МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-061

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

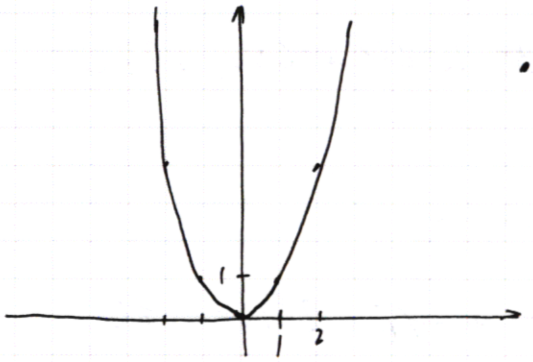
15 - 061

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$y = x^2$

• $y = 169$ пересекает $y = x^2$ в точке с коорд. по оси OX

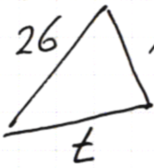
$169 = x^2$

$x = \pm 13 \Rightarrow$ длина отрезка равна $13 \cdot 2 = 26$

• $y = 64$ пересекает $y = x^2$ в точке с коорд. по оси OX $\quad 64 = x^2$

$x = \pm 8 \Rightarrow$ длина отрезка $8 \cdot 2 = 16$

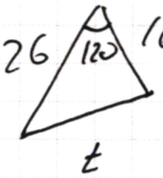
Имеем Δ



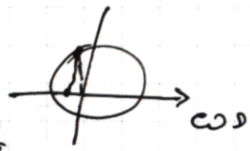
, где t - некая 3 сторона. При этом один из углов Δ равен 120.

Разберем 3 случая:

①



По т. cos



$$t^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \overbrace{\cos 120}^{-\frac{1}{2}}$$

$$t^2 = 676 + 256 + 416 = 1348$$

$26 \times 26 = 676$; $16 \times 16 = 256$; $676 + 256 = 932$; $26 \times 16 = 416$; $932 + 416 = 1348$

Т.к. $t > 0$ (сторона Δ), то

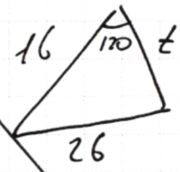
$$t = \sqrt{1348} = 2\sqrt{337}$$

Тогда $x = \pm\sqrt{337}$, то есть

$$a = (\pm\sqrt{337})^2 = \underline{337}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

② По т. cos



$26^2 = 16^2 + t^2 - 2\cdot t\cdot 16\cdot \cos 120$

$676 = 256 + t^2 + 32t$

$420 = t^2 + 32t$

$t^2 + 32t - 420 = 0$

$D = 32^2 + 420\cdot 4 = 1024 + 1680 = 2704$

$t_{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{2704}}{2}$

Т.к. $t > 0$ (t - сторона Δ), то

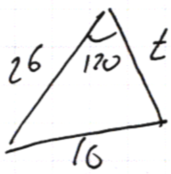
$t = \frac{-32 + 2\sqrt{676}}{2} = \sqrt{676} - 16 = 2\sqrt{119} - 16$

Значит, $x = \pm(\sqrt{119} - 8)$

$a = y = x^2 = 119 - 16\sqrt{119} + 64 = 183 - 16\sqrt{119}$

---

② По т. cos



$16^2 = 26^2 + t^2 - 2\cdot t\cdot 26\cdot \cos 120$

$256 = 676 + t^2 + 52t$

$t^2 + 52t + 420 = 0$

$D = 52^2 - 420\cdot 4 = 2704 - 1680 = 1024 = 2^{10}$

$t_{12} = \frac{-52 \pm 2^5}{2}$

Т.к. $t > 0$ (стор. Δ), то $t = \frac{32 - 52}{2}$ ↯

$t = \frac{-32 - 52}{2}$ ↯

Значит, такого t не существует.

~~Для первых 2-х случаев рассмотрим н-во Δ~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

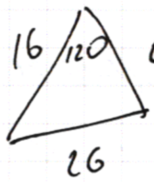
15-061

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②



По т. cos

$26^2 = 16^2 + t^2 - 2\cdot 16\cdot t\cdot \cos 120$

$676 = 256 + t^2 + 16t$

$t^2 + 16t - 420 = 0$

$D = 256 + 1680 = 1936 = 44^2$

$t_{12} = \frac{-16 \pm 44}{2}$ Т.к. $t > 0$ (стор. Δ), то

$t = \frac{44-16}{2} = 22 - 8 =$

$= \underline{14}$

$t = 14 \Rightarrow x = \pm 7$

$\Downarrow$

$a = y = x^2 = \underline{49}$

Ответ: $a \in \{49;\ 337\}$

№3

18-значное

"0", "5", "9"

Цифр 5 ровно 6 и они идут подряд. Объединим все "5" в один "блок" "555555". Этот "блок" можно поставить в число (18 свободных клеток) $18 - 5 = 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 13 способами.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Осталось посчитать кол-во вариантов расстановки чисел "0" и "9" на $18-6=12$ мест и умножить это кол-во на 13.

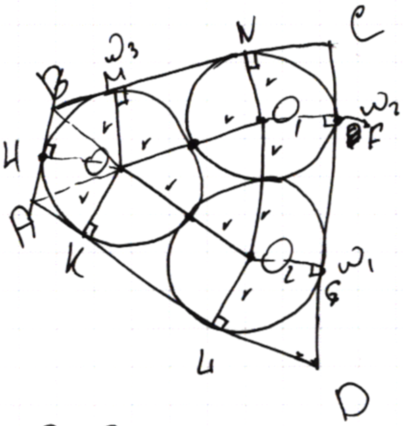
Всего расстановок 2^{12}, но заметим, что туда входят 2 расстановки с одними "9" и одними "0", т.е всего $2^{12}-2$ расстановок чисел "0" и "9"

Всего вар. $13\cdot(2^{12}-2)=13(1024\cdot4-2)=$

$=13\cdot4094=$ ~~...~~ 53222

Ответ: 53222

№4



① ∃ у окружностей радиусы r.

По св-ву отрезок, соед. центры ω проходит через их точку касания

По св-ву касат.

$AK=AH;\ HB=BM;\ NC=CF;\ GD=DL$.

Таким образом, $AD+BC-AB-CD=$
$=MN+KL-FG=10$

Заметим, что $OM=$ ~~...~~ $=ON=r$, кроме того $OM\perp BC;\ ON\perp BC \Rightarrow ON\parallel OM \Rightarrow$ по

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

признаку MOO_1N - параллелограмм

$\Downarrow$

$MN = OO_1 = 2r$

Аналогично $KL = 2r$

$FG = 2r$

Т.е. $MN + KL - FG = 2r + 2r - 2r = 2r = 10$

$\underline{\underline{r = 5}}$

(2) Заметим, что т.к. MOO_1N - пар-мм, то

$\angle MOO_1 = 180 - 90 = 90^\circ \Rightarrow OMQN$ - прямоугольник

Аналогично ~~$\angle OK$~~ $\angle KOO_2 = 90^\circ$.

$\triangle OO_1O_2$ - равносторонний со стороной $2r$

$\Downarrow$

$\angle O_1OO_2 = 60$.

$\triangle MOB = \triangle HOB$ по катету $(OM = OH = r)$ и

гипотенузе $(OB = OB) \Rightarrow \angle MOB = \angle BOH = \alpha$

Аналогично $\angle HOA = \angle AOK = \beta$

Тогда $\angle BOA = \alpha + \beta$

$\angle MOK = 2\alpha + 2\beta = \cancel{18} = 360 - 90 - 60 - 90 = 180 - 60 = 120$

$\Downarrow$

$\alpha + \beta = 60 \Rightarrow \underline{\angle AOB = 60}$

Ответ: а) $r = 5$

б) $\angle AOB = 60$

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \Rightarrow x>-5 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \quad (1) \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \quad (2) \\ x \geq -3 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ~~$x \in [-3; \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}; +\infty)$~~

~~(1) $\sqrt{x+3} > x$~~

~~ОДЗ: $x \geq -3$~~

~~$x+3 > x^2$~~

~~$x^2 - x - 3 > 0$~~

~~$D = 1 + 12 = 13$~~

~~$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$~~

~~-3, $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $+$ $-$ $+$~~

(2) $\sqrt{x+3} \neq 1+x$ $\quad x \geq -3$

$x+3 \neq 1+2x+x^2$

$x^2+x-2 \neq 0$

$D = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{-4}{2} = -2 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right.$

-2, 1

(1) $\sqrt{x+3} > x$

• $x \geq -3$

• ~~$x \in [-3; 0)$~~ • $x \in [-3; 0] \Rightarrow \sqrt{x+3} > x$

• $x \in (0; +\infty)$

$x+3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\quad$ $+$ $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ $-$ $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $+$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \cup [-3; 0] \Rightarrow x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

По св-ву логарифма разность имеет знак такой же, как и произвед.

$$\cancel{\sqrt{x+3}-x}\ (\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим, когда скобки равны 0

$\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$

$\sqrt{x+3} = x+1$ ОДЗ $x \geq -3$

$x+3 = x^2+2x+1$ $x+1 \geq 0$ $\Rightarrow x \geq -1$

$x^2+x-2=0$

$D = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{-4}{2} = -2 \text{ ш} \\ \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right.$

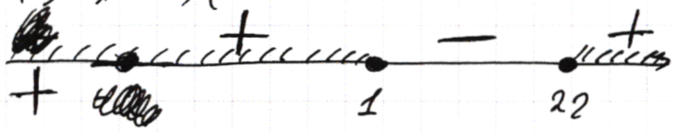
$5 - \sqrt{x+3} = 0$

$\sqrt{x+3} = 5$

$x+3 = 25$

$\underline{x = 22}$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(5 - \sqrt{x+3}) \geq 0$



$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [22; +\infty) \\ x \in \left[-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; 1]$

Ответ: $x \in [-3; 1]$

№2

Для нахождения экстремум вычислим производную.

$g'(x) = 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\cos 9x \cdot \sin 5x - 2\cdot \sin 7x \cdot 7 \cdot \cos 7x +$

$+ 2\cos x \cdot \sin x = \frac{5}{2}\cancel{\sin 14x} + \frac{5}{2}\sin 4x + \frac{9}{2}\cancel{\sin 14x} - \frac{9}{2}\sin 4x -$

$- 7\cancel{\sin 14x} + \sin 2x = -2\sin 4x + \sin 2x = -4\sin 2x \cdot \cos 2x + \sin 2x =$

$= \sin 2x \cdot (-4\cos 2x + 1)$

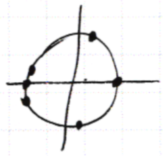
max и min, когда произв. равна 0.

$\sin 2x \cdot (-4\cos 2x + 1) = 0$ $\qquad$ $\cos 2x = +\frac{1}{4}$

$\sin 2x = 0$ $\qquad$ ~~cos~~

$2x = \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $2x = \pm \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$ $\qquad$ $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n, n \in Z$



Подставим значения ~~в~~ $x = \frac{\pi k}{2}$ в $g(x)$
$k \in Z$

$g(x) = \sin\frac{5\pi k}{2} \cdot \sin\frac{9\pi k}{2} - \sin^2\frac{7\pi k}{2} - \cos^2\frac{\pi k}{2} - 3 =$

$= 1 - 1 - 0 - 3 = \underline{\underline{-3}}$

Подставим $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$

$g(x) = \sin\left(\frac{5}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{9}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{7}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) -$

$- \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) - 3$

Ответ: -3;

$\sin\left(\frac{5}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{9}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{7}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) -$

$- \cos^2\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}\right) \underline{\underline{- 3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-061

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Всего при делении на 35 существует 35 разных остатков.

Если 2 числа имеют одинаковый остаток при делении на 35, то их разность кратна 35.

Значит, все 25 остатков различны.

Понятно, что для минимума нужно выбрать min 5 чисел из пром [141; 175]

Это числа 141; 142; 143; 144; 145

Остатки 1; 2; 3; 4; 5.

Минимум из отрезка [106; 140] - числа

111; 112; 113; 114; 115

Остатк 6; 7; 8; 9; 10.

Числа от 106 до 110 брать не можем, т.к. остатки у них от 1 до 5.

Из пром. [71; 105] выбираем мин. числа с остатками 0; 11; 12; 13...; 34

Это числа 81; 82; 83; 84; 85

Остатки 11; 12; 13; 14; 15

Из пром. [36; 70] миним. числа, не имеющие остатка от 1 до 15 - числа

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

51, 52, 53, 54, 55

Ост. 16; 17; 18; 19; 20

Из пром. [1; 35] выбираем мин. числа без остатков от 1 до 20.

Это числа 21; 22; 23; 24; 25

Ост 21; 22; 23; 24; 25

Посчитаем сумму

$21+22+23+24+25+51+52+53+54+55+$

$+81+82+83+84+85+111+112+113+114+115+$

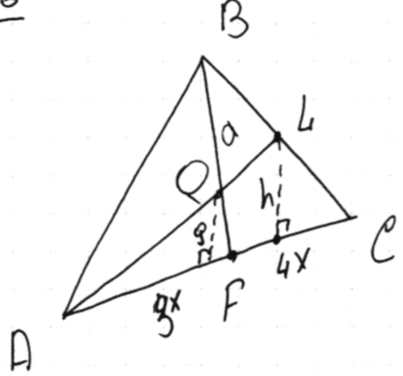
$+141+142+143+144+145=2075$

$= \cancel{43+47+76+105+109+163+167+196+}$

$=$

Ответ: 2075

№6



$S_{BQL} : S_{BAC} = 1:16$

h - расст. от L до AC

Пусть H - высота $\triangle ABC$ из т. B

$S_{ABC} = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$S_{ABF} = \frac{1}{2} H \cdot 3x \Rightarrow S_{ABC} : S_{ABF} : S_{BFC} = 7:3:4$

$S_{BFC} = \frac{1}{2} H \cdot 4x$

Пусть $S_{BQL} = a$. Тогда $S_{BAC} = 16a$; $S_{ABF} = \frac{16a}{7} \cdot 3$

$S_{BFC} = \frac{16a}{7} \cdot 4$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3x$

$\Rightarrow \frac{S_{ALC}}{S_{AQF}} = \frac{7h}{2q}$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 7x$

$\frac{1}{2} H \cdot 7x = 16a$

$H = \frac{16a \cdot 2}{7x}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_{AKC}}{S_{AQF}} = \frac{S_{AKC}}{S_{AKC} - S_{QKC}}$$

$$S_{QKC} = S_{BFC} - S_{BQK} = \frac{16a \cdot 4}{7} - a = \frac{64a - 7}{7} = \frac{54a}{7}$$

$$S_{AKC} = S_{ABC} - S_{AKC} =$$

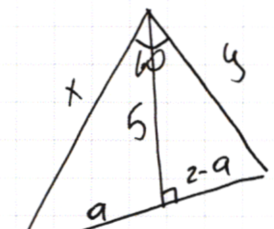
$$= 16a - \frac{1}{2}h \cdot 7x$$

$$\frac{16a - \frac{7}{2}hx}{16a - \frac{7}{2}hx - \frac{54}{7}a} = \frac{7h}{27}$$

$\cancel{27 \cdot 16a \ldots = 16 \cdot 7ha \ldots}$

$\cancel{\frac{h}{h} = \frac{S_{BFC}}{S}}$

<u>№4</u>



$x \cdot y = 42 \qquad z - ?$

По т. cos

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \underbrace{\cos 60}_{\frac{1}{2}}$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 42$$

По т. Пифагора $x^2 - \cancel{a^2} = y^2 - z^2 + 2az - \cancel{a^2}$

$$\frac{x^2 - y^2 + z^2}{2z} = a$$

$25 = x^2 - a^2$ $\qquad$ $z^2 = x^2 + y^2 - 42$ $\qquad$ $\times\, \cancel{28}\ 21$, 21, $+42$, 441

$25 = x^2 - \frac{(x^2 - y^2 + z^2)^2}{(2z)^2}$

$25 = x^2 - \frac{(x^2 - y^2 + x^2 + y^2 - 42)^2}{4z^2} = x^2 - \frac{(2x^2 - 42)^2}{4z^2} = x^2 - \frac{(x - 21)^2}{z^2}$

$25 = x^2 - \frac{x^2 - 42x + 441}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$

$25 \cdot z^2 = x^2 \cdot z^2 - x^2 + 42x - 441$

$z^2 \cdot (25 - x^2) = -x^2 + 42x - 441$

$z^2 = \frac{-x^2 + 42x - 441}{25 - x^2}$

$(x^2 + y^2 - 42)(25 - x^2) = -x^2 - 42x - 441$

$25x^2 - x^4 + 25y^2 - \underbrace{x^2 y^2}_{42^2} - 42 \cdot 25 + 42x^2 = -x^2 - 42x - 441$

$\frac{-x^4 + 68x^2 + 42x + 1155}{25} = y^2$

$-x^6 + 68x^4 + 42x^3 + 1155x^2 = 714 \cdot 25$

Из чего находим x, y, a, в итоге, и z, что нам и нужно.

$$\begin{array}{r} \times\ 4094 \\ 1113 \\ \hline 12282 \\ 4094 \\ \hline 53222 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 1024 \\ 4 \\ \hline 4096 \end{array}$$

$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$

$$\begin{array}{r} \times\ 4094 \\ 1113 \\ \hline 12282 \\ +\ 4094 \\ \hline 53222 \end{array}$$

$= 2\cdot($

$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt2}$

$\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{2}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$

$\left[\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\cdot(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))\right]$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\quad 2\cdot$

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$ $\quad \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

$g'(x)=5\cdot\cos5x\cdot\sin9x+9\cdot\sin5x\cdot\cos9x-2\cdot\sin7x\cdot(\sin7x)'-$

$-2\cdot\cos x\cdot(\cos x)'=$

$\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt2}{2}=$

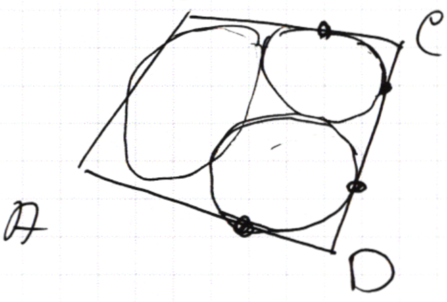
$=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$

$=5\cdot\cos5x\cdot\sin9x+9\cdot\sin5x\cdot\cos9x-14\cdot\sin7x\cdot\cos7x+$

$+2\cos x\cdot\sin x=14\cdot\frac{1}{2}\cdot(\sin4x-\sin14x)-7\sin14x+$ $\frac{2\pi}{3}$ $\quad \pi/3$

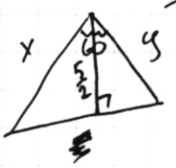
$=\frac{5}{2}\cdot(\sin4x-\sin14x)+\frac{9}{2}\cdot(\sin4x-$ $\quad +\sin2x=$

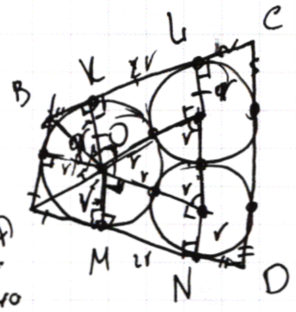
$=7\sin4x-$



$AD+BC-AB-CD=10$

$x\cdot y=12$





$2\alpha+2\beta=360-180-60=$

$=300-180=$

$=200-80=$

$=120$

$\alpha+\beta=60$

$\angle$ равно

$KL+MN=10$

$2r+2r=10$

$4r=10$

$r=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$AO\cdot OB=42$

$AB-?$

$1-\sqrt{13} > -6$

$7-\sqrt{13} > 0$

49

$(\sqrt{x+3}-x-1)(5-\sqrt{x+3})\geq0$

$5\sqrt{x+3}-x-3-5x+x\sqrt{x+3}-5+\sqrt{x+3}=$

$=-6x+(\sqrt{x+3})(6+x)-8\geq0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

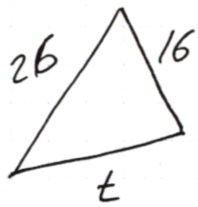
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-061

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$t < 26+16 \Rightarrow \begin{cases} t < 42 \\ t > 10 \end{cases}$

$t+16 > 26 \Rightarrow$

$t+26 > 16$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases}$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}-x) \geq 0$

1. $42 \vee 2\sqrt{337}$

$1764 \vee 1348$

$1764 > 1348$

$\Downarrow$

$42 > 2\sqrt{337}$

$10 \vee 2\sqrt{337}$

$100 < 4 \cdot 337$

$\Downarrow$

$10 < 2\sqrt{337}$

2. $42 \vee 2\sqrt{119} - 16$

$58 \vee 2\sqrt{119}$

$58 > 2\sqrt{119}$

$10 \vee 2\sqrt{119} - 16$

$26 \vee 2\sqrt{119}$

$13 \vee \sqrt{119}$

~~$169 > \sqrt{119}$~~

$169 > 119$

$\Downarrow$

такого быть не может.

Ответ: $a = 337$

256

$1680 + 256 = 1936$

1936	2
968	2
484	2
242	2
121	

44×44: $176 + 176 = 1936$

$22-8 = 20-6 = 14$

$8-4=4$ $\quad 18-4=14$

черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g'(x) = (\sin 5x)' \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot (\sin 9x)' - (\sin^2 7x)' - (\cos^2 x)' = 5 \cdot \cos 5x \cdot \sin 9x + 9 \sin 5x \cdot \cos 5x - 2 \cdot \sin 7x \cdot (\sin 7x)' - 2 \cdot \cos x \cdot (\cos x)' =$

$= 5 \cos 5x \cdot \sin 9x + 9 \sin 5x \cdot \cos 5x - 2 \sin 7x \cdot \cos 7x + 2 \cos x \cdot \sin x =$

$=$

$= \sin 2x - \sin 14x + \frac{9}{2} \sin 10x + \frac{5}{2}(\quad)$

$\sin 45 \cdot \cos 60 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin 45 \cdot \cos 60 = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$(y^2 - x^2 + z^2)(y^2 - x^2 + z^2) = y^4 - y^2x^2 + y^2z^2 - x^2y^2 + x^4 - x^2z^2 + y^2z^2 - x^2z^2 + z^4 =$

$= y^4 + x^4 + z^2 - 2x^2y^2 + y^2z^2 - 2x^2z^2$

Н-во Д!

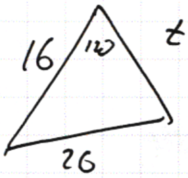
1074 | 2

2704	2
1352	2
676	2
338	2
119	

$42 \times 42 = 1764$

$337 \times 4 = 1348$

$13 \times 13 = 169$



$\sqrt{x+3} - x - 1 = 0$

$\sqrt{x+3} = x + 1$

$x + 3 = x^2 + 2x + 1$

$x + 3 = x^2 + 2x - x + 1 - 3 = 0$

$x^2 + 2x - x + 1 - 3 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2;\ \frac{2}{2} = 1$

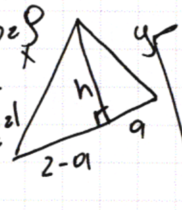
$58 \times 58 = 3364$

$119 \times 4 = 476$

$676 = 256 + t^2 + 32t$

$2 - 1 - 1 = 0$

$\sqrt{-2+3} + 2 - 1 = \sqrt{1} + 1 = 0$



$13 \times 13 = 169$

$h^2 = y^2 - a^2 = y^2 - \frac{(y^2 - x^2 + z^2)^2}{4z^2} = 4y^2z^2 - y^4 - x^4 - z^4$

$y^2 - a^2 = x^2 - z^2 + 2za - a^2$

$\frac{y^2 - x^2 + z^2}{2z} = a$

$8 - 5 = 3$

$(\sqrt{9} - 6 - 1)(5 - \sqrt{9}) = (3 - 6 - 1)(5 - 3)$

$\sqrt{-2+3} + 2 - 1 = 1 + 2 - 1$

$\frac{-1 \pm 3}{2} =$

$-4/2 = -2$

$\frac{2}{2} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-061

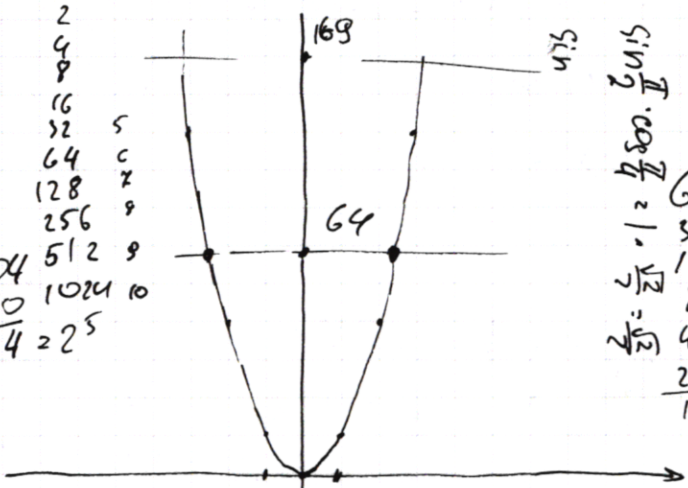
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $y = x^2$

$y = 169$
$y = 64$
$y = 9$



$52 \cdot 52$: $104 + 260 = 2704$

$2704 - 1680 = 1024 = 2^5$

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

$y = 169$

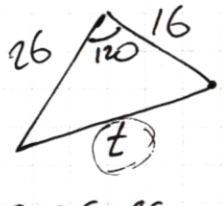
$169 = x^2$

$x = \pm 13 \Rightarrow$ одна сторона $\underline{26}$

$y = 64$

$64 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{64} = \pm 8 \Rightarrow$ втор. сторона 16

1



$t^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \underbrace{\cos 120}_{-\frac{1}{2}}$

$t^2 = 26^2 + 16^2 - 26 \cdot 16 = 676 + 256 - 416 =$

$= 260 + 256 = 516$

$t = \sqrt{516}$

$x = \pm \dfrac{\sqrt{516}}{2} \Rightarrow y = x^2 = \dfrac{516}{4}.$

$1348 | 2$, $674 | 2$, 337

$676 + 256 = 932$

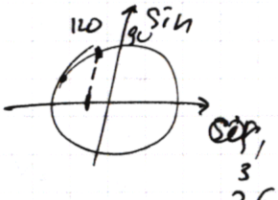
$1024 + 1680 = 2704$

$64|2$, $32|2$, $16|2$, $8|2$, $4|2$, $2|2$, 1

$2704|2$, $1352|2$, 676

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{2} \sin$

$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot (\sin \quad \sin \quad)$



$32 \cdot 32$: $64 + 96 = 1024$

$26 \cdot 26$: $156 + 52 = 676$

$16 \cdot 16$: $96 + 16 = 256$

$26 \cdot 16$: $156 + 26 = 416$

$256 \cdot 4 = 1024$

2

3 +

$\frac{2}{x-7} \cos \frac{7}{x+7} \sin - 7 = 8 \sin + 7 \sin$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

1 5
1 7

От 1 до 35

$\times\,35 \cdot 4 = 140$

$141 \,|\, 35$ 35 70 105 140

$141 \equiv 1 \bmod 35$

n ост пр : на 35

⇓

10 5 ост. выбрали => эти 5 ост. больше выбирать нельзя

Из каждого пром. по 5 разных остатков

[5 · 5 = 25] остатков.

Из мах пром 141 + 142 + 143 + 144 + 145
1 2 3 4 5

⇓

след. мин. числа имеют ост. 5, 6, 7, 8, 9

пото

$= \frac{3x}{2} \cdot \frac{32a - 63x}{7}$

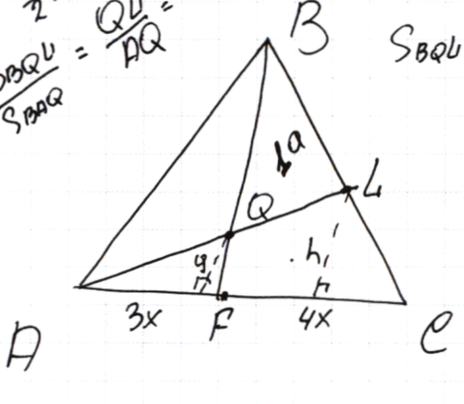
В $\triangle BQL$ l-вас

$\frac{1}{2} l \cdot QL = a$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAQ}} = \frac{QL}{AQ} = S$

$S_{ABQ} = \frac{16a}{7} \cdot 3 = \frac{1}{2} H \cdot 3x - \frac{1}{2} q \cdot 3x = \frac{3x}{2}(H - q) = \frac{3x}{2} \cdot \left(\frac{32a}{7x} - q\right) =$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 1 : 16$



43 + 47 + 76 + 105 + 108 +
+ 163 + 167 + 296 + 225 + 229 +
+ 283 + 287 + 145 =
= 80 + 181 + 108 +
+ 230 + 521 + 229 + 570 + 145 =
= 277 + 108 + 751 + 799 + 145 =
= 380 + 1550 + 145 =
= 1930 + 145 = 2075

$S_{BAF} : S_{BFC} = 3 : 4$

$S_{BQL} = a \Rightarrow S_{ABC} = 16$

$S_{BAF} = \frac{16}{7} \cdot 3 = \frac{48}{7} a = \frac{1}{2} H \cdot 3x$ $\quad S_{BQC} = \frac{64}{7} - 1 =$

$S_{BFC} = \frac{16}{7} \cdot 4 = \frac{64}{7} a = \frac{1}{2} H \cdot 4x$ $\quad = \frac{64 - 7}{7} = \frac{57}{7}$

$S_{QLCF} = S_{LAC} - S_{AQF} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 7x - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 3x = \frac{57}{7} a$

$\frac{S_{ABC}}{S_{ALC}} = \frac{h}{H} = \frac{16}{}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-061
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g'(x) = 5\cos 5x \sin 9x + 9 \sin 5x \cos 9x - 2\sin 7x \cdot \cos 7x \cdot 7 +$
$+ 2\cos x \sin x$

$2 \cdot \cos 5x \cdot \sin 9x = \sin 14x + \sin 4x$

$2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\alpha + \sin\beta$

$2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 9x =$
$= \sin 14x - \sin 4x$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 9x \qquad \frac{\alpha-\beta}{2} = 5x$

$+\begin{cases} \alpha+\beta = 18x \\ \alpha-\beta = 10x \end{cases}$

$\cancel{2\alpha = 8x}$
$\cancel{\alpha = 4x}$
$\cancel{\beta = 18x - 4x}$

$2\alpha = 28x$
$\alpha = 14x \Rightarrow \beta = 4x$

$\frac{360-180-60}{2}$

$\frac{120}{2} = 60$

2769-

$25+42+1 =$
$= 25 + 43 =$
$= 68$

$42-25 =$
$= 22-5 =$
$= 20-3 = 17$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cdot \cos 2x$

AO · OB = 42

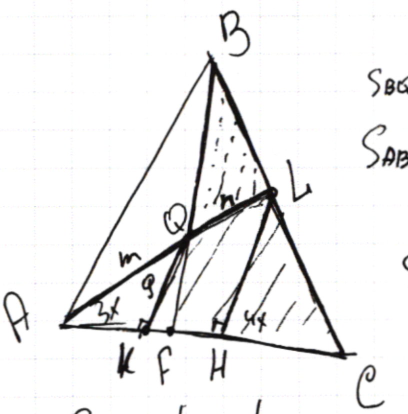
$g'(x) = \frac{5}{2} \cdot \cancel{\sin 14x} + \frac{5}{2}\sin 4x + \frac{9}{2} \cdot \cancel{\sin 14x} - \frac{9}{2}\sin 4x - 7\cancel{\sin 14x} + \sin 2x =$

$= -2\sin 4x + \sin 2x$

$-4\cos 2x + 1 =$
$= -4 \cdot (\cos^2 x - 1) + 1 =$
$= -8\cos^2 x + 5$

$\cos^2 x = \frac{5}{8}$

$\sin^2 x =$



$S_{AQB} : S_{BLQ} = m : n$

$S_{FQLC} = \frac{1}{2}$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 1:16$

$S_{ABF} : S_{FBC} =$
$= 3:4$

$S_{ABC} = 1a$

$S_{BQL} = \frac{1}{16}a$

$S_{ABF} = \frac{3}{7}a \quad S_{BFC} = \frac{4}{7}a$

$S_{QFCL} = \frac{4}{7} - \frac{1}{16} =$

$= \; = 57/(16 \cdot 7)$

$\times\frac{16}{4}$
64

$-\frac{64}{7}$
57

$S_{BAC} : S_{LAC} = h_{ABC} : h_{ALC}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)