МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 5-023

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

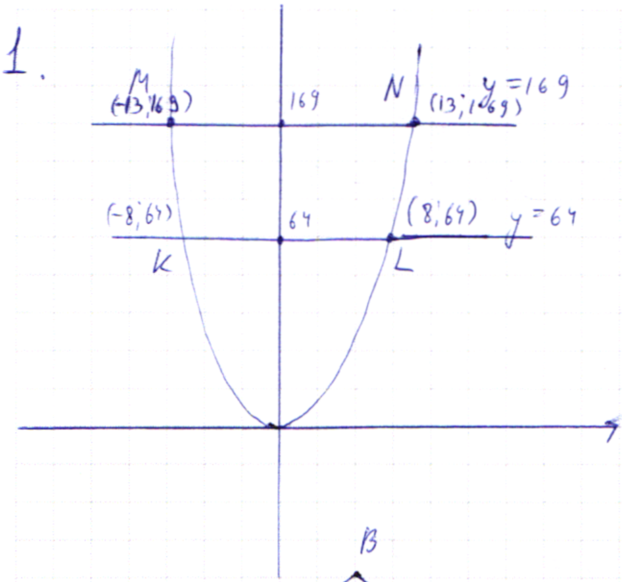
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

S-023
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.



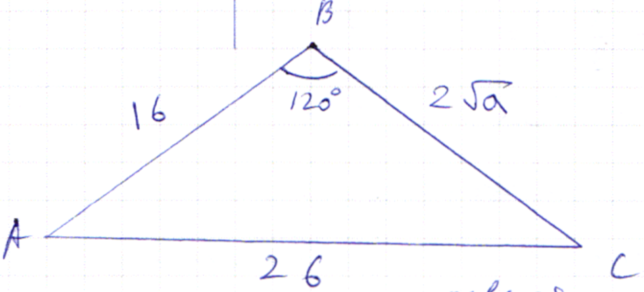
$MN = 13+13 = 26$

$KL = 16$, т.к. точки M, N, L, K лежат на параболе $y = x^2$.

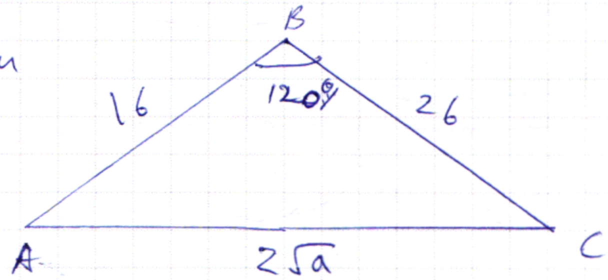
Возможны два варианта расположения прямой $y=a$:

$~~26~~\ 169 > a \quad \vee \quad 169 < a$,

т.е. два вида треугольника



или



В данном случае сторона равная 26 — лежит против тупого угла $\Rightarrow$ она большая, а значит

$26 > 2\sqrt{a}$

$13 > \sqrt{a}$

В данном случае аналогично

$2\sqrt{a} > 26$

$\sqrt{a} > 13$; $a > 169$

По Теореме косинусов

$26^2 = 16^2 + 4a - 2\cdot16\cdot2\sqrt{a}\cdot\cos120°$

$26^2 = 16^2 + 4a + 32\sqrt{a}$

$4\cdot13^2 = 4\cdot4^3 + 4a + 8\cdot4\sqrt{a}$

$13^2 = 4^3 + a + 8\sqrt{a}$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$D = 4\cdot4^2 + 4\cdot105 = 4(16+105) = 4\cdot121$

$\sqrt{D} = 22$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = \frac{-8+22}{2} = 7 \\ \sqrt{a} = \frac{-8-22}{2} < 0\end{array}\right.$ и $\sqrt{a} < 13$ получаем $\sqrt{a} = 7$, $a = 49$

$4a = 16^2 + 26^2 - 2\cdot16\cdot26\cos120°$

$4a = 16^2 + 26^2 + 16\cdot26$

$4\cdot a = 4\cdot4^3 + 4\cdot13^2 + 4\cdot4\cdot26$

$a = 4^3 + 13^2 + 4\cdot26$

$\begin{cases} a = 337 \\ a > 169 \end{cases}$ подходит

Ответ: при $a = 49$, $a = 337$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2. $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \left(\frac{1-\cos 14x}{2}\right) - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x - \cos 14x - 1 + \cos 14x}{2} -$$
$$- \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x - 1}{2} - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x + 1 - 2}{2} - \cos^2 x - 3 =$$
$$= \cos^2 2x - 1 - \cos^2 x - 3 = (\cos 2x)^2 - \cos^2 x - 4 =$$
$$= (2\cos^2 x - 1)^2 - \cos^2 x - 4 = 4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x - \cos^2 x - 4 =$$
$$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$$

$g(x) = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

$\cos x = t \qquad -1 \le t \le 1$

$g(t) = 4t^4 - 5t^2 - 3$

$g'(t) = 16t^3 - 10t = 16t\left(t^2 - \frac{5}{8}\right) = 16t\left(t - \sqrt{\frac{5}{8}}\right)\left(t + \sqrt{\frac{5}{8}}\right)$

$-\quad +\quad -\quad +$

$-1 \quad -\sqrt{\frac{5}{8}} \quad 0 \quad \sqrt{\frac{5}{8}} \quad 1$

как видим $t = -\sqrt{\frac{5}{8}}$ $t = \sqrt{\frac{5}{8}}$ это точки минимума

а $t = 0$ точка максимума

Сравним значения функции $g(t)$ в точках минимума и на концах отрезка области определения $(-1 \le t \le 1)$

$g(-1) = 4 - 5 - 3 = -4$

$g(1) = 4 - 5 - 3 = -4$

$g\left(-\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = 4 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} - 5 \cdot \frac{5}{8} - 3 = \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 3 = -\frac{25}{16} - 3 = -\frac{73}{16}$

$g\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\right) = -\frac{73}{16}$

как видим наименьшее значение функция принимает в точках $t = -\sqrt{\frac{5}{8}}$ и $t = \sqrt{\frac{5}{8}}$; $g\left(-\frac{\sqrt{5}}{8}\right) = g\left(\frac{\sqrt{5}}{8}\right) = -\frac{73}{16}$

~~то~~ сравним значения функции $g(t)$ в точке максимума и на концах отрезка области определения $(-1 \le t \le 1)$

$g(-1) = g(1) = -4$ как видим наибольшее значение функция принимает в точке максимума $t=0$ $g(0) = -3$ это и есть максимальное значение g; **Ответ:** $\min g(x) = -\frac{73}{16}$; $\max g(x) = -3$.

$g(0) = -3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. Если цифр 5 ровно 6 и они идут подряд, то они занимают подряд 5 мест в числе (разрядов), ~~а~~ на остальные 12 разрядов можно поставить либо „0" либо „9"; посчитаем сколько раз на эти 12 разрядов можно поставить всевозможными способами 2 цифры; ~~их~~ это 2^{12} раз; но нас не удовлетворяют условию две расстановки если все 12 разрядов либо „0" либо „9", т.е. минус 2 расстановки и получаем, что для одного положения в шести пятёрок $2^{12}-2$ расстановки других чисел; всего возможных расстановок шести пятёрок подряд в 18-ти значном числе равно 13, получаем что все возможных способов расставить шесть 5 подряд и остальные цифры ~~из~~ „0" и „9" (каждая повторяется хотя бы раз) равно $13\cdot(2^{12}-2) = 53248$

Ответ: 53248

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -3 \end{cases}$ $x \geq -3$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\begin{cases} 0<\sqrt{x+3}-x<1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \quad (1) \\ x \geq -3 \end{cases}$ (I) V $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \quad (2) \\ x \geq -3 \end{cases}$ (II)

$\varnothing$

(I) (1) $2x+5 \le \sqrt{x+3}$

$\begin{cases} 2x+5<0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \lor \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ (2x+5)^2 \le x+3 \end{cases}$

$\begin{cases} x<-\frac{5}{2} \\ x \geq -3 \end{cases}$

$-3 \le x < -\frac{5}{2}$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$4x^2+25+20x \le x+3$

$4x^2+19x+22 \le 0$

$D = 19^2-16\cdot 22 = 9$

$\sqrt{D} = 3$

$\begin{cases} \begin{cases} x = \frac{-19+3}{8} = -2 \\ x = \frac{-19-3}{8} = -\frac{11}{4} \end{cases} \\ x \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$

$-\frac{11}{4}$, $-\frac{5}{2}$, -2

$-\frac{5}{2} \le x \le -2$

Сборка

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<\sqrt{x+3}-x<1 \\ -3 \le x < -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (*) \ \varnothing \\ \begin{cases} 0<\sqrt{x+3}-x<1 \\ -\frac{5}{2} \le x \le -2 \end{cases} \quad (**) \ \varnothing \end{array} \right.$

(*) $-3 \le x < -\frac{5}{2}$

$0 \le x+3 < \frac{1}{2}$

$0 \le \sqrt{x+3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{5}{2} < -x \le +3$

$\frac{5}{2} < \sqrt{x+3} - x < \frac{\sqrt{2}}{2}+3$

противоречит с

$0<\sqrt{x+3}-x<1$

(**) $\frac{1}{2} \le x+3 \le 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{x+3} \le 1$

$2 \le -x \le \frac{5}{2}$

$2+\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sqrt{x+3} - x \le \frac{7}{2}$

противоречит

$0<\sqrt{x+3}-x<1$

(II) (2) $2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ (2x+5)^2 \geq x+3 \quad (3) \end{cases}$

(3) $4x^2+25+20x \geq x+3$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$x=-2$

$x=-\frac{11}{4}$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$-\frac{11}{4}$, $-\frac{5}{2}$, -2

$x \geq -2$

сборка (II)

$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x>1 \quad (4) \\ x \geq -2 \end{cases}$

(4) $\sqrt{x+3} > x+1$. при $x<-1$ очевидно верно т.е. $-2 \le x < -1$ подходит

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x+3 > x^2+2x+1 \quad (5) \end{cases}$

(5) $x^2+x-2<0$

$\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \end{array} \right.$

-2, 1

$-1 \le x < 1$

сборка

$\left[\begin{array}{l} -2 \le x < -1 \\ -1 \le x < 1 \end{array} \right.$

$-2 \le x < 1$

Ответ: $[-2;1)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-023

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. как мы видим среди чисел из каждого промежутка нет два таких, которые делятся на 35 с одинаковым остатком, поэтому Пиноккио не мог выбрать никакие два числа с одинаковым остатком на 35 (иначе их разность бы делилась на 35).

A 1 2 3 35
B 36 37 38 70
C 71 72 73 105
D 106 107 108 140
E 141 142 143 175

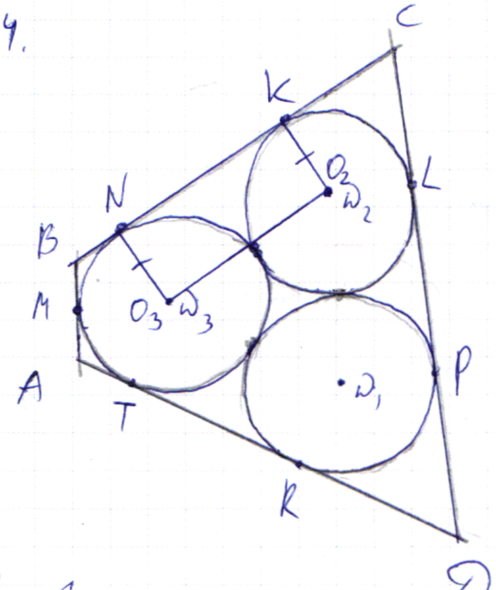
как мы видим числа в каждом столбце имеют одинаковый остаток при делении на 35, т.к. если Пиноккио выбирает одно число в каком-то столбце, больше он не может выбрать число из этого столбца.

Наименьшая сумма 25-ти чисел будет если брать наименьшие возможные числа из ~~столбца~~ строки с большим промежутком, поэтому берём из строки E первые 5 чисел, из D с 6 по 10, и т.д. из A с 21 по 25

получаем: $140\cdot(1+2+3+4+5)+110(1+2+3+4+5)+80(1+2+3+4+5)+50(1+2+3+4+5)+20(1+2+3+4+5)=$

$=15(140+110+80+50+20)=400\cdot15=6000$

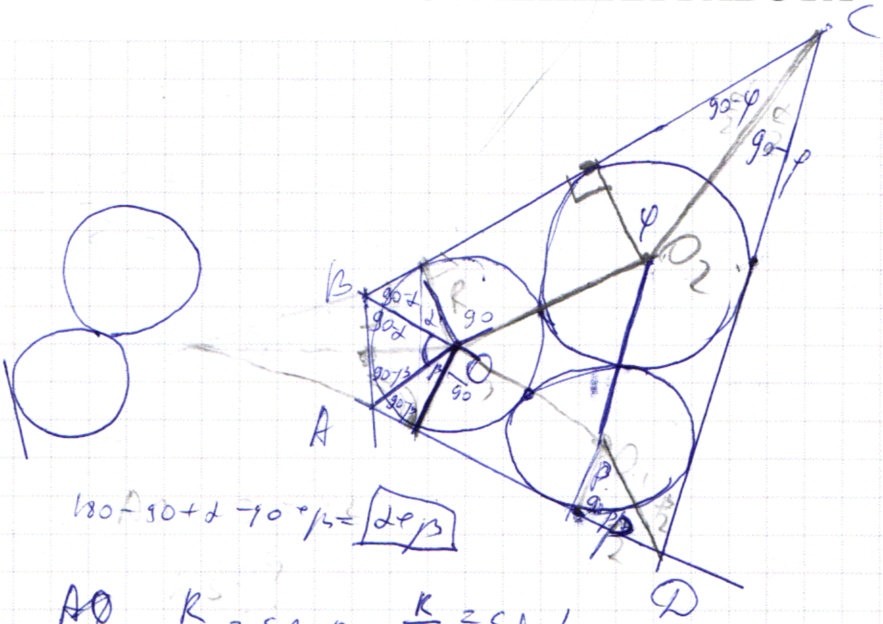
Ответ: 6000

4. 

а) $AD + BC - AB - CD = 10$
пусть точки M, N, K, L, P, R, T – точки касания окружностей и сторон четырёхугольника
тогда $AM = AT = a$; $MB = BN = b$
$KC = CL = c$; $RD = DP = d$;
пусть $NK = m$; $TR = k$; и $LP = l$
тогда наше выражение примет вид: $a + k + d + b + m + c - a - b - c - l - d = 10$

$k + m - l = 10$; проведём радиусы в точки N и K, эти радиусы перпендикулярны прямой BC, $NO_3 \parallel KO_2$
а т.к. окружности ω_2 и ω_3 равны то радиусы в точки N и K так же равны, ~~а т.к.~~ соответственно O_3NKO_2 – прямоугольник $NK = O_3O_2$; т.к. ω_3 и ω_2 касаются, то $O_3O_2 = 2R$ и O_3O_2 проходит через их точку касания (т.к. это прямая, соединяющая центры окружностей); $NK = m$, получаем $m = 2R$, аналогично $k = 2R$ и $l = 2R$ (окружности ω_1; ω_2, ω_3 равны); получаем $2R + 2R - 2R = 10$ $R = 5$
Ответ: 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$180-90+\alpha-90+\beta = \boxed{\alpha+\beta}$

$\underline{AO}$ $\quad \frac{R}{AO} = \sin\beta \quad \frac{R}{BO} = \sin\alpha$

$AO \cdot OB = \frac{R^2}{\sin\beta \cdot \sin\alpha}$

$\frac{AQ}{QL} = k$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{k}{k+1} \qquad \frac{BL}{BC} = \frac{k+1}{16}$

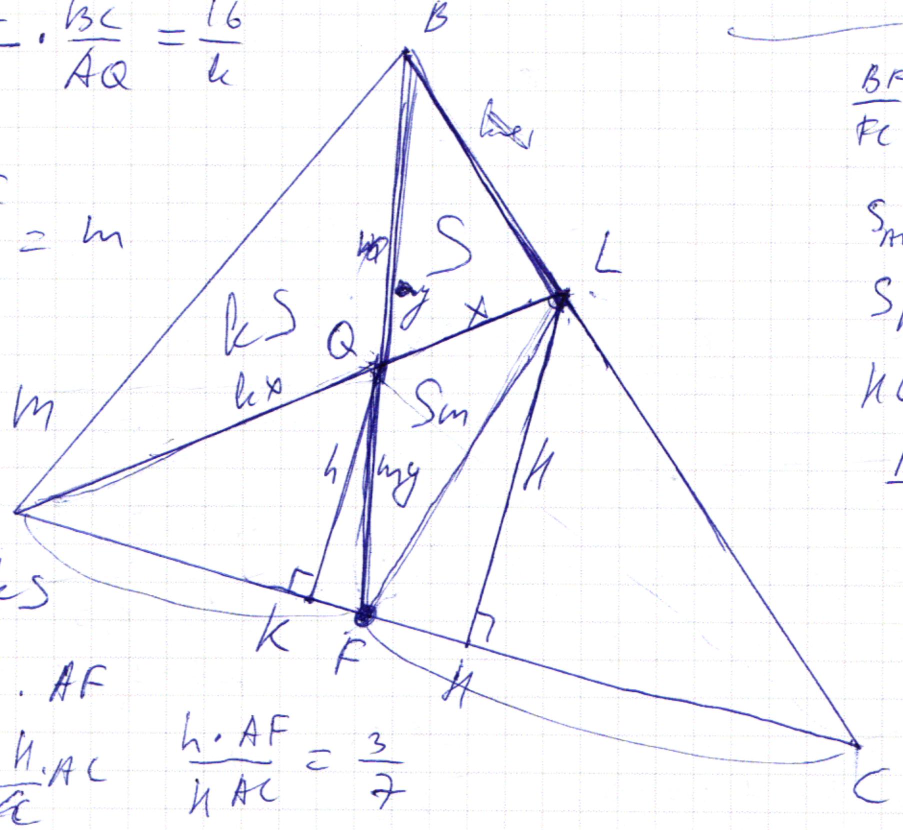
$\frac{BF}{FC} = \frac{3}{4} \qquad \frac{AL}{AQ} = \frac{k+1}{k}$

$\frac{AL}{BL} \cdot \frac{BC}{AQ} = \frac{16}{k}$

$\frac{QF}{QB} = m$

$\frac{S_{AQF}}{kS} = m$

$S_{AQF} = m\,kS$



$S_{ABC} = S \cdot 16$

$S_{BQL} = S$

$KL - 2 \qquad QK = 9$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{k}{k+1} = \frac{AK}{AC}$

$\frac{BL}{BC} = \frac{(k+1)\,8}{16\,8}$

$\frac{1}{2} h \cdot AF$

$\frac{\frac{1}{2} H \cdot AC}{\cancel{AC}}$ $\qquad \frac{h \cdot AF}{H\,AC} = \frac{3}{7}$

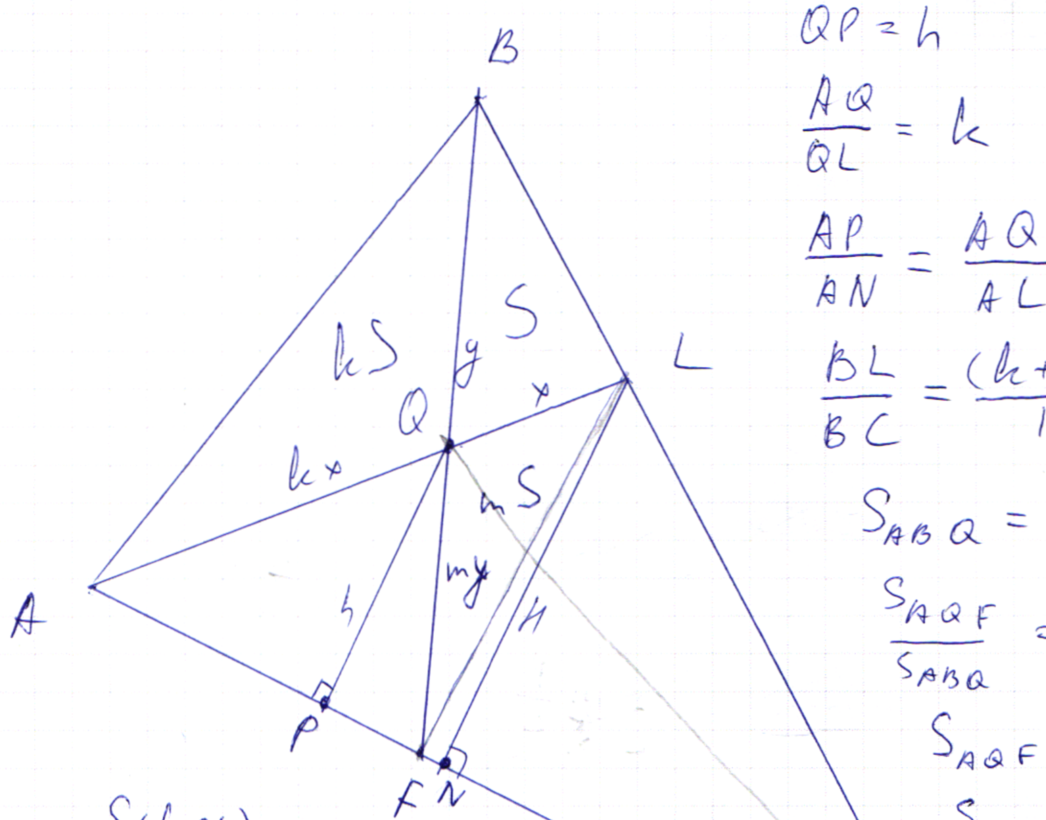
$\frac{S_{AQF}}{S_{FQL}} = k$

$S_{AQF} = \frac{1}{2} h \cdot 3X = $
$= mkS$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} H \cdot 7X$

$S_{FLC} = \frac{1}{2} H \cdot 4x$

6.



$LN = H \qquad S_{QBL} = S$

$QP = h \qquad S_{ABC} = 16S$

$\frac{AQ}{QL} = k \qquad h = 9$

$\frac{AP}{AN} = \frac{AQ}{AL} = \frac{h}{H} = \frac{k}{k+1}$

$\frac{BL}{BC} = \frac{(k+1)S}{16S} = \frac{k+1}{16}$

$S_{ABQ} = k \cdot S$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ABQ}} = m$

$S_{AQF} = m \cdot k \cdot S$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} H \cdot AC$

$AC = 7x$

$S_{ALC} = \frac{1}{2} H x \cdot 7$

$S_{ABL} = S(k+1)$

$\frac{BL}{LC} = \frac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \frac{S(k+1)}{\frac{1}{2} H x \cdot 7} = \cancel{\frac{k+1}{16}}$

$\underline{S_{AQF}} = \frac{m}{\cancel{k}} Sk \qquad \underline{S_{AQB}} = \cancel{m}kS$

$S_{QFC} = \frac{4}{3} \frac{m}{\cancel{k}} Sk$

$\underline{S_{QLC}} = \cancel{(k+1)} (15-k) S$

$\frac{BL}{LC} = \frac{k+1}{15-k}$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{mSk}{mSk + \frac{4}{3} mSk + (15-k)S} = \frac{9}{H}$

$\frac{mk}{mk + \frac{7}{3} mk + (15-k)} = \frac{k}{k+1}$

$\cancel{mk} + m = \cancel{mk} + \frac{4}{3} mk + 15 - k$

$m + \cancel{k} + \frac{4}{3} mk = 15$

$\cancel{m(1+k)}$

$\frac{mSk + \frac{4}{3} mSk}{15kS} = k$

$mk + \frac{4}{3} mk = 15k^2$

$kS = mkS + \frac{4}{3} mkS \qquad \frac{mkS}{kS}$

$k = \frac{7}{3}$

$\frac{BL}{BC} = \frac{\frac{7}{3}+1}{16} = \frac{10}{3 \cdot 16} = \frac{10}{48} \quad \frac{5}{24}$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{7}{3}+1} = \frac{7}{10}$ Ответ: $\frac{7}{10}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-023

ШИФР

(заполняется секретарём)

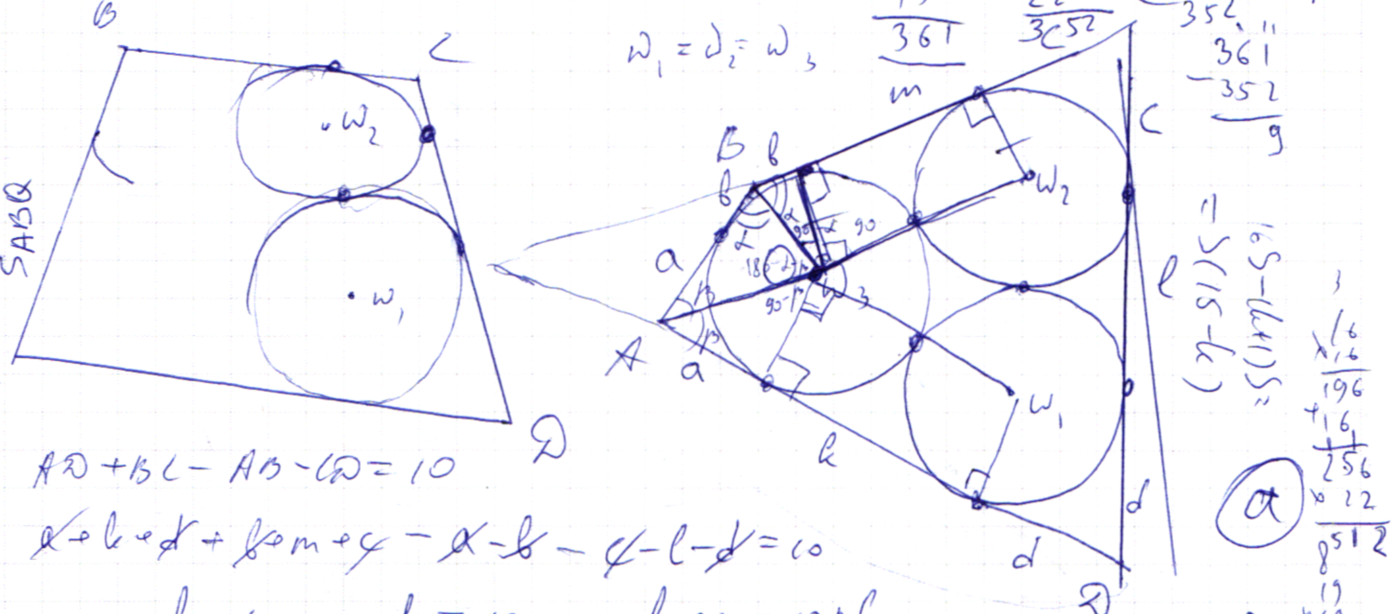
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^6=64$ $\quad 2^5=32$ $\quad 2^8=4\cdot4\cdot4\cdot4$ $\quad 64$

3) $0, 5, 9$

$13\cdot 2(2^4-1)$

$2^{12}-1-1=(2^{12}-2)\cdot 13$



$\frac{S_{AQF}}{S_{ABQ}}=m$

$\frac{\frac12 H\cdot 7x}{S(k+1)}=\frac{k+1}{16}$

$4x\cdot\frac12 H+mkS+mS=$

$AD+BC-AB-CD=10$

$\cancel{a}+b+\cancel{c}+\cancel{d}+\cancel{b}+m+\cancel{c}-\cancel{a}-\cancel{b}-\cancel{c}-l-\cancel{d}=10$

$k+m-l=10 \qquad k+m=10+l$

$m=2R \quad k=2R \quad l=2R \qquad 4R=10+2R$

$2R=10 \qquad R=5$

a)

б)?

$180-\alpha-\beta-?$

в)?

$19\cdot19=361$, $\quad 22\cdot16=352$, $\quad 361-352=9$, $\quad 16\cdot16=256$, $\quad 16\cdot22=352$

$-\frac{16}{8}$ $\quad -\frac{22}{8}=-\frac{11}{4}$

$5(S-1)=(x-S)$

5. $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1 \qquad \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq \log_{\sqrt{x+3}-x}\sqrt{x+3}-x$

$\cancel{x\geq -3}$ $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq 1\end{cases}$ $\quad \sqrt{x+3}>x \quad x\geq-3 \quad x\leq 0$ $\quad x+3>x^2$

$-\frac{11}{4}<-\frac{5}{2}$ $\quad -\frac{11}{4}<-\frac{10}{4}$

$\begin{cases}0\leq\sqrt{x+3}-x<1\\ x+5\leq\sqrt{x+3}-x\end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>1\\ x+5\geq\sqrt{x+3}-x\end{cases}$

$4x^2+25+20x\leq x+3$

$4x^2+19x+22\leq 0$

$D=19^2-16\cdot22=$

$=\cancel{361}<0$

$2x+5\leq\sqrt{x+3}$ $\quad \emptyset$ $\quad 2x+5\geq 0 \quad x\geq-\frac52 \quad x\geq-3 \quad x\geq-\frac{5}{2}$

$\begin{cases}2x+5<0\\ x\geq-3\end{cases}$ $\quad \begin{cases}x\leq-\frac52\\ x\geq-3\end{cases}$ $\quad -3\leq x\leq-\frac52$

$\frac52\leq -x\leq 3$ $\quad \frac52>1$

$-3 \quad -\frac52$

$x+3$ $\quad 0\leq x+3\leq\frac12$ $\quad 0\leq\sqrt{x+3}\leq\frac{\sqrt2}{2}$ $\quad +\quad \frac52\leq\sqrt{x+3}-x\leq\frac{5\sqrt2+6}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

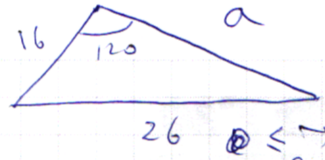
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \end{cases}$$

$0 \leq x+3 < \frac{1}{2}$



$\frac{5}{2} < -x \leq 3$

$0 \leq -x$

$\frac{\sqrt{1}}{2} < \sqrt{x+3} < 1$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$2x+5 \geq 0$

$x \geq -\frac{5}{2}$

$4x^2 + 25 + 20x \geq x+3$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$D = 19^2 - 1 \cdot 4 \cdot 22 < 0$

$4x^2 + 19x + 22 > 0$ всегда

$x \geq -\frac{5}{2}$

$\frac{1}{2} \leq x+3 \leq 1$

$-\sqrt{x+3} - x$

$\frac{\sqrt{1}}{2} \leq \sqrt{x+3} \leq 1$

$2 \leq -x \leq \frac{5}{2}$

$2 + \leq \sqrt{x+3} - x$

$\sqrt{x+3} > 1+x$

$1+x<0$

$x<-1$

$-\frac{5}{2} \leq x < -1$ V

$1+x>0$

$x>-1$

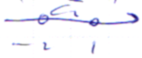
$x+3 > 1 + x^2 + 2x$

$x^2 + x - 2 < 0$

~~D=1+8~~

$x=1$

$x=-2$



$-2 < x < 1$

$x > -1$

$-1 < x < 1$

$-\frac{5}{2} \leq x < -1$

?

$6 \cdot 49 \cdot 7 = 343$

$26 \times 7 = 182$

~~82-1=81~~

$5|12 \times 7 = 35|84$

$12 - 5 = 7$

$49 - 43 = 40$

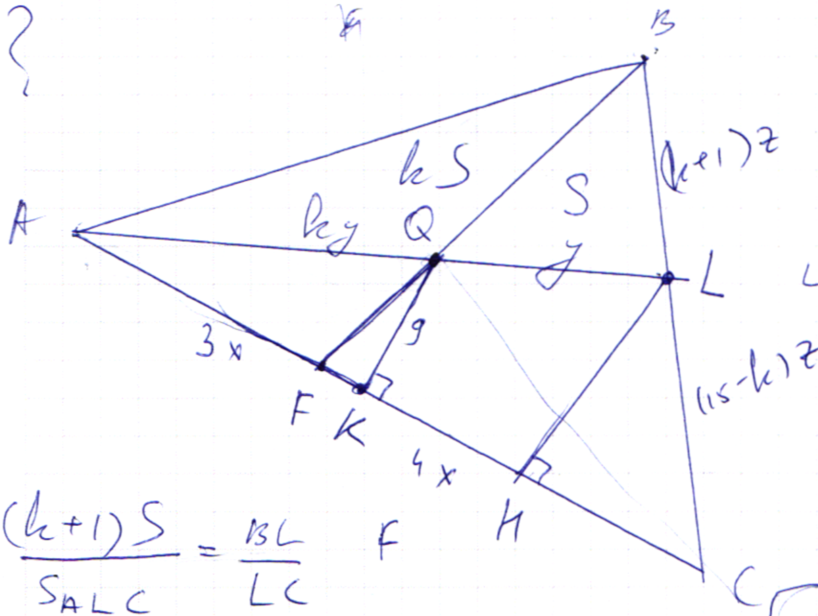
$584 - 3 = 581$, $581 : 7 = 83$, 56, 21

2324×7; $1354 \times 7 = 9478$

$78 - 91$; $94 - 78 = 26$; $478 - 9$

$\log_{\sqrt{2}} 2-1$

6. ?



$S_{ABC} = 16S$

$S_{BQL} = S$

$LH - ?$

$QK = 9$

$\frac{AK}{KC} = \frac{AQ}{QL} = \frac{1}{k} = k$

~~$\frac{AK}{AC} = \frac{QK}{HL}$~~

~~$\frac{AK}{AC} = \frac{AQ}{AL}$~~

$\frac{S_{AQB}}{S_{QBL}} = \frac{AQ}{QL} = k$

S

$\frac{(k+1)S}{S_{ALC}} = \frac{BL}{LC}$ F

$S_{ALC} = 16S - (k+1)S = S(15-k)$

$\frac{BL}{LC} = \frac{k+1}{15-k}$

1 2 .... 35 70 105

36 70 140

1 ... 35

$1+2+3+4+5$

~~35(1+2+3+4+5)~~

~~70(1+2+3+4+5)~~

7. [1; 35] [36; 70] [71; 105] [106; 140] [141; 175]

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$ $b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5$ $c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5$ $d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5$ $f_1\ f_2\ f_3\ f_4\ f_5$

$x+3 \geq 1$ $-x \leq 2$

$n_i - m_j \not\vdots 5$

иначе два числа не оканчиваются на одну и ту же цифру

$35 = 6 \cdot 7$ 30

1, 2, 3, 4 .... 35 35 30

36, ... 70 25

71, ... 105

106 140

141, ... 175

$S \cdot 15$ 70

$N \cdot 40$ 105

$K \cdot 15$ 140

$F \cdot 40$ $140 \cdot 15$ $105 \cdot 15$

$L \cdot 15$

$105(6+7+8+9+10)$ 65

$70(11+12+13+14+15)$

$140(1+2+3+4+5)$ 15

$30(16+17+18+19+20)$ 90

$(21+22+23+24+25)$

600 $30 \cdot 20(\cdot 15)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

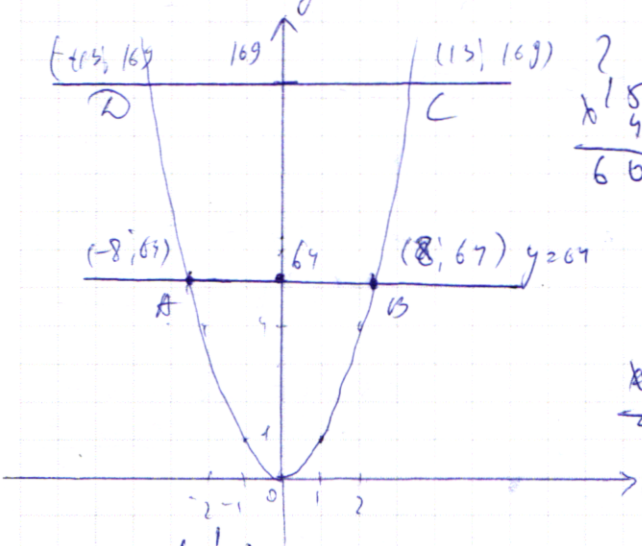
S-023

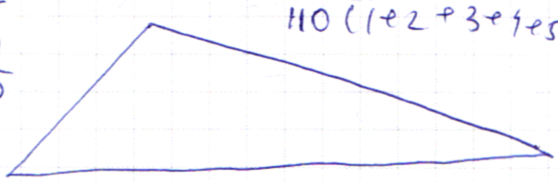
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81

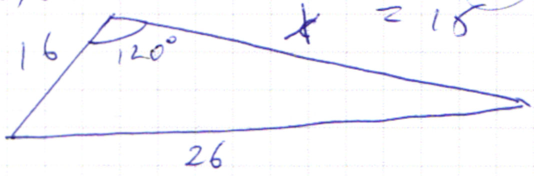




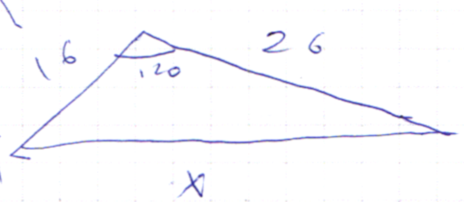
AB = 16

106 107 108 109 110

DC = 26



x < 26



x > 26

$\cos 120 = \cos(180-60) = -\cos 60 = \frac{1}{2}$

$x^2 = 16^2 + 26^2 - 2\cdot 16\cdot 26\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 16^2 + 26^2 - 16\cdot 26 = 16^2 + 26(26-16) =$

$= 16^2 + 260 = 256 + 260 = 516 = 4\cdot 129$

$x = 2\sqrt{129}$ $\qquad 2\sqrt{129} \vee 26$

$x < 26$ не верно $\quad 516 \vee 676$

$26^2 = 16^2 + x^2 - 2\cdot 16\cdot x\left(-\frac{1}{2}\right) = 16^2 + x^2 - 16x$

$x^2 - 16x + 16^2 - 26^2 = 0 \qquad x^2 - 16x + (16-26)(16+26) = x^2 - 16x - 10\cdot 42 = 0$

$D = 4^2\cdot 4^2 + 4\cdot 42\cdot 10 = 4^2\cdot 4^2 + 4\cdot 2\cdot 2\cdot 21\cdot 5 =$

$= 4^2(16 + 105) = 4^2\cdot 121 = 4^2\cdot 11^2$

$\sqrt{D} = 44$

$x = \frac{16+44}{2} = 30$

$x = \frac{16-44}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\sin}\ \cos 2x = \cancel{1-}\ 2\cos^2 x - 1$ $\quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{}$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$ $\quad \sin^2 x = \frac{-\cos 2x + 1}{2}$

$= \cancel{\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3\sin^2 x - 3\cos^2 x}$

$g'(x) = \cancel{\cos 5x (5x)'}$

$g'(x) = (\cos 5x)' \sin 9x + (\cos 5x)(\sin 9x)' - \cancel{2}(\sin^2 7x)' -$

$-(\cos^2 x)' = -\sin 5x \cdot 5 \cdot \sin 9x + \cos 5x \cos 9x \cdot 9 -$

$-2\cos 7x \cdot 7 - 2(-\sin x) = -5\sin 5x \sin 9x +$

$+ 9\cos 9x \cos 5x - 14\cos 7x + 2\sin x$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ $\quad \cos 2x = 1 - \sin^2 x$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$ $\quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta$ $\quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\quad \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$2\sin\alpha\sin\beta = \cancel{\cos\alpha\cos\beta}\ \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$2\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$

~~sin 2 5~~

2. V $\quad \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \frac{(1-\cos 14x)}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{\cos 4x - \cos 14x - 1 + \cos 14x}{2} = \frac{\cos 4x - 1}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{\cos 4x + 1 - 2}{2} - \cos^2 x - 3 = \cos^2 2x - 4 - \cos^2 x =$

$= \cancel{\cos}\ \cancel{2\cos^2}\ (\cos 2x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2 - 4 - \cos^2 x =$

$= 4\cos^4 x + 1 - 4\cos^2 x - 4 - \cos^2 x =$

$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3 = g(x)$ $\quad f'(x) = 16\sin^3 x - 10\sin x =$

$= \cancel{\cos x}($

$g(x) = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$ $\quad 2\sin x\,(8\sin^2 x - 5) =$

$= 2\sin x\, 8(\sin x - \sqrt{\tfrac{5}{8}})(\sin x + \sqrt{\tfrac{5}{8}})$

$\cos^2 x = t$ $\quad g(x) = 4t^2 - 5t - 3$

$0 \le t \le 1$ $\quad g'(x) = 8t - 5 = 8(t - \frac{5}{8})$

$g_{min} = 4\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 - 5\cdot\frac{5}{8} - 3 =$ $\quad t = \frac{5}{8}$ – min

$= \frac{4\cdot 25}{64} - \frac{25}{8} - 3 =$ $\quad \cos x = t$, $\quad -1 \le t \le 1$, $\quad -\sqrt{\tfrac{5}{8}}\ \ 0\ \ \sqrt{\tfrac{5}{8}}$

$= \frac{25}{16} - \frac{25}{8} - 3 = -\frac{25}{16} - 3 = \frac{-25 - 3\cdot 16}{16}$

$g\ \ 4t^4 - 5t^2 - 3$

$g'(t) = 16t^3 - 10t =$

$= 16t(t^2 - \frac{5}{8}) = t(t - \sqrt{\tfrac{5}{8}})(t + \sqrt{\tfrac{5}{8}})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)