МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-055

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-055

ШИФР

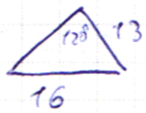
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$

16

13



$\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{2}$

$16\cdot 26$ $260+120+36$

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

216

26×26

$520+36+120=\sqrt{676}$

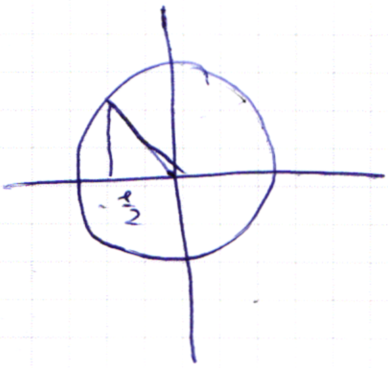
$26 \times 16=36+120+260=$

380

472+676

$16 \times 16 = 36+60+160=256$

1148



$1148=2\cdot 574=4\cdot 287$

$1348=2\cdot 674=4\cdot 337$

44-16

34-6

28

-16

1936 = $2\cdot 968=$

-420

$4\cdot 484$

672+676

$674\cdot 2=$

$256+1680=$

$=1936$

$16\cdot 121$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

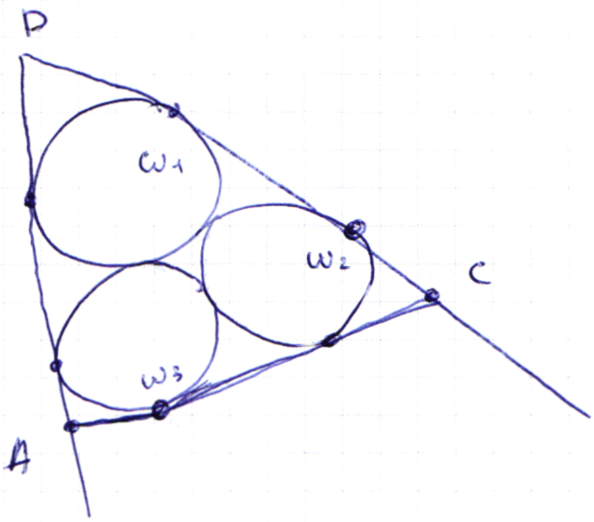
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{\cos 14x + \cos 2x}{2}$$

$$\begin{array}{r} 2048 \\ + \quad 12 \\ \hline \end{array}$$

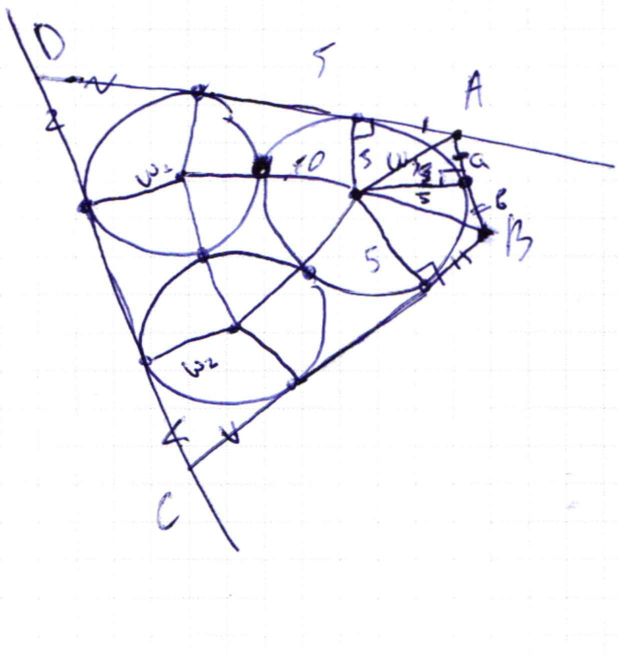
$20480 + 4096 =$

24576



$AD+BC-AB-CD=10$

$a^2+2ab+b^2=a^2+50+b^2-2$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

35·5 + 70·5 + 105·5 + 140·5

175 350 525 700

700 1050

1 2 3 4 23 24 25

$\frac{BL \cdot QH}{BC \cdot FH} = \frac{7}{64}$

$\frac{BC}{QH}$ -

12·26+13

260+52+13 = 325

$\frac{BL}{BC} \cdot 0$

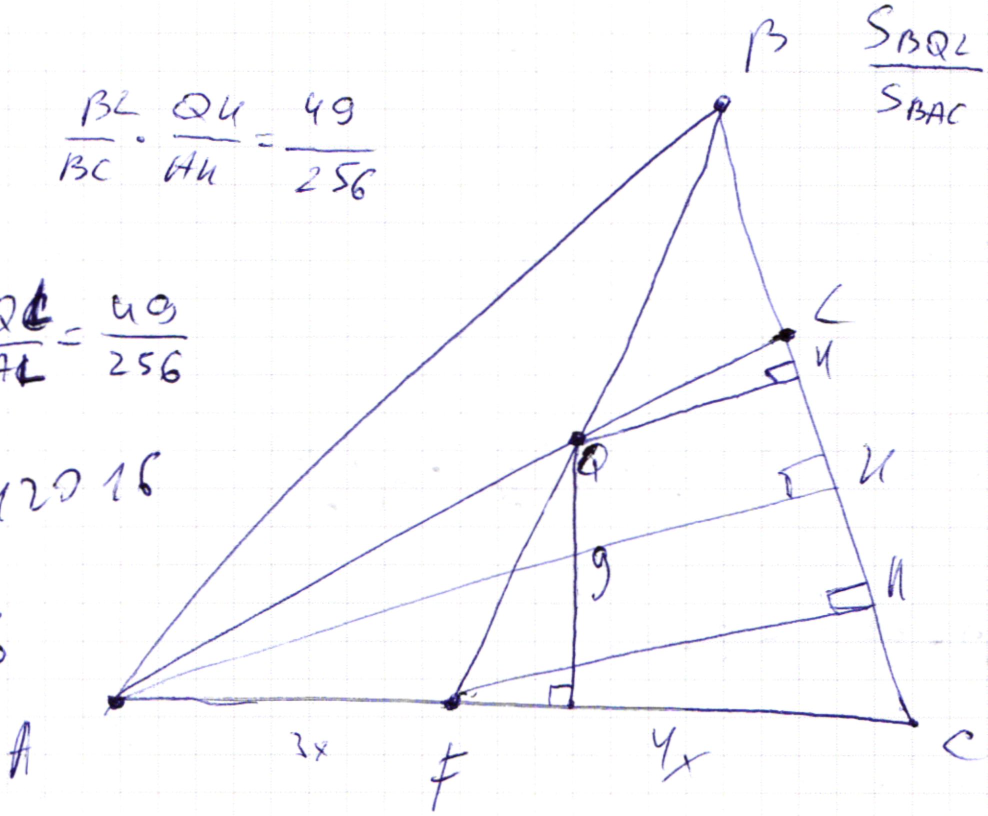
$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$\frac{BL}{BC} \cdot \frac{QU}{AU} = \frac{49}{256}$

$\frac{BL}{BC} \cdot \frac{QL}{AL} = \frac{49}{256}$

400 120 16

536



625 − 4·144 = 625−536 = 89

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

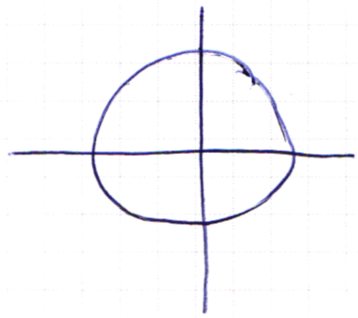
15-055

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}\cdot\frac{AF}{AC}=1$$



$$\frac{CF}{AF}\cdot\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{BC}=1$$

$$\frac{CL}{LB}\cdot\frac{BQ}{QF}=\frac{7}{3}$$

$$\cancel{BQ\cdot QL} \quad \frac{BQ\cdot BL}{BF\cdot BC}=\frac{7}{64}$$

$$\frac{AQ}{QL}\cdot\frac{BL}{BC}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{b}{7x} \qquad \frac{9}{3x}$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\frac{AQ}{AL}$$

$$=\alpha \qquad =\beta$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$0-\frac{\sqrt3}{2}=-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos^2 2x-\cancel{2}\cos^2 7x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$$

$$\frac{\cos 4x-\cos 14x}{2}-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$$

$$\cos^2 2x-\cos^2 x-4$$

$$\cos^2 x-5$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

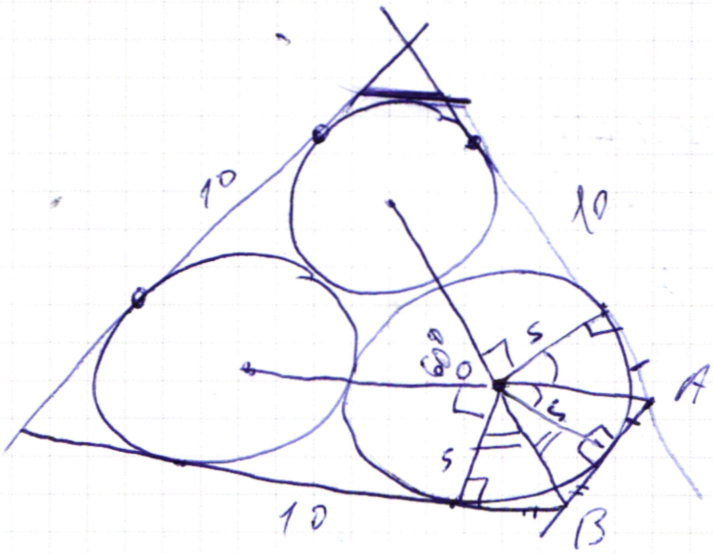
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-055

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(a+b)^2$

1

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\frac{-1 \pm 3}{2}$ 1

$\sqrt{x+3} > x$

$1+12$

-2

$\sqrt{13}$

$x+3 > x^2$

$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $-\frac{2,5}{2}$

$x^2 - x - 3 < 0$

1

$x^2 + x - 2$

$x+3 = x^2 + 2x + 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$19^2 - 16 \cdot 22$ $\qquad$ $220+132$

$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \end{array} = 190 + 171 = 361 - 352$

9 $\quad$ 3

$\frac{-19 \pm 3}{8}$ $\quad$ 2 $\quad$ $\frac{6}{0}$

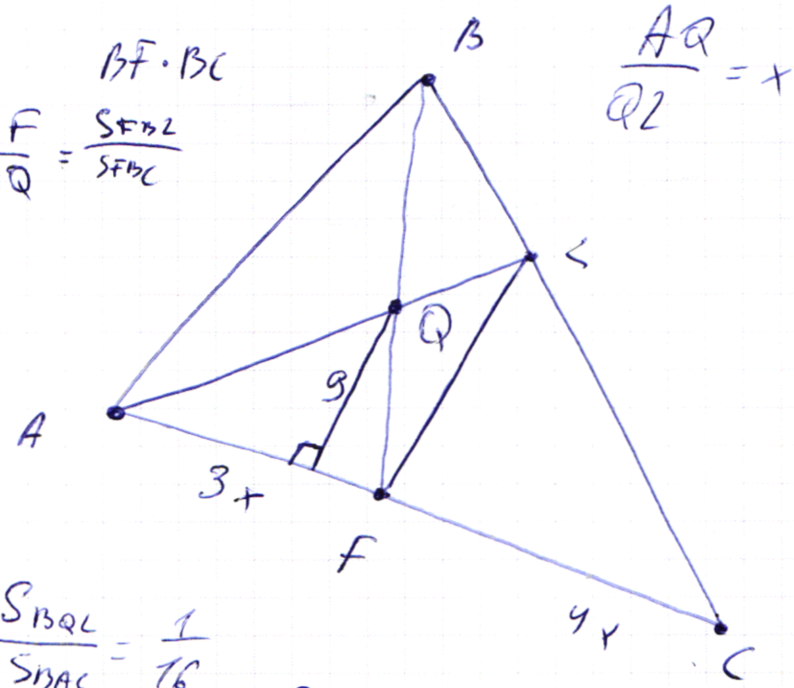
$BQ \cdot BL = \frac{7 \cdot B\cancel{F} \cdot BC}{64}$ $\qquad$ $\frac{-22}{8}$

$BF \cdot BL$ $\qquad$ $BF \cdot BC$ $\qquad$ $\frac{AQ}{QL} = x$

$\frac{BL}{BC} = \frac{7BF}{64BQ} = \frac{S_{FBL}}{S_{FBC}}$

$64 - 7 = 57$

$3 \cdot 19$



$\frac{4 \cdot 16 - 7}{16 \cdot 7}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$\frac{BL}{BC} \cdot \frac{AF}{AC} \cdot \frac{QL \cdot QF}{BQ \cdot QA} = 1$ $\qquad$ $\frac{S_{BFC}}{S_{BAC}} = \frac{4}{7}$ $\qquad$ $\frac{S_{FQLC}}{S_{BAC}} = \frac{57}{112}$

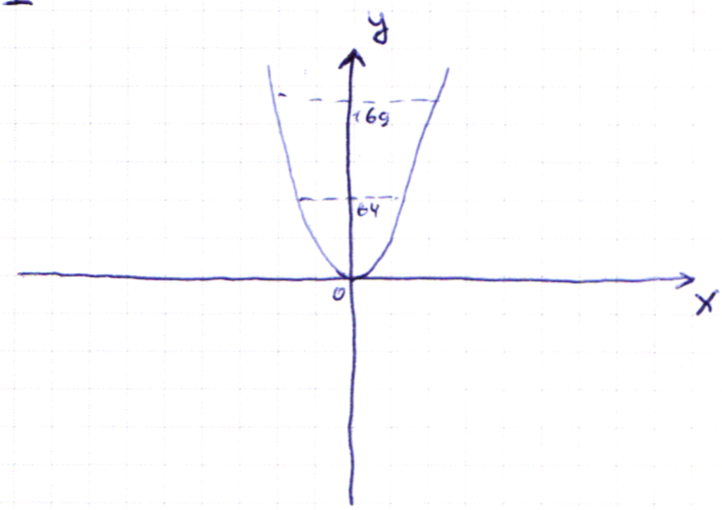
$\frac{7}{64}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

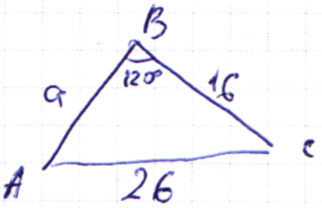


Заметим, что на $y=169$ и $y=64$ парабола высекает отрезки длинами 26 и 16 соответственно, т.к.

$x^2=169 \Rightarrow x=\pm13 \Rightarrow |13-(-13)|=26$, а $x^2=64 \Rightarrow x=\pm8 \Rightarrow |8-(-8)|=16$

Тогда угол 120° в треугольнике является наибольшим, ~~так~~ (т.к. сумма углов в треугольнике 180°), значит 120° находится, либо напротив a, либо напротив 26, рассмотрим оба случая (т.к. наибольший угол в треуг. лежит напротив наибольшей стороны, а $26>16$):

I



Запишем теорему косинусов:

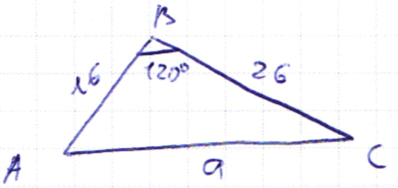
$26^2=16^2+a^2-2\cdot a\cdot16\cdot\cos120^\circ$

$676=256+a^2+16a \Rightarrow a^2+16a-420=0 \Rightarrow$

$D=16^2+4\cdot420=1936 \Rightarrow a=\frac{-16\pm44}{2}$ → $a=14$; → $a=-30$ не подходит, т.к. $a>0$

Теперь рассмотрим второй случай

II.



Запишем теор. косинусов:

$a^2 = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos 120°$

$a^2 = 256 + 676 + \cancel{2}^{4}16$

$a^2 = \cancel{1148}\ 1348$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} a = 2\sqrt{337} \\ a = -2\sqrt{337} \text{ (не подход. т.к. } a > 0) \end{array}\right.$

<u>Ответ</u>: $a = 14$, $a = 2\sqrt{337}$

№3

<u>I случ.</u>

Пусть шесть цифр „5" - это первые шесть цифр числа, тогда остается 12 мест на которых есть по два варианта $\Rightarrow 2^{12}$ вар.

<u>II случ</u>: А вариантов, когда одна цифра не используется всего 2.
$\Rightarrow 2^{12} - 2$ вар

Шесть цифр „5" стоят на ~~n~~ $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ местах в числе, где ~~$n \neq 1$~~, $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [2;11]$.

Тогда на первом месте ~~за~~ обязательно стоит „9", а на остальные 11 мест два варианта цифр $\Rightarrow$ 2^{11} вар., а вариантов расположения шести „5" ~~А вариантов когда одна из цифр не используется всего 20 (или все 9 или)~~ всего 10, т.к. $n \in \mathbb{Z}$, $n \in [2;11] \Rightarrow$ <u>Всего</u>: $2^{11} \cdot 10$ вар.

Сложим их с первым случаем и получим:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-055

ШИФР

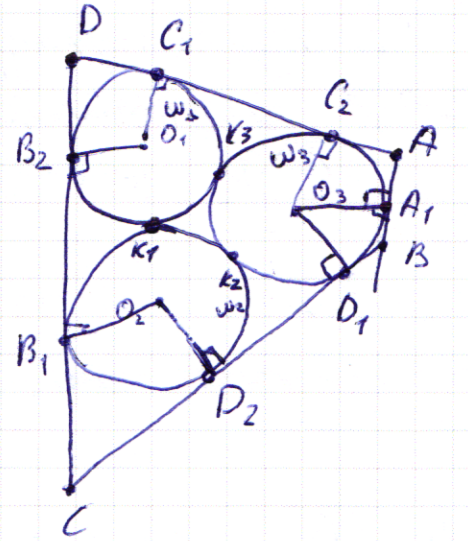
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2+12\cdot 2^{11}$ вар $= 24574$ вар, но во втором случае всеми цифрами, кроме „5" могут быть 9, сл-но, нам не подходят еще 10 случаев, для каждого по 1, т.к. 9 всегда присутствует. (1 место)

Ответ: ~~24574 вар.~~ 24 564 вар. 24564 ⟸

№4



а)

1) $B_2D = DC_1$, $C_2A = AA_1$, $A_1B = BD_1$, $D_2C = CB_1$ (по св-ву отрезков касательных, проведенных из одной точки)

2) $AD + BC - AB - CD = DC_1 + C_1C_2 + C_2A + BD_1 + D_1D_2 + D_2C - AA_1 - A_1B - DB_2 - B_2B_1 - B_1C = C_1C_2 + D_1D_2 - B_1B_2 = 10$

3) Заметим, что O_1O_3 проходит через $K_3 = 2R$, O_1O_2 через $K_1 = 2R$, O_2O_3 через $K_2 = 2R$ (т.к. радиусы окружностей, проведенных в точку касания оба перпендикулярны общей касательной). ~~Заметим, что~~ (кас. перпенд. радиусу, пров. в точку касания)

4) Заметим, что $O_1B_2 \perp DC$ и $O_2B_1 \perp DC$, так же $O_1B_2 = R_1 = O_2B_1 \Rightarrow O_1O_2 = B_1B_2$, ан-но, $O_1O_3 = C_1C_2$, $O_3O_2 = D_1D_2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

4) $C_1C_2 + D_1D_2 - B_1B_2 = O_1O_3 + O_2O_3 - O_1O_2 = 2R + 2R - 2R = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow \underline{R = 5}$

б)

1) Из прошлого пункта следует, что $\triangle O_2O_3O_1$ - р/б (по определению) $\Rightarrow \angle O_2O_3O_1 = 60^\circ$

2) $\triangle C_2O_3A = \triangle A_1O_3A$ (по катету ($C_2O_3 = O_3A_1 = 5$) и гипотенузе (O_3A - общ.), а $\angle O_3C_2A = \angle O_3A_1A = 90^\circ$ (кас. перпенд. радиусу, пров. в точку касания) $\Rightarrow \angle C_2O_3A = \angle A_1O_3A$, аналогично, $\angle A_1O_3B = \angle BO_3D_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AO_3B = AO_3A_1 + A_1O_3B = \frac{\angle C_2O_3D_1}{2} = \frac{360 - \angle O_2O_3O_1 - \angle C_2O_3O_1 - \angle D_1O_3O_2}{2} =$

$= 180 - 30 - 90 = \underline{60^\circ}$ (т.к. $\triangle O_3O_2D_2D_1$ - прямоугольник (прош. пункт.), $\triangle O_1O_3C_2C_1$ - тоже прямоугольник).

в)

1) $S_{AO_3B} = \frac{O_3A_1 \cdot AB}{2} = \frac{AO_3 \cdot O_3B}{2} \cdot \sin\angle AO_3B \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{AO_3 \cdot O_3B \cdot \sin\angle AO_3B}{A_1O_3} = \frac{42}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{21\sqrt{3}}{5}}$

Ответ: 5; 60°, $\frac{21\sqrt{3}}{5}$

N 5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ: $\sqrt{x+3} - x > 0 \Rightarrow x \in (-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$

$x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

$\Rightarrow x \in (-3; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3} - x \leq x+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \leq 4x^2+25+20x \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x \geq -2,5 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases}$

Решим второе ур-ние сис-мы.

$4(x+2)(x+2,75) \geq 0$

$\Downarrow$

$x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty)$.

$\Downarrow$ Учитывая первое

$x \in [-2; +\infty)$

$\Downarrow$ Учитывая ОДЗ:

$x \in [-2; 1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Ответ: $x \in [-2; 1) \cup \left(1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{\cos 4x - \cos 14x}{2} - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cos^2 2x - \cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= 2\cos^2 x - 1 - 1 - \cos^2 x - 3 = \cos^2 x - 5$, т.к. ~~cos x~~

$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos^2 x \le 1 \Rightarrow -5 \le \cos^2 x - 5 \le -4 \Rightarrow$

Ответ: $\overset{\text{мин. знач.}}{-5} \le g(x) \le -4^{\text{— макс. знач.}}$; мин. знач. $= -5$; макс. знач. $= -4$

В решении использовались формулы:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = -\dfrac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$

№7

Пронумеруем числа в каждом наборе от наименьшего к наибольшему, у нас получается пять наборов с числами, пронумерованными от одного до 35. Заметим, что числа с одинаковыми номерами имеют одинаковые остатки от деления на 35, а сл-но, их разность будет кратна 35, причем, если числа имеют различные остатки, то их разность $\not\vdots$ 35, значит Тимофей просто выбирал все числа с разными номерами. Пусть он выбрал числа с номерами $a_1, a_2, a_3 \dots a_5$ из первого набора, $a_6, a_7 \dots a_{10}$ из второго.... a_{21}, a_{22}, a_{23} a_{25} из последнего. Тогда получается, что сумма выбранных им чисел равна: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 35 + a_6 + 35 + a_7 \dots + 35 + a_{10} + 70 + a_{11} \dots + 70 + a_{15} + 105 + a_{16} \dots + 105 + a_{20} + 140 + a_{21} + \dots + 140 + a_{25} = 1750 + \sum_{i=1}^{25} a_i$. Заметим, что наименьшее

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-055

ШИФР

(заполняется секретарём)

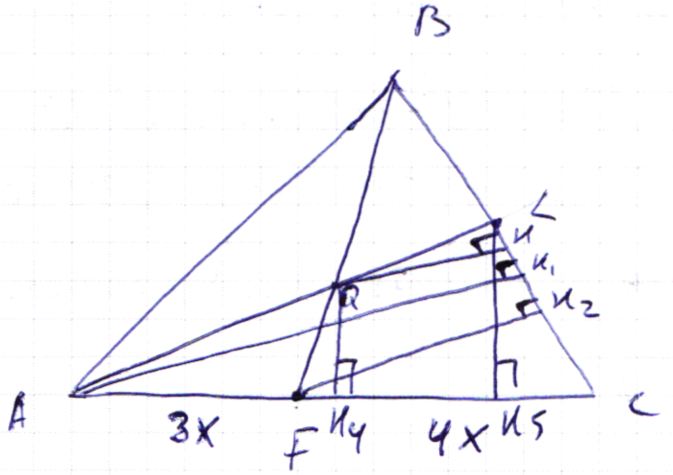
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сумма 25 различных номеров от 1 до 35, равна сумме 25 различных наименьших 25 чисел (натуральных) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{25} a_i = \sum_{i=1}^{25} i$ (т.к., если мы возьмем любой другой набор, то чисел, то их сумма будет больше) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{25} i = \frac{26 \cdot 25}{2} = 325 \Rightarrow A$ значит сумма чисел, выбранных Пиночкой не больше, чем $1750 + 325 =$
$= 2075$

Ответ: 2075

N6



1) Заметим, что $\frac{S_{BFC}}{S_{BAC}} = \frac{4}{7}$, т.к. высота у треуг.-ва та же, а $\frac{FC}{AC} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{S_{BFC}}{S_{BQL}} = \frac{64}{7} = \frac{BC \cdot FK_2}{BL \cdot QK}$

2) $\triangle FK_2C \sim \triangle AK_1C$ (по острому углу) $\Rightarrow$
(∠FCK₂ - общ.)

$\Rightarrow AK_1 = FK_2 \cdot \frac{AC}{FC} = \frac{7}{4} FK_2$

3) $\cancel{S_B}$ $\frac{64}{7} = \frac{BC \cdot AH_1}{BL \cdot QH} \cdot \frac{4}{7}$

4) $\triangle QLH \sim \triangle ALH_1$ (по острому углу $\angle QLH$ - общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AH_1}{QH} = \frac{AL}{QL}$

5) $\frac{BC}{BL} \cdot \frac{AL}{QL} = 16 \Rightarrow \cancel{BL}\ \frac{BC}{BL} = 16 \frac{QL}{AL}$

6) Запишем теорему Менелая для треуг. CFB и секущей AL:

$\frac{CF}{AF} \cdot \frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = 1$

$\frac{AQ}{QL} \cdot \frac{BL}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC}{BL} = \frac{4AQ}{3QL}$

7) $12QL^2 = AQ \cdot AL$, заметим, что $QL = AL - AQ$

$12(AL - AQ)^2 = AQ \cdot AL \Rightarrow 12AL^2 - 24AL \cdot AQ + 12AQ^2 = AQ \cdot AL \Rightarrow 12\frac{AL^2}{AQ^2} - 25\frac{AL}{AQ} + 12 = 0$

8) $\triangle QAH_4 \sim \triangle LAH_5$ (по острому углу ($\angle QAH_4$ - общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{QH_4}{LH_5} = \frac{AQ}{AL}$, а мы знаем, что $QH_4 = 9$ (по условию) $\Rightarrow$

$\frac{LH_5}{9} = \cancel{\frac{AQ}{AL}}\ \frac{AL}{AQ}$

9) $12 \cdot \left(\frac{LH_5}{9}\right)^2 - 25 \cdot \frac{LH_5}{9} + 12 = 0$

$\frac{LH_5}{9} = \frac{25 \pm \sqrt{89}}{24}$. Ясно, что вариант с минусом нам не подходит, т.к. $LH_5 > QH_4 \Rightarrow LH_5 = \frac{75 + 3\sqrt{89}}{8}$

Ответ: $\frac{75 + 3\sqrt{89}}{8}$