

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

15-056

Заполняется ответственным секретарем

- ✓ 1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
- ✓ 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
- ✓ 3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
- б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
- в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
- ✓ 5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
- ✓ 7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\boxed{5} \quad \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\text{ОДЗ} \quad \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+7 > x^2 \\ x+7 \neq 1+2x+x^2 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2+x+7 > 0 \\ x^2+x-6 \neq 0 \\ x > -4 \end{cases}$$

1. $-x^2+x+7 > 0$

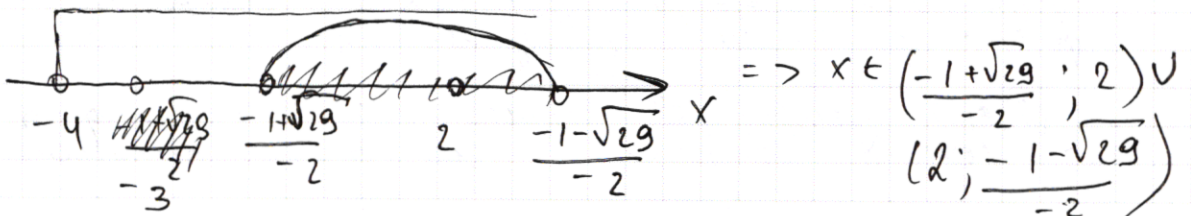
$$D = 1+28=29$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{29}}{-2} \\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{29}}{-2} \end{cases}$$

2. $x^2+x-6 \neq 0$

$$D = 5^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$



$$2 \quad \log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x) \Leftrightarrow$$

~~$$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$$~~

$$\Leftrightarrow x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

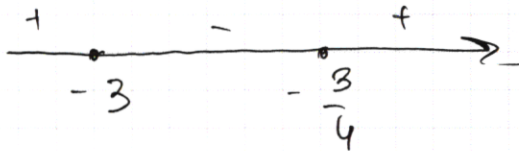
$$4x^2 + 16x + 16 \geq x+7$$

$$4x^2 - 15x + 9 \geq 0.$$

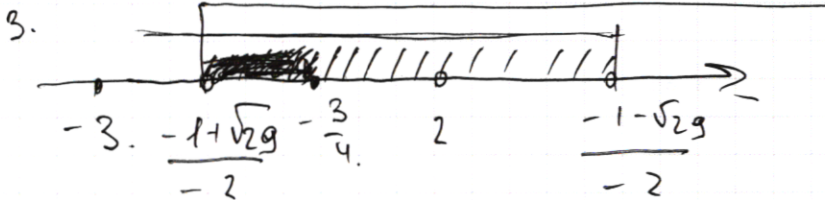
$$D = 225 - 144 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -3$$



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (-\frac{3}{4}; +\infty)$



Отв: $[-\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \frac{-1-\sqrt{29}}{-2}]$

3) 1 1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2 2

- В таком числе ~~на~~ количество цифр, стоящих в ~~первом~~ разряде = 2
- По условию цифр "8" равно семи и эти идут подряд \Rightarrow ~~первоначальное~~ ^{последнее} разряда = кол-во парн. цифр \Rightarrow кол-во цифр "8" сред. 4-ых парных цифр = 1.
- Если цифр "8" нет, остальные цифры: "0" и "9". \Rightarrow кол-во вариантов на этих позициях = 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Количество таких чисел = 2^{10} но пер
восьмирок может находится на ~~любой~~
каждой из цифр, дающих

Итого таких чисел $2^{10} \cdot 10$

Но нужно исключить варианты, где k -я
цифра 0 и 7 не встречаются.

Для "0" - 9 чисел

Для "7" - 10 чисел.

$$\begin{array}{r} 10240 \\ - 19 \\ \hline 10221 \end{array}$$

То есть таких чисел $10240 - 19 = 10221$

Отв. 10221

W1.

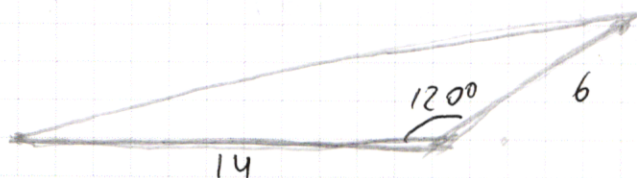
$y = 2x^2$ и $y = 18$ пересекаются в т. $(3; 18)$ и $(-3; 18)$

$y = 2x^2$ и $y = 98$ пересекаются в т. $(7; 98)$ и $(-7; 98)$

(т.к. $18 = 2x^2$, $x = 3$ и $98 = 2x^2$, $x = 7$) \Rightarrow

\Rightarrow длины отрезков равны 6 и 14.

В тр-ке тупой угол лежит против
самой длинной стороны



1. Допустим, что наиб. сторонам: ~~даны~~ $a > 98$ и тогда 14
 не вкл. ~~треугольнику~~ ~~наиб. сторонам~~

Найдём противоп. стороны по г. Косинусов
 где $\cos 120^\circ = \cos(90+30) = \sin(-30) = -\frac{1}{2}$

Пусть x - исконая сторона

$$x^2 = 14^2 + 6^2 - 2(14 \cdot 6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 196 + 36 + 84 = 316$$

$$x = \sqrt{316}$$

⇓

$$a = 2x^2 = 2 \cdot 316 = 632$$

2. Допустим, что наиб. сторонам вкл 14.
 Тогда (y - исконая сторона), $y > 0$.

$$14^2 = y^2 + 6^2 - 2(6y) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$196 = y^2 + 36 + 6y$$

$$y^2 + 6y - 160 = 0$$

$$D = 36 + 640 = 676 = 26^2$$

$$y_1 = \frac{-6 + 26}{2} = 10$$

$$y_2 = \frac{-6 - 26}{2} = -16$$

⇓

$$a = 2y^2 = 200$$

Ответ: при $a = 632$ и $a = 200$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{\sin 10x + \sin 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + \frac{8}{2}$$

$$dg(x) = \sin 10x + \sin 4x - 1 + \cos 2x + 1 + \cos 10x + 8$$

$$dg(x) = \sin 4x + \cos 2x + 8$$

$$g(x) = \frac{\sin 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 8$$

$$g'(x) = 4 \sin 2x - 8 \cos 4x$$

$$g'(x) = 0$$

$$4 \sin 2x = 8 \cos 4x$$

$$\cancel{\sin 2x} = \cancel{2} (1 - 2 \sin^2 2x)$$

$$2 = \frac{\sin 2x}{\cos 4x}$$

$$2 = \frac{\sin 2x}{1 - 2 \sin^2 2x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - 2 \sin^2 2x}{\sin 2x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin 2x} - 2 \sin 2x, \quad \sin 2x = t, \quad t \neq 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{t} - 2t$$

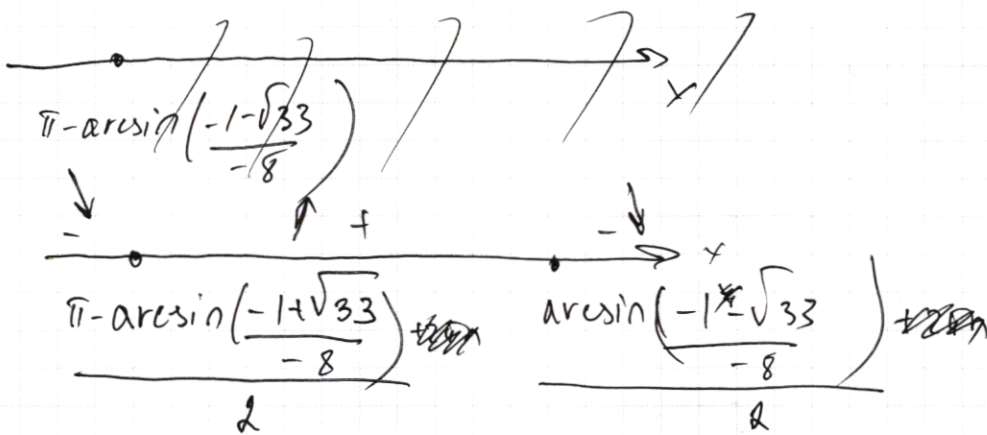
$$\frac{1}{2} = \frac{1 - 2t^2}{t}$$

$$2 - 4t^2 = t; \quad -4t^2 - t + 2 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{-8} \\ t_2 = \frac{-1 - \sqrt{33}}{-8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = -\frac{1 + \sqrt{33}}{-8} \\ \sin 2x = -\frac{1 - \sqrt{33}}{8} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{-8}\right) + 2\pi n}{2} \\ x = \frac{\arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{-8}\right) + 2\pi n}{2} \end{cases}$$



Отв: $\pi - \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{-8}\right)$ - наим.

$\arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{-8}\right)$ - наиб.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

17) элементы порядка набрели такие
числа, чтобы разность ~~каждых~~ двух $\neq 45$.

Цу 1-го промежутка $\div 1, 2, 3, 4, 5, 6 \neq; \Sigma = 21$

Цу 2-го: 52, 53, 54, 55, 56, $\Sigma = 270$

Цу 3-го: 97, 98, 99, 100, 101, 102, $\Sigma = 597$

Цу 4-го: 147, 148, 149, 150, 151, $\Sigma = 425$

Цу 5-го: 188, 189, 190, 191, 192, $\Sigma = 1143$

Итого, общая сумма = 2756

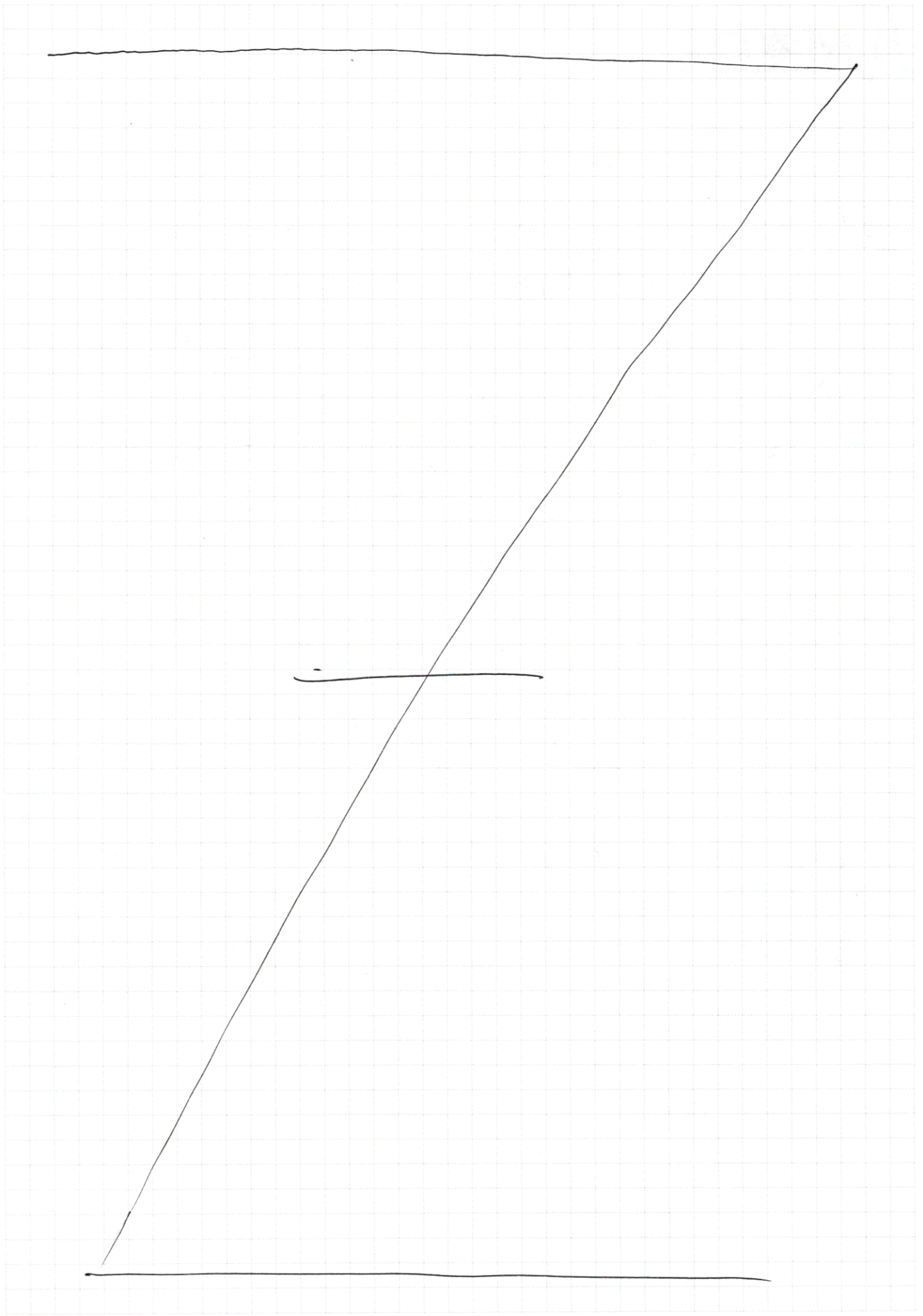
$$\begin{array}{r} + 291 \\ 537 \\ \hline 888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 888 \\ 725 \\ \hline 1613 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 1613 \\ 1143 \\ \hline 2756 \end{array}$$

Это будет минимальная сумма, т.к. ~~и~~
порядки цифр, стоящие в начале промежутка,
~~не~~ соблюдают условия, что их разность $\neq 45$.

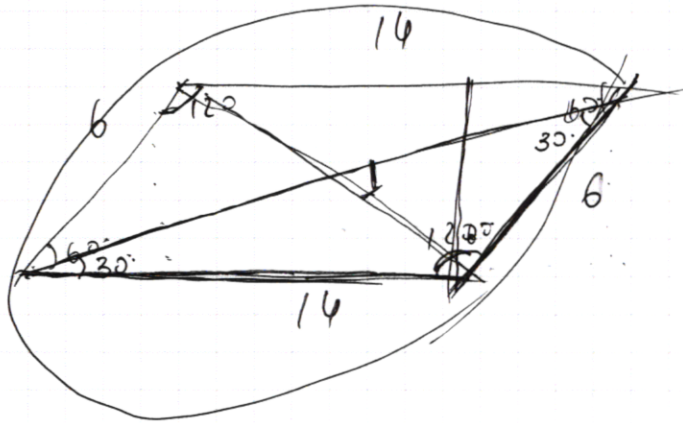
Ответ: 2756



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$360 - 120 =$$

$$= 240 = 120$$

$$c^2 = 14^2 + 6^2 - 2(14 \cdot 6) \cdot (\frac{1}{2})$$

$$c^2 = 196 + 36 - 84$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ + 140 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 6 \\ \hline 84 \\ + 200 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 84 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ + 36 \\ \hline 232 \\ + 84 \\ \hline 316 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 160 \\ \sqrt{4} \\ \hline 640 \\ + 24 \\ \hline 424 \\ + 96 \\ \hline 488 \end{array}$$

$$14^2 = a^2 + b^2 + 6a$$

$$a^2 + 6a = 160 = Q$$

$$Q = 36 + 640 = 676 = 26^2$$

$$14^2 = a^2 + 6^2 + 6a$$

$$196 - 36 = a^2 + 6a$$

$$160 = a^2 + 6a$$

$$a^2 + 6a - 160 = 0$$

$$36 + 160 = 196 = 14^2$$

$$\begin{array}{r} 417 \\ - 210 \\ \hline 207 \\ - 140 \\ \hline 67 \\ - 58 \\ \hline 9 \end{array} = 0,6$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ + 520 \\ \hline 676 \end{array}$$

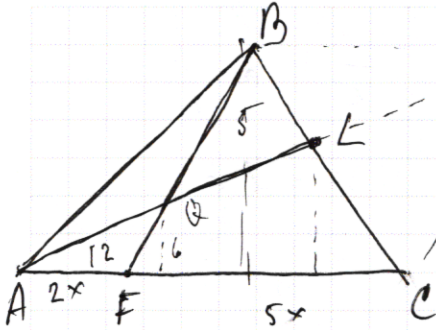
$$\begin{array}{r} 26 \\ \sqrt{26} \\ \hline 156 \\ + 52 \\ \hline 676 \end{array}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

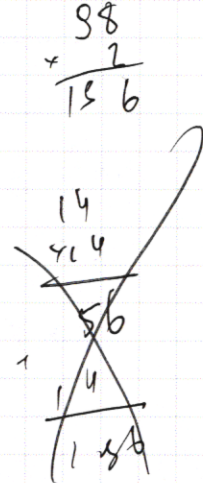


I; Меккама!

$$\frac{BL}{LC} = \frac{FC}{AC} \cdot \frac{BQ}{QF} = 1 \cdot \frac{98}{136}$$

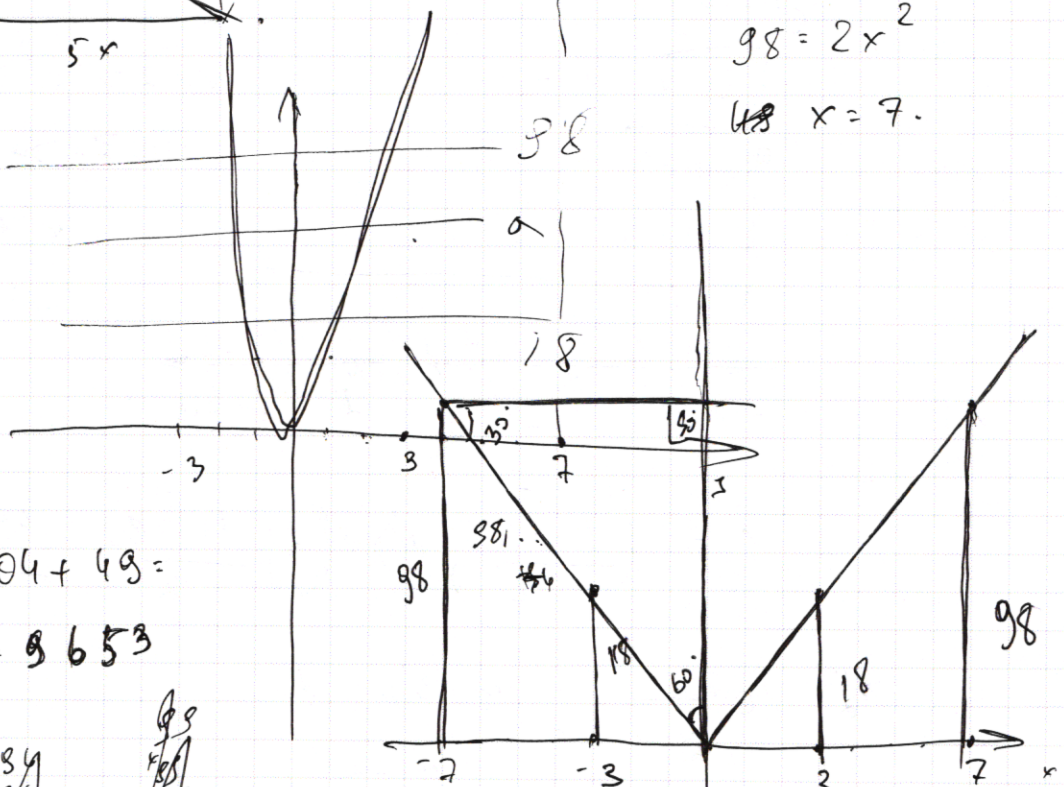
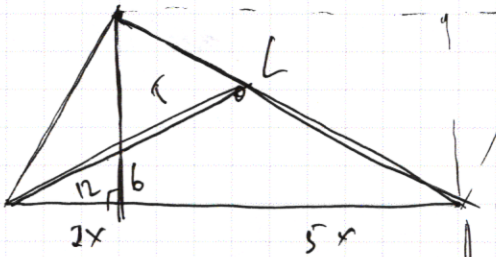
$$\frac{BL}{LC} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{BL \cdot BQ}{LC \cdot QF} = \frac{2}{5}$$



$$98 = 2x^2$$

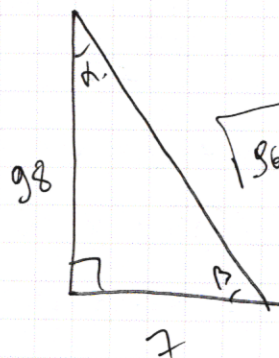
$$x = 7$$



$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 98 \\ \hline 784 \\ 882 \\ \hline 9604 \end{array}$$

$$9604 + 49 = 9653$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 98 \\ \hline 784 \\ 882 \\ \hline 9604 \end{array}$$



$$\sin \alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

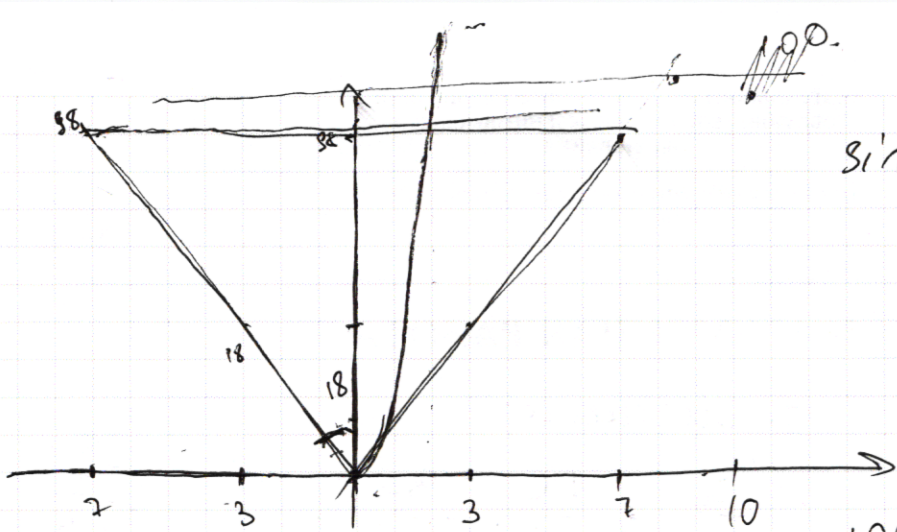
$$\frac{98}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} AB = 186$$

$$AB = \frac{186}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{18}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$AB = 14$$



$$y^2 = 3x^2$$

$$y = 2\varphi$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}$$

$$98^2 + 7^2 = \sqrt{9653}$$

$$x^2 + y^2 = c^2$$

$$\frac{x}{c} = \frac{1}{2}$$

$$c = 2x$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2$$

$$3x^2 = y^2$$

$$y^2 - 3x^2 = 0$$

$$2x^2 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$y^2 = 4x^2$$

$$3x^2 = 4x^2$$

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$$1. \begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

$$x+7 > x^2$$

$$x+7 \rightarrow x+7 \neq 1+2x+x^2$$

$$x^2+x+7 > 0 \quad \uparrow$$

$$x^2+x-6 \neq 0$$

$$x > -4$$

$$D = 5$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2 \right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$\frac{225}{81}$$

$$x_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x^2 - x - 7 > 0$$

$$D = 1 + 28 = \sqrt{29}^2$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$$

2. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) = 1$

$$x+4 = \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 = \sqrt{x+7}$$

$$4x^2 + 16x + 16 = x + 7$$

$$4x^2 + 15x + 9 = 0$$

$$D = 225 - 144 = 9^2$$

$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -\frac{24}{8} = -3$$

$$f \frac{p}{2} = \frac{p}{\sin 2x} - a \sin 2x, \quad \sin 2x = 8$$

$$f \frac{p}{2} = \frac{p}{t} - at$$

$$f \frac{p}{2} = \frac{p - at^2}{t}$$

$$-t = 2 - 4t^2, \quad -4t^2 + t + 2 = 0$$

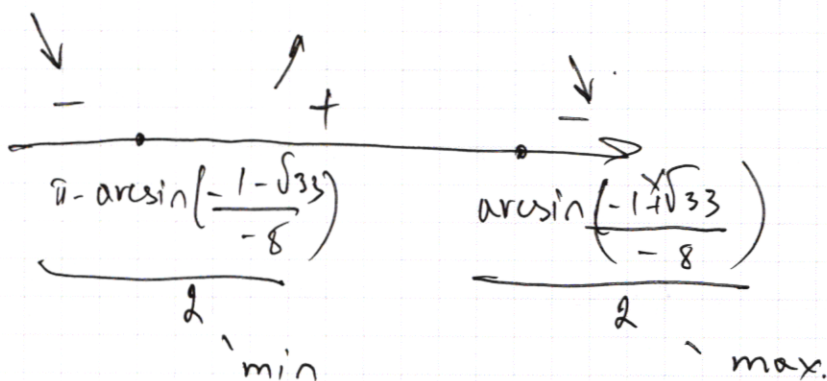
$$D = 1 - 32 = 33$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-1 + \sqrt{33}}{-8} \\ t_2 = -\frac{1 - \sqrt{33}}{-8} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -\frac{1 + \sqrt{33}}{-8} \\ \sin 2x = -\frac{1 - \sqrt{33}}{-8} \end{array} \right.]$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \arcsin\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{-8}\right) + 2\pi n \\ x = \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{-8}\right)}{2} + 2\pi n \end{array} \right.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{\sin 10x + \sin 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 10x}{2} + \frac{8}{2}$$

$$2g(x) = \sin 10x + \sin 4x - 1 + \cos 2x + 1 + \cos 10x + 8$$

$$2g(x) = \sin 10x + \cos 10x - \sin 4x + \cos 2x + 8$$

$$2g(x) = \cos 2x + \sin 4x + 8$$

$$g(x) = \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{2} + 4$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(\sin 2x \cdot 2) + 8 \cos 4x$$

$$g'(x) = \sin 2x + 8 \cos 4x$$

~~$$4 \sin 2x = -28 \cos 4x$$~~

~~$$\sin x \cos x = -2(1 - 2\sin^2 2x)$$~~

~~$$\sin x \cos x = -2(1 - 2(1 - 2\sin^4 x))$$~~

~~$$\sin x \cos x = -2 - 4(1 - 2\sin^4 x)$$~~

~~$$\sin x \cos x = -2 - 4 + 8\sin^4 x$$~~

~~$$\sin x \cos x = -6 + 8\sin^4 x$$~~

$$\sin 2x = -12 \cos 4x$$

$$12 = \frac{\sin 2x}{\cos 4x}$$

$$12 = \frac{\sin 2x}{1 - 2\sin^2 2x}$$

$$12 = \frac{1 - 2\sin^2 2x}{\sin 2x}$$

$$0,5 = \frac{1}{\sin 2x} - 2\sin 2x$$

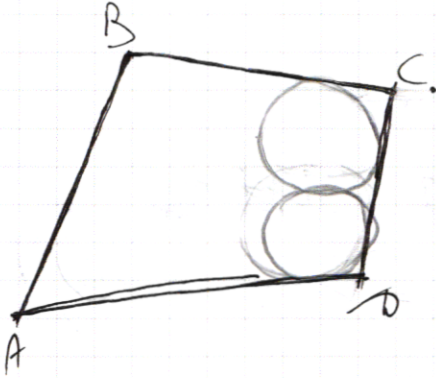
$$\sin 2x = a$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin 2x} - 2\sin 2x$$

~~$$-0,5 = \frac{1}{a} - 2a$$~~

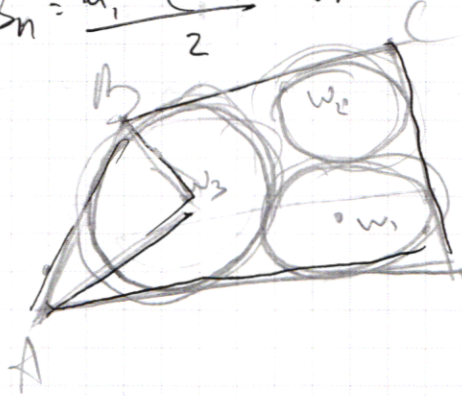
~~$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{a} - 2a \quad | \cdot a \quad -a = 1 - 2a^2$$~~
~~$$+2a^2 + a + 1 = 0$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



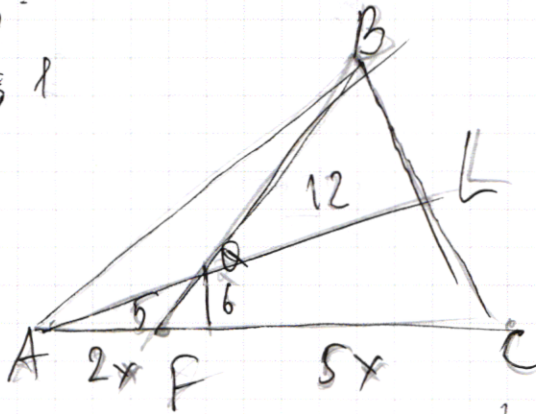
$$S_n = \frac{a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

45, 80, 135, 180



$$\begin{array}{r} 81 \\ + 56 \\ \hline 137 \\ \hline 147 \end{array}$$

$S_n =$
 $7 \cdot S_{10} = 1$



$$\frac{BL}{LC} = \frac{7x}{5x} = \frac{BQ}{QF} = 1$$

1, 2, 49, 50, 93, 94

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6. - 21

$\cos(x) = \cos(10x) - \cos(x)$

7. 45° \cos : 5, 9

2. ~~52, 53, 54, 55, 56~~ - 270

3. 147, 148, 149, 150, 151 - 725

4. 97, 98, 99, 100, 101, 102 - 587

5. 188, 189, 190, 191, 192, 193 - 1163

$S_n = 18$ $\frac{14}{18} = \frac{7}{9}$

$$S_n = \frac{a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$$

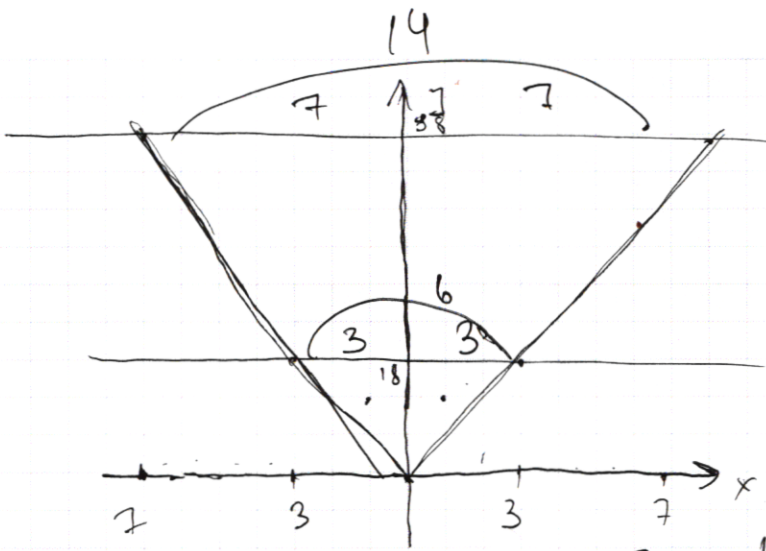
$$S_6 = \frac{1 + 5}{2} \cdot 6 = 18$$

$$\begin{array}{r} 181 \\ + 189 \\ \hline 380 \end{array}$$

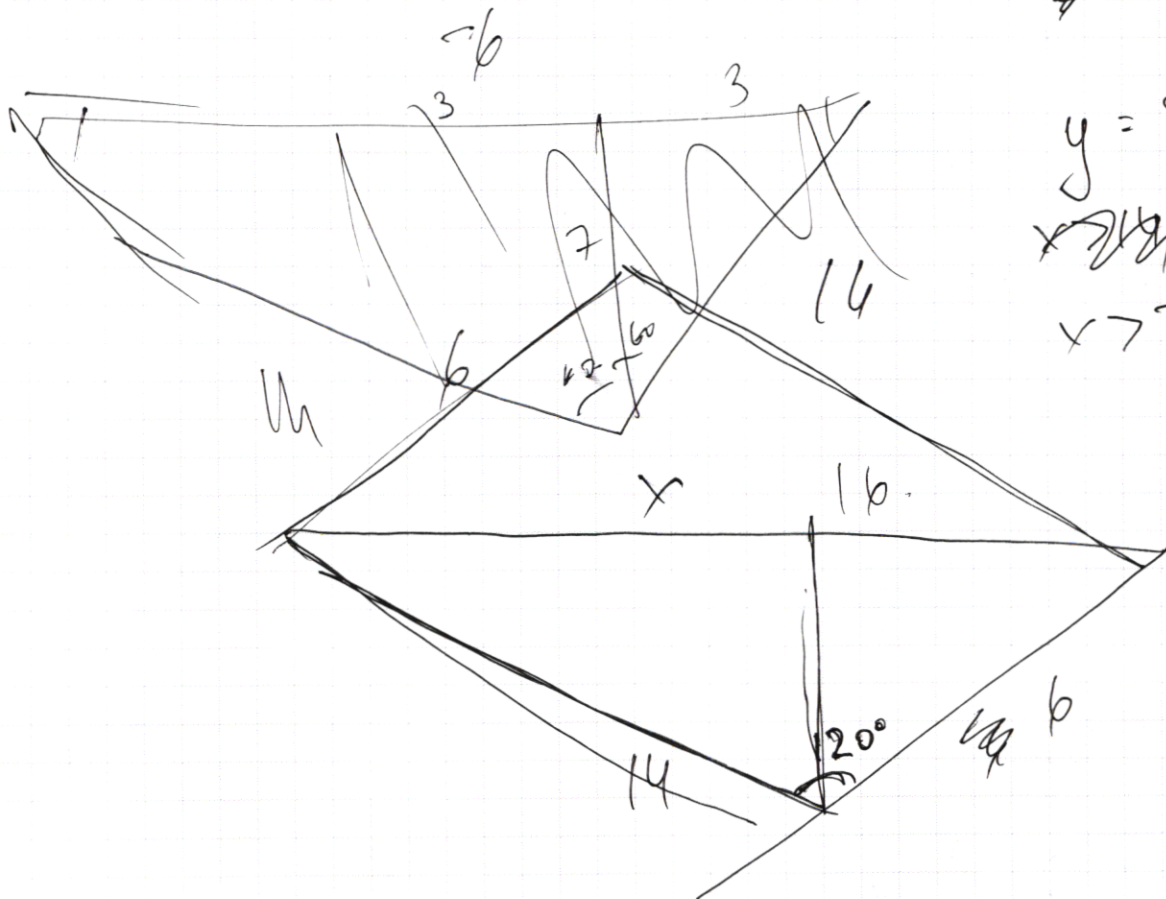
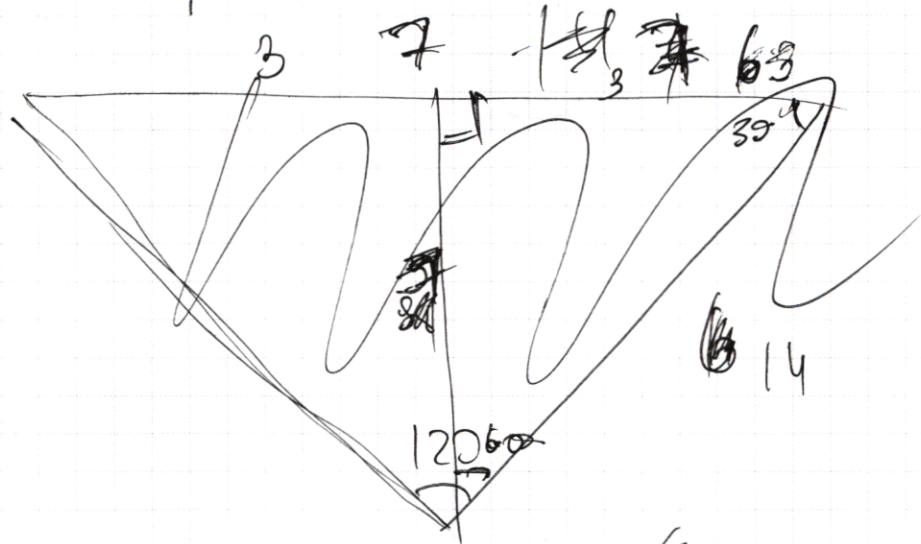
$$760 + 383 =$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ + 193 \\ \hline 383 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 760 \\ + 383 \\ \hline 1143 \end{array}$$



~~18/16/3/6/50~~
48



$y = 2x^2$
x < 7
x > 7