

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-030

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

}

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ Если разность квадратов двух соседних чисел не делится на 95 ~~тогда~~ (так же не делится на: 5 и 19), то это означает, что данные числа являются четными. Следовательно, наименьшее значение суммы 25 соседних чисел будет достигаться при выборе наименьших четных чисел в каждом из 5 промежутков.

Тогда,

№ промежутка	значение
1	2, 4, 6, 8, 10
2	36, 38, 40, 42, 44
3	72, 74, 76, 78, 80
4	106, 108, 110, 112, 114
5	142, 144, 146, 148, 150

Эта сумма будет равна 1990

Ответ) 1990.

③ 555,555 -----

Мы можем разместить в одну строку подряд пятимера 13-ю вариантами \Rightarrow кол-во способов размещения пятимера равно $6 \cdot 13 = 78$.

В оставшиеся 12 клеток можно разместить 0, 1 или 2. Значит, существует $2^{12} = 4096$ различных цифр.

Таким образом, существует 4174 различных 18-значных чисел, содержащих 6 подряд идущих пятимеров.

⑤ $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3}-x$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3}-x \geq 0$$

$$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}-x) > 0$$

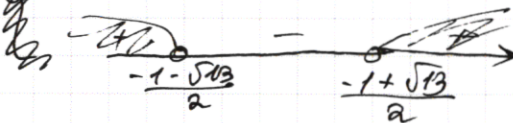
1) $\sqrt{x+3}-x-1=0$

$$-x^2+x+2=0$$

$x = \begin{cases} -4 \\ 5 \end{cases}$ - не подходит

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 & (1) \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases}$$

1) $\sqrt{x+3}-x > 0$



2) $x \neq -4, x \neq 5$

3) $x > -5$

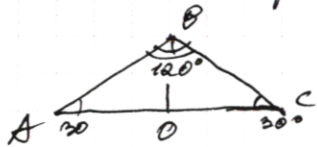
$$2) x + 5 - \sqrt{x+3} - x = 0.$$

$$x^2 + 25 - x + 3 - x^2 = 0$$

$$x = 28$$

Ответ: $x \in [28; +\infty)$

① Рассмотрим случай, когда треугольник с $\angle = 120^\circ$, равнобедренный.



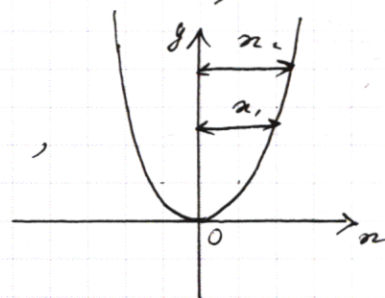
Три $y_1 = 64, x_1 = 8; y_2 = 169, x_2 = 13,$

таким образом, искомые отрезки равны $AE = 2a;$

~~BE = 16.~~

Тогда параметр a будет равен 2 ,
т.к. $BE = \frac{1}{2} BE$.

Ответ) 2

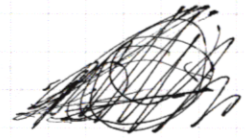


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по 5 цифрам чисел из 1, 35, ...
разложить 2-е. на: 35.

Найти знак.
суммы 25 чисел?

$$\frac{1}{2} \cdot 4; \frac{1}{2} \cdot 5.$$



уда числа четные.

И/И два числ. четных из каждого промежутка.

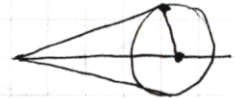
- Из 1: 2, 4, 6, 8, 10 ← 20
2: 36, 38, 40, 42, 44 = 200
3: 42, 44, 46, 48, 50 = 220
4: 106, 108, 110, 112, 114 = 550
5: 142, 144, 146, 148, 150 = 730

$$150 + 150 + 20$$

$$220 + 220 + 110$$

$$\begin{array}{r} 220 + 220 + 150 \\ + 50 \\ + 150 \\ \hline 730 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1050 \\ - 320 \\ \hline 1490 \\ + 500 \\ \hline 1990 \end{array}$$

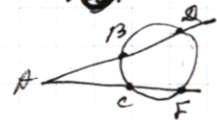


~~(20-1) = 20~~ $\frac{1}{2}$ параллельная

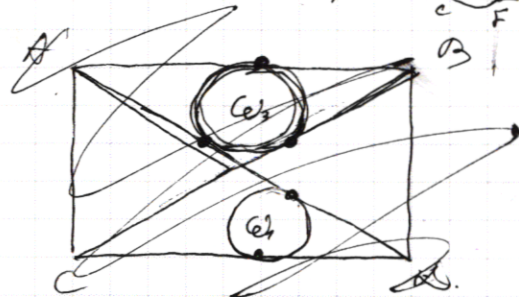
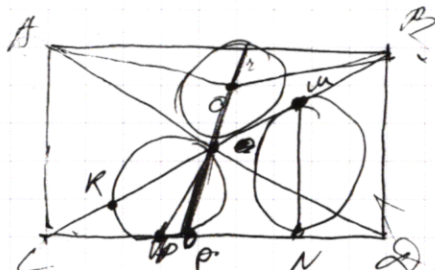
знаки

$$CD^2 = CR \cdot R$$

касательные из 1 точки =



$$AC \cdot AF = AB \cdot AD$$



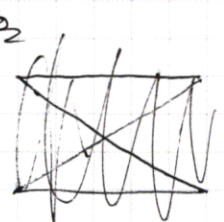
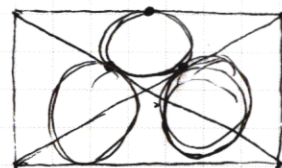
$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$$AD = CD \quad PO = PD$$

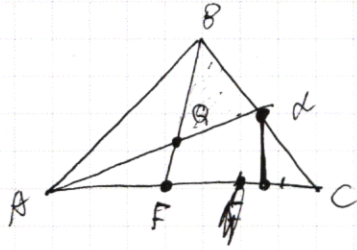
$$CM = CN$$

$$OP - \text{ср. линия} = \frac{1}{2} PD$$

$$AD + BC - (AB + CD) = 10 \quad (AD + BC) - (AB + CD) = 10$$



6



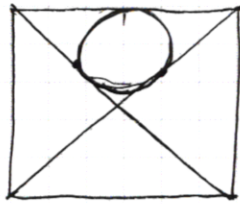
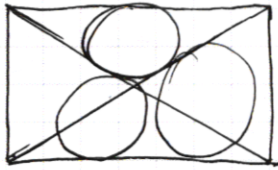
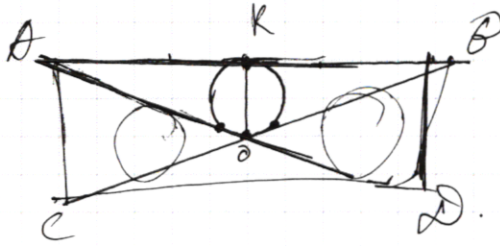
$$S_{\triangle BPQ} : S_{\triangle BAC} = 1:16$$

$$QF = 2$$

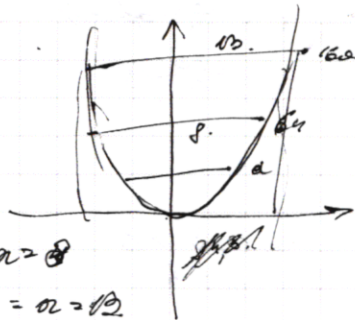
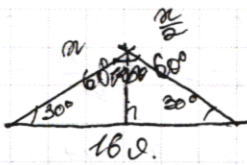
$$AF : FC = 3 : 4$$

расстояние от т. D.

$$DK = AD$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

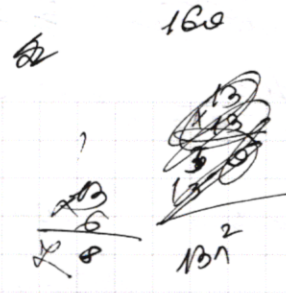


$y = 64$ $a = 8$
 $y = 160 = a = 16$

$2^6 = 64$
 $\times 64$

$+ 256$
 $\hline 384$
 4096
 $\hline 13$

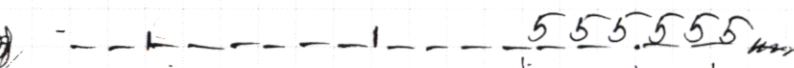
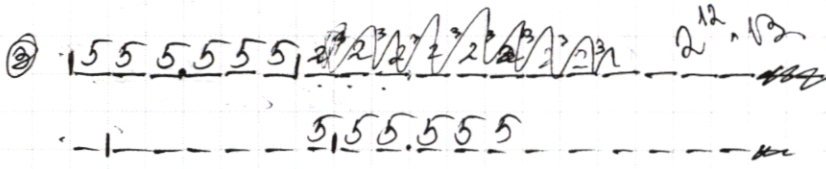
$\times 2288$
 4096
 $\hline 248$



2) $g(a) = (\sin 5a \cdot \sin 9a - \sin^2 4a - \cos^2 a - 3) =$
 $= 5 \cos 5a \cdot 9 \cos 9a - 2 \cos^2 a + 2 \sin^2 a$

$(AD + DC)^2 - (AD + CD)^2 = 100$
 $AD \cdot AD + 2AD \cdot DC + DC^2 -$

$6 \cdot 1 \cdot 12 = 72$ будет
показано, где нужно



$\times 4096$
 $\hline 13$
 $+ 12288$
 $\hline 4096$
 $\hline 53248$

$\times 26$
 $\hline 26$
 $+ 156$
 $\hline 52$
 $646 -$
 $\hline 256$
 $\hline 420$
 $- 120$

$\times 16$
 $\hline 16$
 $+ 98$
 $\hline 256$

$816 -$
 $\hline 320$
 $\hline 596$

$C_n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
 $C_{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

$= 220$
 $\times 14?$

$\times 13$
 $\hline 13$
 $+ 64$
 $\hline 832$

$3! \cdot 14! = 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 6$
 $3 \cdot 2$

вариантов размещения
3 числа по
18 разрядов
 48
 $\hline 138$
 $\hline 338$
 $+ 48$
 $\hline 1846$

$$5) \log_{\sqrt{a+3}-a} (a+5) \geq 1$$

~~$$\sqrt{a+3}-a \geq a+5$$~~

$$\log_{\sqrt{a+3}-a} (a+5) \geq \log_{\sqrt{a+3}-a} \sqrt{a+3}-a$$

$$\log_{\sqrt{a+3}-a} (a+5) - \log_{\sqrt{a+3}-a} \sqrt{a+3}-a \geq 0$$

~~$$\log_{\sqrt{a+3}-a} \frac{a+5}{\sqrt{a+3}-a} \geq 0$$~~

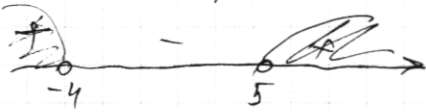
$$(a-1)(b-c)$$

$$(\sqrt{a+3}-a-1)(a+5-\sqrt{a+3}-a) \geq 0$$

$$1) \sqrt{a+3}-a-1 \geq 0$$

~~$$a_1, a_2 = \dots$$~~

$$a_1 = -4, a_2 = 5$$



$$2) a+5-\sqrt{a+3}-a \geq 0$$

$$-a+3+5 \geq 0$$

$$8 \geq a$$

$$a+5-\sqrt{a+3}-a \geq 0$$

$$a^2+25-\sqrt{a+3}-a^2$$

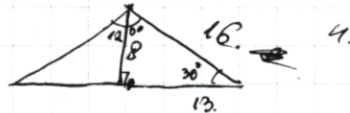
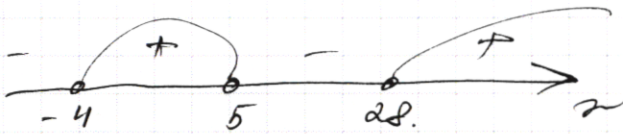
$$28 = a$$

$$-a^2+a+3 \geq 0$$

$$D = \sqrt{13}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$a_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$



26

~~Handwritten scribbles~~

$$\frac{14/4}{-12/3,05}$$

~~Handwritten scribbles~~

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

25.

$$\frac{1+\sqrt{13}}{4}$$

0231

$$\sqrt{a+3}-a > 0; \sqrt{a+3}-a \neq 1$$

$$a+3-a^2 > 0$$

$$a^2-a-3 < 0$$

$$D = 1+12 = \sqrt{13}$$

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}, a_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$a+3-a^2-1 \neq 0$$

$$a^2-a-2 \neq 0$$

$$a_1 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$a_2 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$a+5 > 0; a > -5$$

$$a \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-030

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-030
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)