МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-032

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

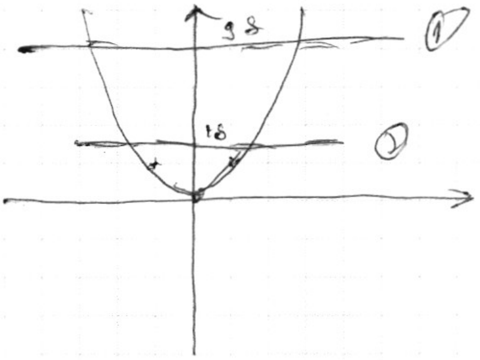
15-032

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



Пусть l_1 – длина отрезка ①, l_2 – длина отрезка 2, а l_a – неизвестная длина (пока что, зависит от a).

Тогда:

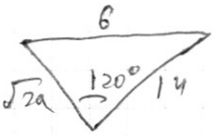
l_1: $y = 2x^2 = 98 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow l_1 = 14$.

l_2: $y = 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow l_2 = 6$.

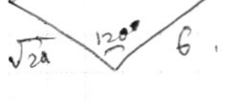
l_3: $y = 2x^2 = a \Rightarrow x^2 = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow l_a = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$.

Тогда:

1) 

– невозможно, т.к. у большего угла большая сторона.

2) 

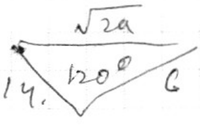
Пусть $\sqrt{2a} = t \Rightarrow$ по т. косинусов: $t^2 + 6^2 - 2t\cdot 6\cdot\cos 120^\circ =$

$= t^2 + 6^2 + 6t = 196$.

$t^2 + 6t - 160 = 0$; $D = 36 + 4\cdot 160 = 676 = 26^2$,

$t_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{26^2}}{2} = -3 \pm 13 \Rightarrow$ т.к. $t > 0 \Rightarrow t = 10$.

$\sqrt{2a} = 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow a = 50$.

3) 

$196 + 36 + 14\cdot 6 = 196 + 36 + 84 = 216 = t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ проверим через условие сущес–

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

твования треугольника:

$t = \sqrt{216}$; $14 < t < 15$ => удовлетворяет.

Тогда: $t^2 = 2a = 216 \Rightarrow a = 108$.

Ответ: $a = 50; 108$

N3.

Мы можем двигать последовательность из 7 „8" и получать новые комбинации => посчитаем кол-во возможных позиций!

$N_1 = 17 - 7 + 1 = 11$

Теперь посчитаем, сколькими способами можно заполнить оставшееся место:

$n_0 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots = 2^{17-7} = 2^{10} = 1024$.

Однако в эти случаи входят две ситуации, которые не удовлетворяют условиям – комбинации из одной цифры =>

$n = n_0 - 2 = 1022$.

Тогда итоговое число:

$N = N_1 \cdot n = 1024 \cdot 11 = 11264$.

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times \quad 11 \\ \hline 1024 \\ 1024 \\ \hline 11264 \end{array}$$

N5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.

ОДЗ: $\sqrt{x+7} - x > 0$ (1)
$\sqrt{x+7} - x \neq 1$. (2)
$x + 4 > 0$. (3)

(1): $\sqrt{x+7} - x > 0$,
$\sqrt{x+7} > x$,
$x + 7 > x^2$.
$x^2 - x - 7 < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D = 1 + 4\cdot 7 = 29$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$; $x = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$, т.к. при $x<0$ (и соблюдении остального ОДЗ) $\sqrt{x+7}-x>0$.

Тогда: $x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

(2): $\sqrt{x+7}-x\neq 1$.

$\sqrt{x+7}\neq x+1 \Rightarrow x+7\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6\neq 0$.

$D=1+24=5^2$.

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow x\neq 2$

(т.к. корень) $\Rightarrow x\neq 2$

(3): $x+4>0 \Rightarrow x>-4$.

Итого:

$x<\frac{1+\sqrt{29}}{2}$, $x\neq 2$; $x>-4$.

$\Rightarrow x\in(-4;\ 2)\cup\left(2;\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$, т.к. $\frac{1+\sqrt{29}}{2}>2$.

Решим неравенство:

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7} \Rightarrow x\geq -2$ (т.к. корень ≥ 0).

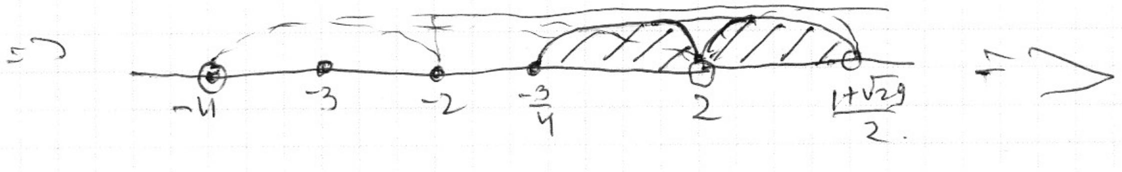
$4x^2+16x+16\geq x+7$.

$4x^2+15x+9\geq 0$.

$D=15^2-4\cdot 4\cdot 9=225-144=81=9^2$.

$x_{1,2}=\frac{-15\pm 9}{8}=-3;\ -\frac{3}{4} \Rightarrow$ т.к. $x\geq -2$:

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$.

№2.

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

Найти min $g(x)$: и max $g(x)$:

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) \Rightarrow$

$g'(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x)' - \frac{1}{2}(\cos 10x)' - (\sin^2 x)' + (\cos^2 5x)' + 4' =$

$= -2\sin 4x + 5\sin 10x - 2\sin x\cos x - 10\cos 5x \sin 5x =$

$= -4\sin 2x\cos 2x + 10\,\cancel{\sin 5x}\cos 5x - 2\sin x\cos x -$

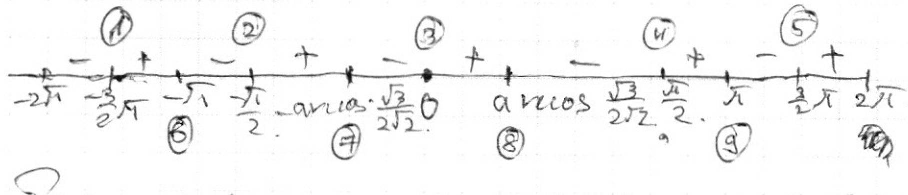
$-10\cancel{\cos 5x}\sin 5x = -4\sin 2x\cos 2x - 2\sin x\cos x$.

$-2(2\sin 2x\cos 2x + \sin x\cos x) = 0$.

$-(4\sin x\cos x \cdot \cos 2x + \sin x\cos x) = 0$.

$-\sin x\cos x\,(4\cos 2x + 1) = 0$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n. \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 2\cos^2 x = \frac{3}{4}. \\ \cos^2 x = \frac{3}{8} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pm \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$



Рассмотрим полученные точки:

①: $\sin(-\frac{3}{2}\pi)\cdot\sin(-\frac{21}{2}\pi) - \sin^2(-\frac{3}{2}\pi) + \cos^2(\frac{15}{2}\pi) + 4 =$
$= 1 - 1 + 4 = 4$.

②: $\sin(-\frac{3\pi}{2}) \cdot \sin(-\frac{7}{2}\pi) - \sin^2(-\frac{\pi}{2}) + \cos^2(-\frac{\pi}{2}) + 4 = 1 - 1 + 4 = 4$.

. . .

Мы видим, что ф-ия периодична (т.к. множители у углов и углы) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ min = 4

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь рассмотрим т. максимума:

6: $\sin(-3\pi)\sin(-7\pi) - \sin^2(-\pi) + \cos^2(-5\pi) + 4 =$

$= 1+4 = 5$

7: $\sin\left(-3\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right)\cdot\left(-7\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) - \sin^2\left(-\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) +$

$+ \cos^2\left(-5\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) + 4 = \sin\left(-3\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right)\sin\left(-7\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) -$

$- 1 + \cos^2\left(-\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) + \cos^2\left(-5\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) =$

$= \sin\left(3\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right)\cdot\sin\left(-7\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) - 1 + \frac{3}{8} + \cos^2\left(-5\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right)$

это не должно быть максимумом, т.к. $\frac{\sqrt2}{2} > \frac{\sqrt3}{2\sqrt2}$ и $1 - \frac{3}{8} - \cos^2\left(-5\arccos\frac{\sqrt3}{2\sqrt2}\right) \neq$

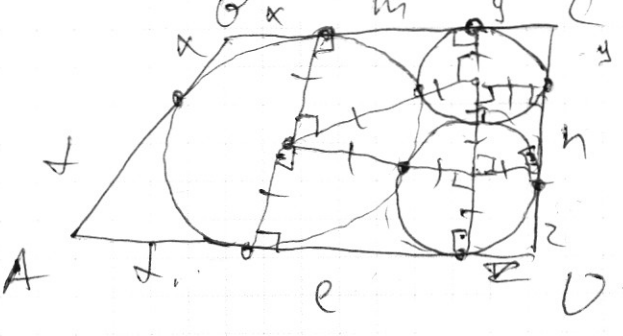
$\neq 0$

Далее также видим период $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\max(g(x)) = 5$.

Ответ: $\min(g(x)) = 4$; $\max(g(x)) = 5$.

№4.



а) $AD + BC - AB - CD = 12$.

$AD = f + l + z$

$BC = x + m + y$

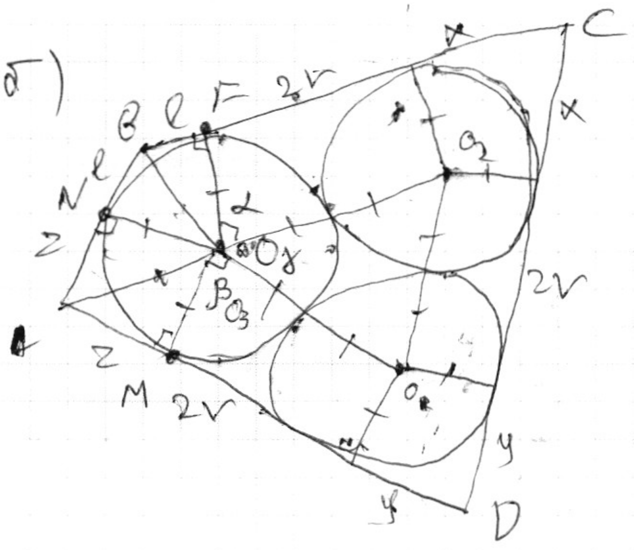
$AB = x + f$

$CD = z + y + n$

(р-ие от т. об угле, опирающееся на окружность)

$AD + BC - AB - CD = f + l + z + x + m + y - x - f - z - y - n =$

$= l + m + n = 12$. Из того, что окр. попарно касаются: $l = m = n = 2r \Rightarrow 6r = 12 \Rightarrow r = 2$.



$\angle AOB$ – ?

1) Из п.1: из прямоугольников, образованных центрами ок. и высотами: $\angle = 90^0$, $\beta = 90^0$
Из треугольника образованного отрезками, ограниченными центрами окружности: $\triangle O_1O_2O_3$ – равносторонний $\Rightarrow$ $\gamma = 60^0$;

2) AO – бис. угла MON (т.к. $AM = AN = 2$, а также т.к. $ON = OM = r$). Аналогично OB бис. $\angle NOF$.

3) $\angle MOF = 360^\circ - \angle\alpha - \cancel{\angle}\beta - \angle\gamma = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ =$
$= 120^0$;
$\angle AOB = \frac{1}{2}\angle MOF = 60^0$ (из п. 2).

в). $AO \cdot BO = 58$. Найти AB.

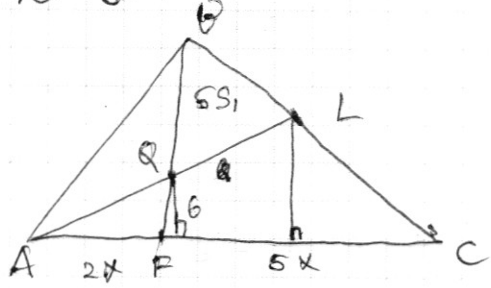
$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} r \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}} AO \cdot OB \cdot \sin\angle AOB}{\cancel{\frac{1}{2}} r} =$

$= \dfrac{58 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{58\sqrt{3}}{4} = \dfrac{29\sqrt{3}}{2}$

Ответ: а) 2 б) 80^0 в) $\dfrac{29\sqrt{3}}{2}$.

№ 6.



L_1 – ?

$S_{ABC} = 12 S_1$; $\Rightarrow S_{FBC} = \frac{5}{7} \cdot S_{ABC} =$
$= \frac{5}{7} \cdot 12 S_1 = \frac{60}{7} S_1 \Rightarrow FQLC = \frac{25}{7} S_1$

$S_{ABF} = \frac{2}{7} S_{ABC} = \frac{2 \cdot 12}{7} S_1 = \frac{24}{7} S_1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-032

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{ABC} = S_{AQB} + 5S_1 + \frac{25}{7}S_1 + \frac{1}{2}Q_6 \cdot 2x = S_{AQB} + \frac{1}{2}L_6 \cdot 7x + 5S_1.$$

$$\cancel{S_{AQB}} + \cancel{5S_1} + \frac{25}{7}S_1 + \frac{1}{2}Q_6 \cdot 2x = \cancel{S_{AQB}} + \cancel{5S_1} + \frac{1}{2}L_6 \cdot 7x.$$

$$\frac{25}{7}S_1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}Q_6 \cdot x = \frac{1}{2}L_6 \cdot 7x = 3{,}5L_6x$$

$$Q_6 = 6 \Rightarrow \frac{25}{7}S_1 + 6x = 3{,}5L_6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_6 = \frac{25 S_1}{7x \cdot 3{,}5} + \frac{6x}{3{,}5x} = \frac{50}{49}\frac{S_1}{x} + \frac{12}{7}$$

$$\frac{L_6}{B_6} = \frac{S_{ALC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{25}{7}S_1 + 6x}{12S_1} = \frac{25}{84} + \frac{1}{2}\frac{x}{S_1}$$

$$L_6 = \frac{25}{84}B_6 + \frac{B_6}{2}\frac{x}{S_1} = \frac{50}{49}\frac{S_1}{x} + \frac{12}{7}$$

$$B_6 \cdot x = S_1$$

$$\frac{25}{84}B_6 + \frac{\cancel{S_1}x}{2\cancel{S_1}} = \frac{50}{49}\frac{S_1}{x} + \frac{12}{7}.$$

$$\frac{25}{84}B_6 + \frac{x}{2} = \frac{50}{49}\cdot\frac{B_6\cdot\cancel{x}}{\cancel{x}} + \frac{12}{7}.$$

$$\frac{25}{84}B_6 + \frac{x}{2} = \frac{50}{49}B_6 + \frac{12}{7}.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-032

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y = 2x^2$.

$98 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow l_1 = 14$.

$18 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow l_2 = 6$.

$a = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} =$

$= \sqrt{2a} = t > 0$.

1) $14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ = t^2$.

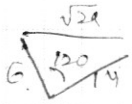
$14^2 + 6^2 + 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 196 + 36 + 168 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 196 + 36 + 84 = 216 =$

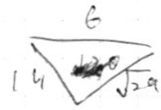
$= t^2 = 2a \Rightarrow a = \frac{216}{2} = 108$

$\sqrt{216} \approx 14$ ✓.

24 × 6 = 168



2)



$196 + 2a + 14\sqrt{2a} = 36$

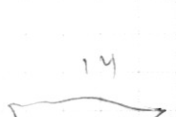
$160 + 2a + 14\sqrt{2a} = 0$.

~~$80 + a + 7\sqrt{2a} = 0$.~~

$t^2 + 14t + 160 = 0$.

$D = 14^2 - 4 \cdot 160 < 0$.

3)



$36 + 2a + 6\sqrt{2a} = 196$.

$2a + 6\sqrt{2a} = 160$

$t^2 + 6t - 160 = 0$

$D = 36 + 4 \cdot 160 = 36 + 640 = 676 = 26^2$

26 × 26: 156, 52, 676

$t_{1,2} = \frac{-6 \pm 26}{2} = -3 \pm 13 \Rightarrow t = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{2a} = 10 \Rightarrow 2a = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 50$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$

$g'(x) = (\sin 3x)' \sin 7x + \sin 3x \cdot (\sin 7x)' - 2\sin x \cdot \cos x +$

$+ 5 \cdot 2 \cdot \cos 5x \cdot \sin 5x = 3\cos x \sin 7x + 7\sin 3x \cos 7x -$

$- 2\sin x \cos x - 10\cos 5x \sin 5x = 3\cos x \sin 7x +$

$+ 7\sin 3x \cos 7x - \sin 2x - 5\sin 10x.$

$\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} \cancel{+} \sin -\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{7}{12}\pi + \cancel{\sin} \cdot \frac{1}{12}\pi\right) =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{1}{12}\pi + \cos\frac{1}{12}\pi\right) = \cos\frac{1}{12}\pi$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\cos 15^\circ - ?$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos x = \sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}.$

$\sin\frac{1}{12}\pi = \sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$

$\sqrt{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{3}+2 = \frac{1}{2}.$

$\sin\frac{1}{12}\pi = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} =$

$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

$\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$

$= \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2}?$

$2 - \cancel{\sqrt{3}} + 2 + \cancel{\sqrt{3}} + 2\sqrt{4-3} = 2$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin\alpha+\beta + \sin\alpha-\beta).$

$\frac{3}{2} \cdot (\sin 8x + \sin 6x) + \frac{7}{2}(\sin 10x - \sin 4x) - \sin 2x - 5\sin 10x =$

$= \frac{3}{2} \cdot 2\sin 4x \cos 4x + \frac{3}{2}\sin 6x + \frac{7}{2}\sin 10x - \frac{7}{2}\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x$

$= 3\sin 4x \cos 4x + \frac{3}{2}\sin 6x - 1{,}5\sin 10x - \frac{7}{2}\sin 4x -$

$- \sin 2x.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-032

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\right.$

$\frac{1}{2}\cdot 1$

$\sin 3x\cdot\sin 7x=$

$\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cdot\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)-$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}($

$-\sin^2\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{5\pi}{4}+4=$

$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4\cdot 53{,}5$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}$

$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sin\frac{5\pi}{12}\right.$

$\frac{\pi}{6}\quad\frac{\pi}{4}$

$\sin 3x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin(3x+4x)=\sin 3x\cdot(\sin 3x\cos 4x+$

$+\sin 4x\cos 3x)=\sin^2 3x\cos 4x+\sin 4x\cdot\cos 3x\cdot\sin 3x$

$\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)$.

$\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+\cos\frac{1}{12}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{12}\pi+\cos\frac{1}{12}\pi\right)=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$. $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}=\sqrt{2}$.

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\sin 3x\sin 7x=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 10x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = -2\sin 4x + 5\sin 10x - 2\sin x\cos x - 10\cos 5x\cdot\sin 5x -$

$= \cancel{-2\sin 4x + 10\sin 5x\cos 5x}$

$-4\sin 2x\cos 2x + 10\sin 2x\cos 2x - 2\sin x\cos x - 10\cos 5x\sin 5x =$

$= -4\sin 2x\cos 2x - 2\sin x\cos x = 0.$

$-2\sin 2x\cos 2x - \sin x\cos x = 0.$

$-4\sin x\cos x\cdot\cos 2x - \sin x\cos x = 0.$

$\sin x\cos x(-4\cos 2x - 1) = 0.$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n.$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$

$\cos 2x = -\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = -\frac{1}{4}.$

$2\cos^2 x = \frac{3}{4}.$

$\cos^2 x = \frac{3}{8}$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\cancel{-8\sin x\cos x\cos 2x - 2\sin x\cos x = 0}$

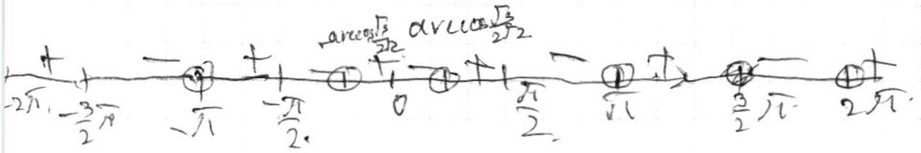
$8\sin x\cos x\cos 2x + 2\sin x\cos x = 0$

$4\sin x\cos x\cos 2x + \sin x\cos x = 0$

$2\sin x\cos x(4\cos 2x + 1) = 0$

$\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\sin\frac{\pi}{2} =$

$= \frac{1}{2}(\cos\pi -$



$\sin 3x\cdot\sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = 5$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin\frac{9}{4}\pi\cdot\sin\frac{21}{4}\pi -$

$-\sin^2\frac{3}{4}x + \cos^2\frac{15}{4}x + 4 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 4 =$

$= \cancel{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = 0}$

$-\frac{1}{2} + 4 = -3,5$

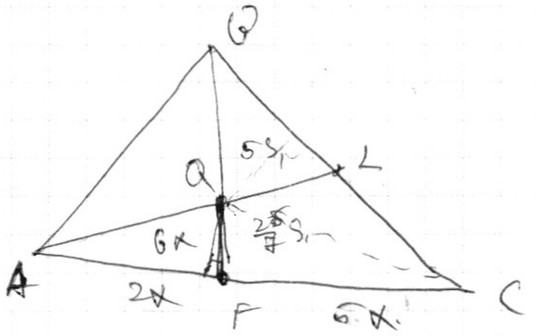
$\sin\frac{3}{2}\pi\cdot\sin\frac{3}{2}\pi - \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{5\pi}{2} + 4 = 1 - 1 + 0 + 4 = 4.$

$\sin\pi\cdot\sin 7\pi - \sin^2\pi + \cos^2 5\pi + 4 = 1 + 4 = 5$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{1}{2} L_x \cdot 7x - 6x =$

$= 3{,}5 L_x \cdot x - 6x =$

$= x\ (3{,}5 L_x - 6)$.

$\frac{1}{2} Q_a L \cdot QC + \frac{1}{2} 6 \cdot 7x + \frac{1}{2} Q_c AQ$

$=$

$6x + 5S_1 + S_{QLCF} + S_{AQQ} = 12S_1.$

$6x + S_{QLCF} + S_{AQQ} = 7S_1$

$\frac{2}{7} \cdot 12S_1 + 5S_1 + S_{QLCF} = 12S_1$

$\frac{24}{7} S_1 + 5S_1 + S_{QLCF} = 12S_1 = 6x + 5S_1 + S_{QLCF} + S_{AQQ}$

$\frac{24}{7} S_1 = 6x + S_{AQQ}$ $\qquad 6x = \frac{24}{7} S_1 - S_{AQQ}$

$\frac{2}{7} \cdot 12S_1$
$= \frac{24}{7} S_1$

$S_{AQQ} + 6x + S_{QLCF} = 7S_1$

$\cancel{S_{AQQ}} - \cancel{S_{AQQ}} + \frac{24}{7} S_1 + S_{QLCF} = 7S_1$

$3\frac{3}{7} S_1 + S_{QLCF} = 7S_1$

$3\frac{4}{7} S_1 = S_{QLCF}$
$= \frac{25}{7} S_1$

$\frac{L_x}{6L}$

$= \frac{24}{7} S_1$

$\frac{5}{7} \cdot 12 S_1 + S_{AQQ} + 6x = 12S_1$

$L_x \cdot x + 5S_1 =$
$= 6x + \frac{60}{7} S_1$

$\frac{L_x}{6} \cdot 6x = L_x \cdot x$

$L_x \cdot x + 5S_1 + S_{AQQ} = 12S_1$
$6x + \frac{60}{7} S_1 + S_{AQQ} = 12S_1$

$L\alpha \cdot x = 6x + \frac{25}{7} S_1$

$L\alpha = \frac{6x + \frac{25}{7} S_1}{x} = 6 + \frac{25}{7x} S_1$

$\cancel{S_1 = 7x \cdot Lx \cdot \frac{1}{2}}$

$\cancel{L\alpha = 6 + 25 \cdot Lx \cdot \frac{1}{2}}$

$\cancel{L\alpha = 6 + 12{,}5\, L\alpha}$

$L\alpha = \frac{25}{49x} S_1$

$\cancel{6 + \frac{25}{7x} S_1 = \frac{25}{7x} S_1 \cdot \frac{1}{7}}$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$,

$\sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot (\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})$.

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4})$,

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

$\sin\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sin\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{\pi}{3}) =$

$1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (4 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + 1) = 0$

$\frac{1}{2} \cdot 1 = 0$.

$10\cos$

$\cancel{3\cos 3 \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x \; 2\sin^2 x + \cos 5 \, x}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} 3, \quad -\sqrt{2}$

$3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x\cos x -$

$- 10\cos 5x \sin 5x =$

$3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 10\frac{1}{2} =$

$1{,}5 + 3{,}5 - 1 - 5 = 5 - 5 - 1 = -1$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$17-7+1=11$ возможных ...888...

10 из 0,7.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
2 2 2 2 2 2 2 2 2 1

$2^{10}-2$

$11\cdot(2^{10}-2)$

1 2 3
0 0 7
0 7 7
0 7 0
7 7 0
7 0 0
7 0 7

2^3-2

№ 5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$$\boxed{\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \\ x\neq 2 \end{cases}}$$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x$

1) $x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$D=1+4\cdot7=1+28=29$

$\sqrt{x+7}=x$

$x_{12}=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

=

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

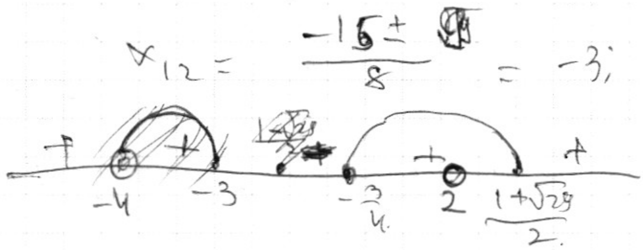
$2x+4>0$
$\Rightarrow x>-2$

$4x^2+16x+16\geq x+7$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=15^2-4\cdot4\cdot9=225-16\cdot9=225-144=$
$=81=9^2$

$x_{12}=\frac{-15\pm 9}{8}=-3;\ -\frac{3}{4}$

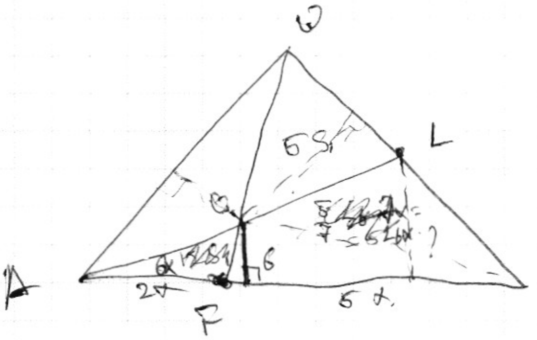


$x\in[-\frac{3}{4};\ 2)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$a-b \neq 45n.$

1 2 3 4 5 6 5 2 53; 54; 56; 56; 57.

N6.



$\cancel{S_1 = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2x = 6x}$

$\cancel{OS_1 = 35x}$

C. $12S_1 = Q_c \cdot AB + 5S_1 + 7x \cdot L_6$

$= 6x + \frac{5}{7} 12S_1 + Q_c \cdot AB.$

$Q_c \cdot AB + 5S_1 + 7x\, L_6 = 6x + \frac{60}{7} S_1$

$ABF = \frac{2}{7} S_{ABC} =$ $\frac{35}{7} S_1 + 7x L_6 = 6x + \frac{60}{7} S_1$

$= \frac{2\cdot 12}{7} S_1 = \frac{24}{7} S_1$ $7x\, L_6 = \cancel{\frac{25}{7} S_1} = 6x + \frac{25}{7} S_1.$

$L_6 = \frac{25}{49x} S_1$ $\frac{6}{7} +$

$S_1 = 7x \cdot B_6 \cdot \frac{1}{2}$

$42x + \frac{QL}{AL} \cdot 12S_1 + Q_c AB = 12S_1$ $\frac{S_1}{7x} = \cancel{7x} \cdot B_6 \cdot \frac{1}{2}.$

$5S_1 = \frac{QL}{AL} \cdot \frac{BL}{BC} 12S_1.$ $\frac{25 \cdot B_6 \cdot \frac{1}{2}}{7}.$

$\Rightarrow \cancel{5S_1} =$

$\Rightarrow \frac{QL}{AL} \cdot 12S_1 = \frac{5S_1 \cdot BC}{BL}$

$42x + \frac{5S_1 \cdot BC}{BL} + Q_c AB = 12S_1$

$\frac{1}{2}Q_c \cancel{AB} + 5S_1 + L_6 \cdot 7x = \frac{1}{2}Q_c \cancel{AB} + 6\cdot\frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{5}{7}\cdot 12S_1$

$5S_1 + L_6 \cdot 7x = 6x + \frac{60}{7}S_1$

$Q_A \cdot BL = \frac{5}{12} \cdot B_6 \cdot AC = \frac{5}{12} \cdot B_6 \cdot 7x = \frac{35}{12} x B_6.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)