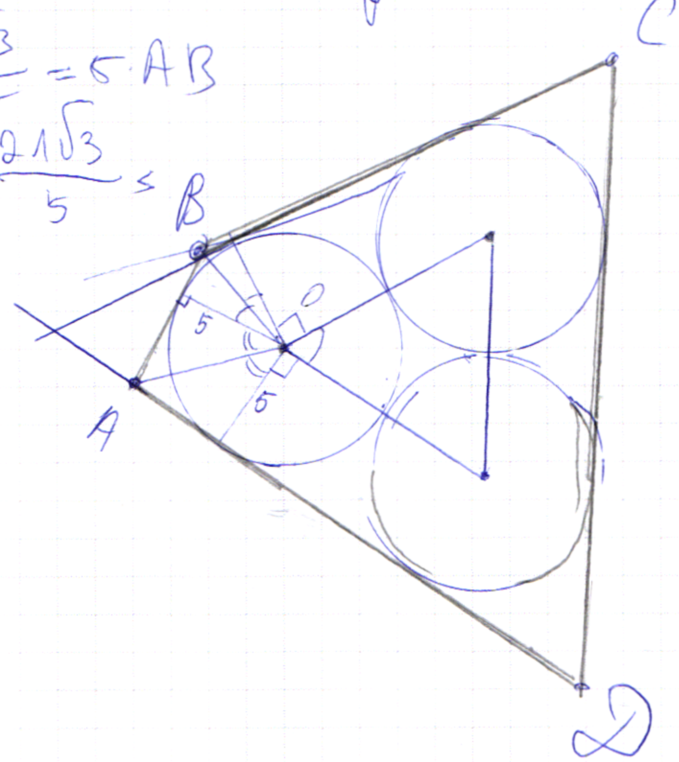
Страница №__

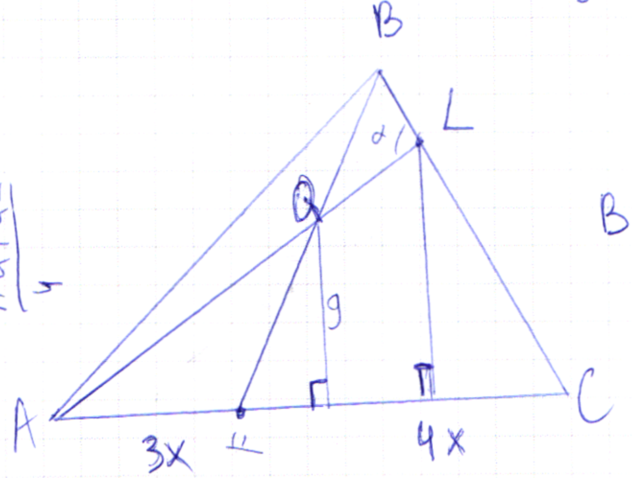
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} 5 \cdot AB$

$42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot AB$

$AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$




$\frac{1}{2} BL \cdot QL \cdot \sin\alpha = \frac{1}{16} \times$

$\times \left( \frac{1}{2} AL \cdot LC \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} AL \cdot BL \cdot \sin\alpha \right)$

$BL \cdot QL = \frac{1}{16} (AL \cdot LC + AL \cdot BL) =$

$= \frac{1}{16} AL \cdot BC$

$BL \cdot QL = \frac{1}{16} \cdot AL \cdot BC$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\frac{AQ \cdot BL}{QL \cdot BC} = \frac{3}{4}$

$16 BL \cdot QL = AL \cdot BC$

$\frac{BL}{BC} = \frac{AL}{16QL}$

$\frac{3}{4} \cdot \frac{QL}{QA}$

$\frac{AL}{16QL} = \frac{3QL}{4QA}$

$\frac{AL}{4QL} = \frac{3QL}{QA}$

$\frac{AQ+QL}{4}$

$\frac{CF}{FA} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

4-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=$

$=\dfrac{\cos4x-\cos14x}{2}=$

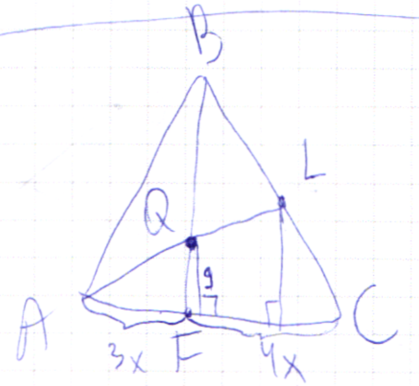
$=\dfrac{2\cos^2 2x-1-2\cos^2 7x+1}{2}=$

$=\cos^2 2x-\cos^2 7x-(1-\cos^2 7x)-\cos^2 x+3=$

$=\cos^2 2x-1-\cos^2 x+3=(2\cos^2 x-1)^2-\cos^2 x+3=$

$=4\cos^4 x-4\cos^2 x+1-1-\cos^2 x+3=$

$=4\cos^4 x-5\cos^2 x+3$



* * * * * * * * * * * * * * * * * *

13 — разл. 6-к 5

$2 \cdot 13$: 9;0; $2^{10}$ — или 0 или 9

12 мест

$2^{10}$

$13 \cdot 2^{10}$

1 2 3 5 7