МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 12-009

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 009

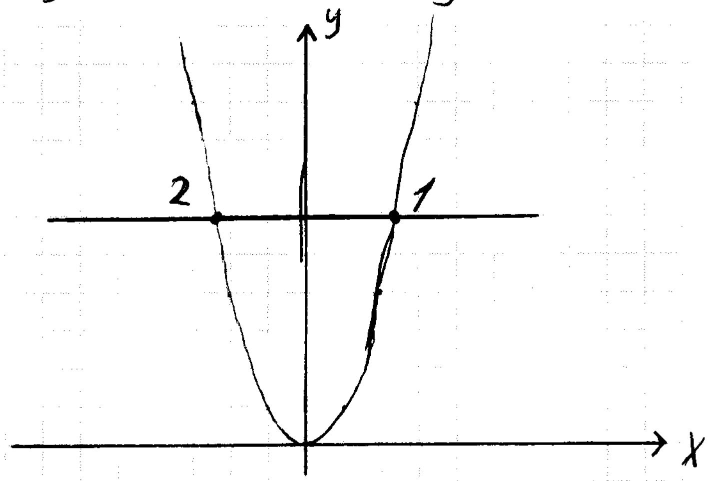
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$y = 2x^2$ $y = 98$ $y = 18$ $y = a$



$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 98 \end{cases}$

$98 = 2x^2$

$x^2 = 49$

$x_1 = 7$ $x_2 = -7$

Пусть c - длина отрезка, высекаемого на прямой $y = 98$ пересечениями с параболой $y = 2x^2$.

$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(7 - (-7))^2 + (98 - 98)^2} =$

$= 14$

$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 18 \end{cases}$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x_1 = 3$ $x_2 = -3$

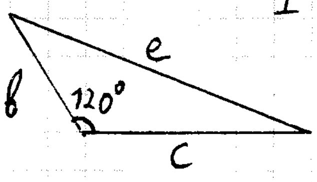
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Пусть b – длина отрезка, высекаемого на прямой $y = 18$ пересечениями с параболой $y=2x^2$

$$b = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(3-(-3))^2+(18-18)^2} = 6$$

Пусть e – длина отрезка, высекаемого на прямой $y = a$ пересечениями с параболой $y=2x^2$

I случай



По теореме косинусов:

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos 120^\circ$$

$$e^2 = 6^2 + 14^2 - 2\cdot 6\cdot 14\cdot \frac{1}{2} = 36 + 196 - 84 = 148$$

$$e^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$$

$$148 = (x_1-x_2)^2 + (a-a)^2$$

Функции $y = 2x^2$ и $y = a$ – четные $\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = y(-x)$, $\quad x_1 = -x_2$

$\cancel{e^2 =}\quad 148 = (x_1+x_1)^2$

$\cancel{2x_1 = \pm\sqrt{148}}$

$(2x_1)^2 = 148$

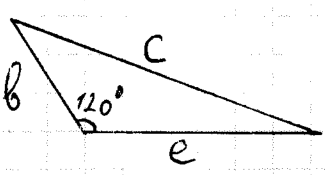
$4x_1^2 = 148$

$2x_1^2 = 74 \qquad y = 2x^2 \qquad 2x_2^2 = 2(-x_1)^2 = 2x_1^2$

$y = 74 \qquad y = a$

$a = 74$

II случай



$$c^2 = b^2 + \cancel{e^2} + e^2 + 2be\cdot\cos 120^\circ$$

$$14^2 = 6^2 + e^2 + 2\cdot 6\cdot e\cdot \frac{1}{2}$$

$$e^2 + 6e - 160 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По теореме Виета:

$l_1 = 10$ $\qquad$ $l_2 = -16$

не удовлетворяет условию

$10^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

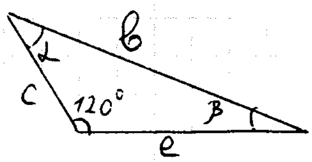
$100 = (2x_1)^2$

$50 = 2x_1^2$

$y = 50$

$a = 50$

III случай



по свойству о сумме углов треугольника:

$\alpha + \beta + 120^\circ = 180^\circ$

$\alpha + \beta = 60^\circ$

$\beta \leq 60^\circ$

$\beta < 120^\circ \Rightarrow c < b$, $14 < 6$ неверно

Данный вариант невозможен.

Ответ: 74; 50.

№3

1 случай:

первые 7 цифр числа — восемь 8888888....

тогда оставшиеся $17 - 7 = 10$ цифр могут принимать 2 значения („7" и „0"), но так как в искомом числе каждая цифра должна встречаться

хоть раз, то нас не удовлетворяет 2 варианта данного числа: 88888887777777777 и ...0000000000.
Количество искомых чисел в данном случае:
$2^{10} - 2$

2 случай: другие 10 вариантов постановки семи подряд идущих цифр „8"
0 не может быть первой цифрой числа ⇒ первая цифра – „7". Оставшиеся 9 цифр могут принимать 2 значения („7" и „0"). Не удовлетворяет 1 вариант, при котором отсутствует цифра „0".
Кол-во искомых чисел в этом случае:
$10 \cdot (2^9 - 1)$
Всего искомых чисел: $2^{10} - 2 + 10 \cdot (2^9 - 1) =$
$= 2^{10} - 2 + 5(2^{10} - 2) = 6 \cdot (2^{10} - 2) = 6 \cdot 1022 =$
$= 6\,132$.
Ответ: 6 132

№ 7

Разность любых двух чисел не делится на 45 ⇒ все числа имеют разный остаток при делении на 45.
Каждое число первой группы [1; 45] представляет собой сумму из 0 и остатка от деления его на 45, соответственно, группы [46; 90] 45 и остатка, группы [91; 135]: 90 и остатка, [136; 180] 135 и ост., [181; 225] 180 и остатка ⇒ наименьшее значение, которое сумма тридцати чисел принимает:
$(1+2+3+...+29+30) + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 45 + 6 \cdot 90 + 6 \cdot 135 + 6 \cdot 180 =$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 480 + 6 \cdot (450) = 3\,180$

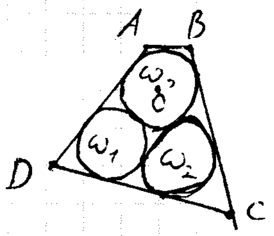
Ответ: $3\,180$.

№ 2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = +3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x \mp 2\cos x - 10 \cdot$
$\cos 5x \cdot \sin 5x$

№ 4



№ 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $x + 7 \geq 0$

$x \geq -7$

I случай:

$\sqrt{x+7} - x > 1$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-009

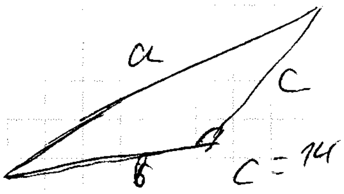
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$ $y=98$ $y=18$ $y=a$ $c=4=$

$c=$



$98=2x^2$

$49=x^2$ $x=\pm 7$ $|x_1 x_2|=14$

$c=14$

$b=6$

$9+25-15\cdot 0,6$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120°$

$2x^2=18$ $x^2=9$ $x=\pm 3$ $|x_1x_2|=6$

№7 12 3456 | 52 53 54 55 56 57 | 105 104 ... 108 |

$1+2+3+...+30+600+6\cdot 45+6\cdot 90+6\cdot 135+6\cdot 180=6\cdot(45+90+135+180)=$

$1+29+2+28+3+27+ \ 15+15...=16\cdot 30=$ $=480+6\cdot(450)=480+2700=$

$=3180$

№3 7 8

1 2 3 4 5 6 . . . 17

1) 8 8 8 8 8 8 8 ... 7

2) 7 8 8 8 8 8 8 8

3) 7 • 8 8 8 8 8 8 8 1 1) $2^{10}-2$

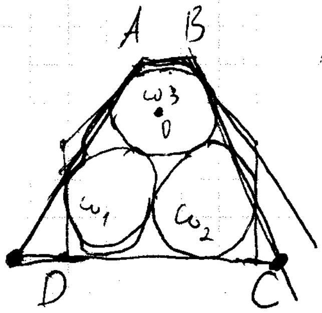
4)

2) 2^9-1

3) 2^9-1

4) ...

11) ...



$AD+BC-AB-CD=12$

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

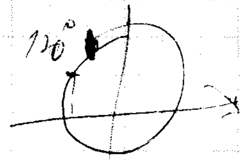
$g'(x)=-3\cos 3x+7\cos 7x+2\cos x+2\cdot\cos 5x\cdot 5\sin 5x-$

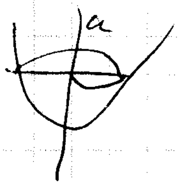
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cos 120° = \frac{1}{2}$

$x+4 = \sqrt{x+7} - x$



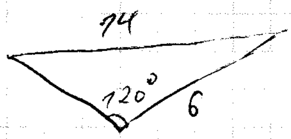


~~$4 = \sqrt{x+7}$~~ $2x+4 = \sqrt{x+7}$

~~$x+7 = 16$ $x =$~~

$a = \sqrt{6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \frac{1\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{36 + 196 - 84\sqrt{2}} =$

$= \sqrt{232 - 84\sqrt{2}} = \sqrt{148}$



~~$y = a^2$~~ $x = \frac{a}{2}$ $= 74$

$y = 2\frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2} = \underline{116 - 42\sqrt{2}}$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos 120°$

$a^2 - 2ba \cdot \cos 120° = c^2 - b^2$

$a^2 - 6a - 14^2 + 6^2 = 0$

$a^2 - 6a - 160 = 0$

По т. Виета: $a_1 \cdot a_2 = -160$

$a_1 = -10$ $a_2 = 16$ $a_1 + a_2 = 6$

не удовл. усл.

$a = 16$

$x = \frac{a}{2} = 8$

$y = 2x^2 = 2 \cdot 8^2 = \underline{128}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12 - 009

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)