3-003

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 3-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

3-003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7} \neq 1+x \end{cases}$

$\sqrt{x+7}>x$

$x+7>x^2 \quad x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x_2=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x \in \left(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7} \neq x+1 \quad x+1 \geq 0$

$x+7=(x+1)^2$

$x+7=x^2+2x+1$

$x^2+x-6=0$

$x=-3 \quad x=2 \longrightarrow x \neq 2$

$\begin{cases} x>-4 \\ x \in \left(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\log_a b \geq c \quad b \geq a^c$

$\log_2 5 = 4$

$\sqrt{x+7}-x<1$

$(x+4)$

$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \in \left(-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x>-4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

Если $\sqrt{x+7}-x<1$ то

$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

$\left[\begin{array}{l} 2x+4<0 \\ (2x+4)^2 \leq x+7 \end{array}\right.$, $x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in [-3; -\frac{3}{4}] \\ x \in (-\infty; -2) \end{array}\right. \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{3}{4}] \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (-4; -\frac{3}{4}]$

$(2x+4)^2 \leq x+7$

$4x^2+16x+16 \leq x+7$

$4x^2+15x+9 \leq 0$

$D=225-144=81$

$x_1=\frac{-15-9}{8}=-\frac{24}{8}=-3$

$x_2=\frac{-15+9}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$

$x \in [-3; -\frac{3}{4}]$

$[-4; -\frac{3}{4}]$

$\left[\begin{array}{l} x \in [-3; -\frac{3}{4}] \\ x<-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{3}{4}]$

$x \in$

$(-4;2) \cup$

Если $\sqrt{x+7}-x>1$ то

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$(2x+4)^2 \geq x+7$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$x_3=-3$

$x_4=-\frac{3}{4}$

$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$

$\begin{cases} x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty) \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow (-4; -3] \cup [-\frac{3}{4}; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(-4;-3)\cup(2;\frac{1+\sqrt{3}}{2})$

$g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$\sin(5x-2x)\sin(5x+2x)-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$(\sin 5x\cos 2x-\cos 5x\sin 2x)(\sin\quad+\quad)$

$\sin^2 5x\cos^2 2x-\sin^2 2x\cos^2 5x-\sin^2 x+1-\sin^2 5x+4$

$\cancel{\sin^2 5x}($

$\sin^2 5x(1-\sin^2 2x)-(1-\sin^2 5x)\sin^2 2x-\sin^2 x+5-\sin^2 5x$

$\sin^2 5x(1-\sin^2 2x-1)-\sin^2 2x+\sin^2 2x\sin^2 5x+5-\sin^2 x$

$\sin^2 5x(1-\sin^2 2x-1+\sin^2 2x)-\sin^2 2x+5-\sin^2 x$

$-\sin^2 x-\sin^2 2x+5$

$b=1\Rightarrow$

$a-b\Rightarrow 1-b_2-1$

$\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$\sin(5x-2x)\sin(5x+2x)-\sin^2 x+1-\sin^2 5x+4$

$(\sin 5x\cos 2x-\sin 2x\cos 5x)(\sin 5x\cos 2x+\sin 2x\cos 5x)-\sin^2 x+5-\sin^2 5x$

$\sin^2 5x\cos^2 2x-\sin^2 2x\cos^2 5x-\sin^2 x+5-\sin^2 5x=$

$\cancel{=\sin^2 5x(\cos^2 2x}$

$=\sin^2 5x(1-\sin^2 2x)-\sin^2 2x(1-\sin^2 5x)-\sin^2 x+5-\sin^2 5x=$

$=\sin^2 5x-\sin^2 5x\cdot\sin^2 2x-\sin^2 2x+\sin^2 2x\cdot\sin^2 5x-\sin^2 x+5-\sin^2 5x=$

$=5-\sin^2 2x-\sin^2 x\geq 5\qquad t^2\qquad a\geq 2\sqrt{\quad}$

$4\sin^2 x\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin^2 2x+\sin^2 x=4\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x=\cancel{4\sin^2 x(\cos^2 x}$

$\sin^2 x(4\cos^2 x+1)=$

$=\sin^2 x(4-4\sin^2 x+1)=\sin^2 x(5-4\sin^2 x)=$

$=5\sin^2 x-4\sin^4 x\qquad 5t-4t^2>a\qquad 4t^2-5t+a<0$

$D=25-16a$

$t_1=\frac{5-\sqrt{\quad}}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3 - 003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

(1) $\begin{cases} x+7\geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \end{cases}$ $\quad x+7\geq 0$; $x\geq -7$; $x+4>0$; $x>-4$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$\sqrt{x+7}>x$

$\begin{cases} x\geq -7 \\ \left[\begin{cases} x<0 \\ x+7>x^2 \end{cases}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-7;+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} x\in(-\infty;0) \\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x^2-x-7<0$

$x_1=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ $x_2=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}=1+x$

$\begin{cases} x\geq -7 \\ 1+x\geq 0 \\ x+7=(1+x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq -1 \\ x^2+2x+1=x+7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -7 \\ x\geq -1 \\ x\in\{-3\}\cup\{2\} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{2\}$ тогда для

$\sqrt{x+7}\neq 1+x$ будет

$\begin{cases} x\geq -7 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-7;2)\cup(2;+\infty)$

ОДЗ

(1) $\begin{cases} x\in[-7;+\infty) \\ x\in\left[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x\in(-4;+\infty) \\ x\in[-7;2)\cup(2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow (-4;2)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

Если $0<\sqrt{x+7}-x<1$, то $x+4\leq\sqrt{x+7}-x$

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x<1 \\ x+4\leq\sqrt{x+7}-x \\ x\in(-4;2)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}>x \\ \sqrt{x+7}<1+x \\ 2x+4\leq\sqrt{x+7} \\ x\in(-4;2)\cup\left(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}$ (2)

$\sqrt{x+7}>x$

$x\geq -7 \Rightarrow$

$\left[\begin{cases} x<0 \\ x+7>x^2 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x<0 \\ x^2-x-7<0 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x<0 \\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$ $\quad \begin{cases} x\geq -7 \\ x\in\left(-\infty;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\sqrt{x+7}-x<1$

$\sqrt{x+7}<x+1$

$\begin{cases} x+7<(x+1)^2 \\ x\geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7<x^2+2x+1 \\ x\geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6>0 \\ x\geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty) \\ x\in[-7;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-7;-3)\cup(2;+\infty)$

$2x+4\leq\sqrt{x+7}$

$(2x+4)^2\leq x+7$

$4x^2+16x+16\leq x+7$

$4x^2+15x+9\leq 0$

$x\in\left[-3;-\frac{3}{4}\right]$

$\begin{cases} x\in\left[-3;-\frac{3}{4}\right] \\ x\geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-3;-\frac{3}{4}\right]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

(2) $\begin{cases} x \in [-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \\ x \in [-7;-3) \cup (2;+\infty) \\ x \in [-3; -\frac{3}{4}] \\ x \in (-4;2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases} \iff x \in \varnothing$

Если $\sqrt{x+7} - x > 1$, то

$x+4 \ge \sqrt{x+7} - x$

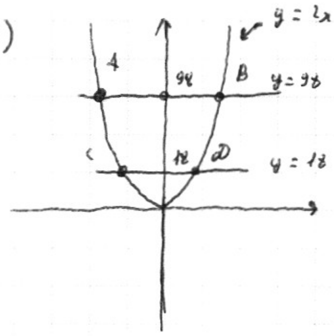
$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 1 \\ x+4 \ge \sqrt{x+7} - x \\ x \in (-4;2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x+7} > x+1 \\ 2x+4 \ge \sqrt{x+7} \\ x \in (-4;2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-3;2) \\ x \in [-7;-3] \cup [-\frac{3}{4};+\infty) \\ x \in (-4;2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}) \end{cases} \iff x \in [-\frac{3}{4};2)$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} > x+1 \\ x \ge -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-3;2) \\ x \ge -7 \end{cases} \iff \underline{x \in (-3;2)}$

$\begin{cases} 2x+4 \ge \sqrt{x+7} \\ x \ge -7 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty;-3] \cup [-\frac{3}{4};+\infty) \\ x \ge -7 \end{cases} \iff x \in \underline{[-7;-3] \cup [-\frac{3}{4};+\infty)}$

Ответ $x \in [-\frac{3}{4};2)$

1)



$2x^2 = 98$

$x^2 = 49 \quad x = \pm 7 \Rightarrow AB = 2|x| = 14$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3 \Rightarrow CD = 2|x| = 2\cdot 3 = 6$

$2x^2 = a$

$x^2 = \frac{a}{2}$

$x = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MN = 2|x| = 2\left|\frac{a\sqrt{2}}{2}\right| = |a\sqrt{2}|$

$y = 2x^2$ и $y = a$ высекаются, поэтому $a > 0 \Rightarrow MN = a\sqrt{2}$

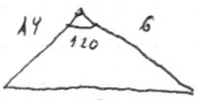
$AB = 14$

$CD = 6$

$MN = a\sqrt{2}$

$\alpha = 120$

I)



или

по теореме косинусов

$14^2 + 6^2 - 2\cdot 14\cdot 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 2a^2$

$196 + 36 + 84 = 2a^2$

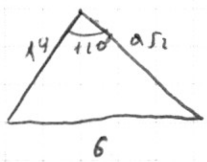
$a^2 = 158 \Rightarrow \underline{\underline{a = \sqrt{158}}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II



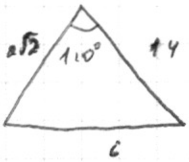
$14^2 + 2a^2 - 2\cdot 14\cdot a\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = 36$

$196 + 2a^2 + 14\sqrt{2}\,a = 36$

$2a^2 + 14a\sqrt{2} + 160 = 0$

или

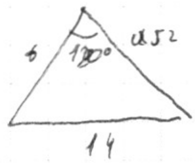
$a^2 + 7a\sqrt{2} + 80 = 0$



$D = 98 - 4\cdot 80 < 0 \Rightarrow$ такого не может быть

можно было также сказать что ~~в~~ наибольший угол ~~это~~ $110°$ в этом треугольнике и $6 < 14$, поэтому не может такого треугольника быть

III



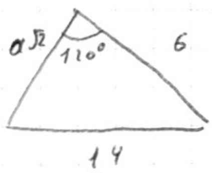
$36 + 2a^2 - 2\cdot 6\,a\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = 196$

$2a^2 - 6a\sqrt{2} - 160 = 0$

$a^2 - 3a\sqrt{2} - 80 = 0$

или

$D = 18 + 320 = 338$



$a_1 = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{338}}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 13\sqrt{2}}{2} = \frac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$

$a_2 = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{338}}{2} < 0$

Ответ $a = 8\sqrt{2}$
и
$a = \sqrt{158}$

7) Нужно чтобы из промежутка $[181; 225]$ выбрать наименьшие числа, чтобы общая сумма тоже было наименьшее, в противном случае сумма не может быть наименьшей

и так числа будут

181 182 183 184 185 186 [181; 225]

чтобы из [136; 180] промежутка выбрать наименьшие числа, чтобы никакие разности двух чисел не делились 45, надо выбрать эти числа

142 143 144 145 146 147 [136; 180]

и так далее

103 104 105 106 107 108 [91; 135]

64 65 66 67 68 69 [46; 90]

25 26 27 28 29 30 [1; 45]

сумма будет

$165 + 399 + 633 + 867 + 1101 = \underline{\underline{3165}}$

Ответ 3165

3) Обозначим 888888 — a

число будет примерно

в будет равно $\overline{a a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}}$ $a_1, \dots, a_{10} = 0$ или 7

и при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз

но $\underline{\underline{a}}$ может и в другом месте оказатся

Первая цифра $\neq 0$, поэтому оно или 7 или 8, если 8, то a на первам месте если 7 то нет

I допустим $\underline{\underline{a}}$ на первом месте, то таких чисел будет $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \underbrace{C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \dots C_2^1}_{8 \text{ раз}} = 2^8 = 256$

3 - 003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3 - 003
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

допустим $\underline{\underline{a}}$ на втором месте, то таких чисел будет

$$1\cdot 1\cdot 1\cdot \underbrace{C_2^1\cdot\ldots\cdot C_2^1}_{8\text{ раз}} = 2^8 = 256$$

и так далее

...

допустим $\underline{\underline{a}}$ на последнем месте

$$1\cdot 1\cdot 1\cdot \underbrace{C_2^1\ldots C_2^1}_{8\text{ раз}} = 2^8 = 256$$

в общем сумма таких чисел будет

$$11\cdot 256 = \underline{\underline{2816}}$$

Ответ 2816

2) $g(x) = \sin 3x\cdot\sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \sin(5x-2x)\sin(5x+2x) - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4 =$

$= (\sin 5x\cos 2x - \sin 2x\cos 5x)(\sin 5x\cos 2x + \sin 2x\cos 5x) - \sin^2 x + 5 - \sin^2 5x =$

$= \sin^2 5x\cos^2 2x - \sin^2 2x\cos^2 5x - \sin^2 x + 5 - \sin^2 5x =$

$= \sin^2 5x(1-\sin^2 2x) - \sin^2 2x(1-\sin^2 5x) - \sin^2 x + 5 - \sin^2 5x =$

$= \underline{\sin^2 5x} - \underline{\underline{\sin^2 2x\sin^2 5x}} - \sin^2 2x + \underline{\underline{\sin^2 2x\sin^2 5x}} - \sin^2 x + 5 - \underline{\sin^2 5x} =$

$= 5 - \sin^2 2x - \sin^2 x$

$\sin^2 2x + \sin^2 x \geq 0$

$\sin^2 2x + \sin^2 x = \sin^2 x(4 - 4\sin^2 x + 1) = \sin^2 x(5 - 4\sin^2 x)$ ~~когда~~ $\sin^2$

$\sin^2 x \geq 0$ и $5 - 4\sin^2 x \geq 0$,

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) тогда наибольшее значение будет когда они будут равны (из неравенства Коши) $\sin^2 x = 5 - 4\sin^2 x \quad 5\sin^2 x = 5 \quad \sin^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 x(5-4\sin^2 x) \leq 1(5-4) = 1 \Rightarrow$

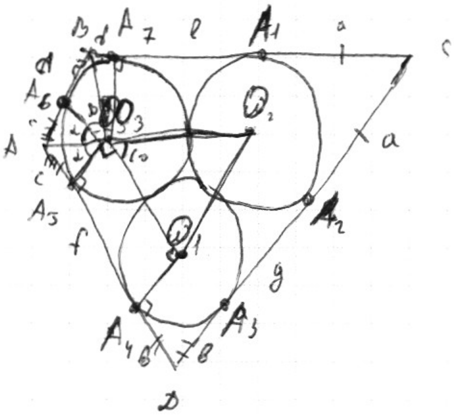
$\Rightarrow$ ~~$4 \leq 5 - \sin^2 2x - \sin^2 x \leq 5$~~

$4 \leq 5 - \sin^2 2x - \sin^2 x \leq 5 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq g(x) \leq 5$

Ответ наименьшее значение 4

наибольшее значение 5

4)



а) $AC = A_2C = a \qquad r_1 = r_2 = r_3$

$DA_4 = DA_3 = в$

$AA_5 = AA_6 = c$

$A_6B = BA_7 = d$

$A_7A_1 = e$

$A_2A_3 = g$

$A_5A_4 = f$

$O_1A_4 \perp AD$ и $O_3A_5 \perp AD$ тогда

$f = A_5A_4 = 2r$, потому что $O_3A_5 = O_1A_4 = r \Rightarrow$

$O_3O_1 = 2r$ и ясно становится, что

$O_3O_1A_4A_5$ прямоугольник, аналогично

$e = 2r$ и $g = 2r$

$AD + BC - AB - CD = c + f + в + d + e + a -$

$- c - d - в - g - a = f + e - g =$

$= 4r - 2r = 2r = 12$

$\underline{r = 6}$

3 - 003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) б)

$\cancel{g}=f=e \Rightarrow O_3O_1=O_1O_2=O_1O_3=2r \Rightarrow \angle O_1O_3O_2=60^\circ$

$\angle AO_3A_5=\angle AO_3A_6=\alpha$

$\angle A_6O_3B=\angle BO_3A_7=\beta$

$\angle A_3O_3O_2=\angle A_5O_3O_1=90^\circ$

$2\alpha+2\beta+90^\circ+90^\circ+60=360$

$2\alpha+2\beta=110$

$\alpha+\beta=60^\circ$

В условии O_3 это тот же O $\Rightarrow$ $\angle AOB=\alpha+\beta=\underline{60^\circ}$

c) так как ~~AOB~~

$S_{AOB}=\frac{1}{2}AO\cdot OB\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 58\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=14,5\sqrt{3}$

$S_{AOB}=\frac{1}{2}OA_6\cdot AB=\frac{1}{2}r\cdot AB=\frac{1}{2}\cdot 6\,AB=3AB$

$3AB=14,5\sqrt{3}$ $\quad AB=\frac{14,5\sqrt{3}}{3}=\frac{29\sqrt{3}}{6}$

~~AB=~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3 - 003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

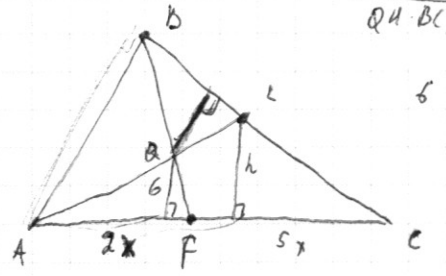
3 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6)



$\frac{H}{QH \cdot BC} \frac{7x}{} = \frac{5x}{11x}$ $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

6

$\frac{6 \cdot 2x}{2} = \frac{h \cdot 7x}{2}$

$= 6x$ $3{,}5xh$

$3{,}5xh - 6x = x(3{,}5h - 6)$

$5y + \ldots +$

$11y - 3{,}5xh + 7y = S_{AQB}$

$S_{AQB} = 7y - 3{,}5xh$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3-003
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$$\begin{cases} x+7 \geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ x \in \left[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x>-4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x+7>x^2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; +\infty) \\ \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 0) \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

$\log_2 x \geq 3$

$x \geq 8$

Если $0<\sqrt{x+7}-x<1$, то

$(x+4) \leq \sqrt{x+7} - x$

$$\begin{cases} 0<\sqrt{x+7}-x<1 \\ 2x+4 \leq \sqrt{x+7} \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x \in (-7;-3) \cup (2;+\infty) \\ x \in \left[-7; -\frac{3}{4}\right] \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow ~~(-4;-3) \cup \left(\ldots \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)~~$$

~~$x \in (-4;-3)$~~

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

$$\begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} 2x+4<0 \\ (2x+4)^2 \leq (x+7) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -7 \\ \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -2) \\ x \in \left[-3; -\frac{3}{4}\right] \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; -\frac{3}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-7; -\frac{3}{4}\right]$$

$x^2+x-6=0$

$x_1=-3$

$x_2=2$

$(2x+4)^2 \leq (x+7)$

$4x^2+16x+16 \leq x+7$

$4x^2+15x+9 \leq 0$

$D = 225-144 = 81$

$x_1 = -\frac{3}{4}$

$x_2 = -3$

$x \in \left[-3; -\frac{3}{4}\right]$

$\sqrt{x+7} - x < 1$ $\quad x \geq -7$

$\sqrt{x+7} < x+1$

$(\sqrt{x+7})^2 < (x+1)^2$

$x+7 < x^2+2x+1$

$x^2+x-6>0$ $\quad x_1=-3; x_2=2$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3) \cup (2;+\infty) \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-7;-3) \cup (2;+\infty)$$

$\sqrt{x+7} - x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$

$$\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x+7>x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x^2-x-7<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

Если $\sqrt{x+7}-x>1$, то

$(x+4) \geq \sqrt{x+7} - x$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-3;2) \\ x \in [-7;-3] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x \in (-4;2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{4}; 2\right)$$

$\sqrt{x+7} - x > 1$

$x \in (-3; 2)$

$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$ $\quad x \geq -7$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

$(2x+4)^2 \geq x+7$

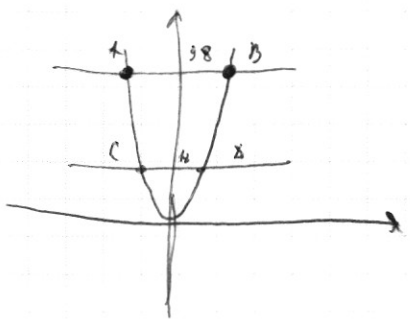
$$\begin{cases} x \in (-\infty; -3] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right) \\ x \in [-7; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-7;-3] \cup \left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$$

$\frac{-15-9}{8} = -\frac{24}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3-003



$y = 2x^2 = 98$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

$AB = 14$

$2x^2 = 16$

$x^2 = 4$

$x = \pm 3$

$CD = 6$

$y = 2x^2 = a$

$x^2 = \frac{a^2}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{a^2}{2}}$

$MN = 2\sqrt{\frac{a^2}{2}}$

$a > 0$

$196 + 36 + 8 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \frac{1}{8} = 2a^2$

$196 + 36 + 84 = 2a^2$

316 a^2 158

~~$a = 2\sqrt{158}$~~

$a = \sqrt{158}$

1 46

~~1 2 3 4 5 6~~

136 137 138 139 140 141

97 98 99 100 101 102

58 59 60 61 62 63

181 182 183 184 185 186

142 143 144 145 146 147

103 104 105 106 107 108

64 65 66 67 68 69

25 26 27 28 29 30

8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

$\underbrace{888\ 8888}_{a}$ ~~12~~ 3

$\frac{3!}{2!\,1!} = 3$

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot C_3^1$.

6561

$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6$

$1 \cdot 1 \cdot 1$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

3-003

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

3 - 003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 - \sin^2 2x - \sin^2 x = 5$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$\sin^2 2x + \sin^2 x \geq$

$4\sin^2 x\cos^2 x = 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) + \sin^2 x =$

$= 4\sin^2 x(4 - 4\sin^2 x + 1) =$

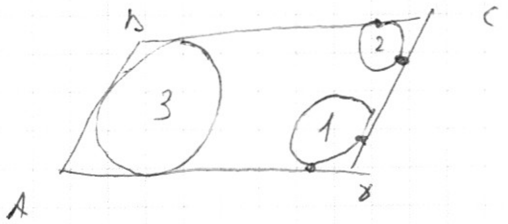
$= \sin^2 x(5 - 4\sin^2 x)$

$\sin^2 x = 5 - 4\sin^2 x$

$\frac{24}{6}$ 57

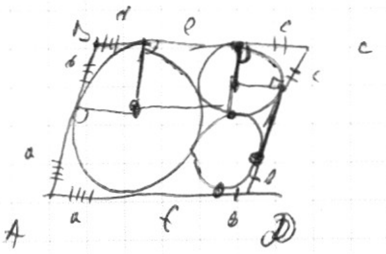
$5\sin^2 x = 5$

$\sin x = 1$



$X \cdot \frac{58}{X}$

$\frac{1}{2} \cdot 58 \cdot \frac{1}{2}$ 5



$AB + BC - AD - CD$

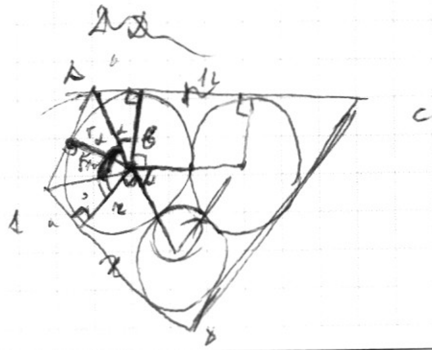
$a + f + b + d + e + c - a - d - c - b = f + e = 12$

14 $\frac{1}{2}$

$2\alpha + 2\beta + 180 + 60 = 360$

$2\alpha + 2\beta = 110$

$\alpha + \beta$

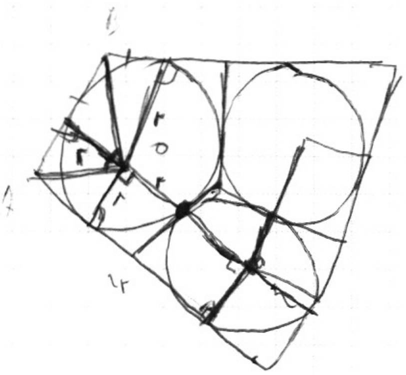


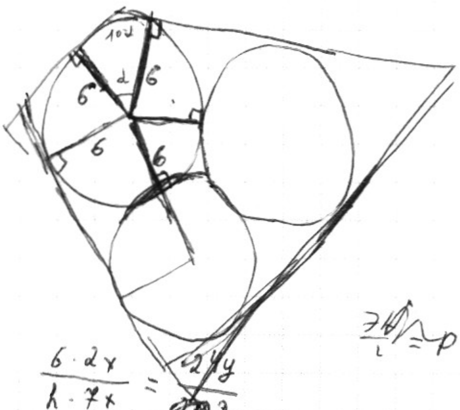
$X^2 + \frac{58}{x^2} - 2 \cdot 58 \cdot \frac{1}{2} = AD^2$

$x^2 + \frac{58}{x^2} - 58 = AD^2$

$x \cdot \frac{5\delta}{x}$

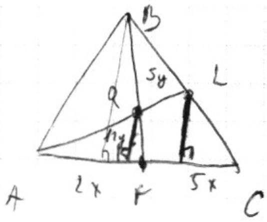
$x^2 + \frac{5\delta}{x^2} - 2 \cdot x \cdot \frac{5\delta}{\delta} \cos\alpha =$





$\frac{6 \cdot 2x}{2 \cdot 7x} = \frac{24y}{2p}$

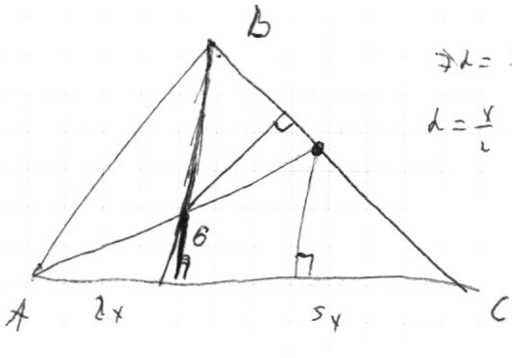
$\frac{7\lambda}{2} = p$



$5y + p$

$\frac{12}{7\lambda} = \frac{24}{2p}$ $\quad \frac{12}{7\lambda} = \frac{12}{p}$

$7\lambda = p$



$7\lambda = \frac{7x}{2}$

$\lambda = \frac{x}{2}$

$6 \cdot 2x$

$\frac{6 \cdot 2x}{2 \cdot 7x} =$

$\frac{BC}{LC}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)