

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

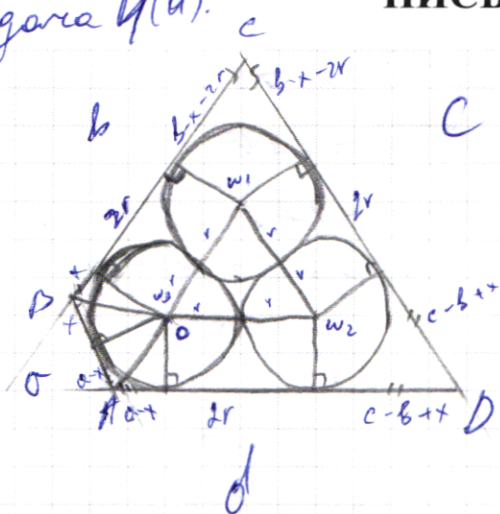
11-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4(a).



$AB = a$
 $BC = b$
 $CD = c$
 $DA = d$

Дано

$$d + b = 10 + c + a$$

Решение

а)

$$d - (a + x) - (c - b + x) = 2r$$

$$d - a + x - c + b - x = 2r$$

$$d - c + b - a = 2r$$

$$d + b - a - c = 2r$$

т.к.

$$d + b = 10 + a + c$$

$$d + b - a - c = 10$$

значит:

$$2r = 10$$

$$r = 5$$

Задача 5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$(2x+5)^2 \geq (\sqrt{x+3})^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x + 3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

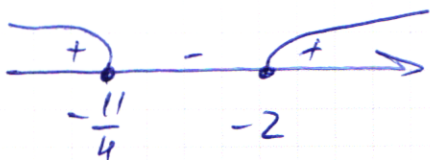
$$4x^2 + 19x + 22 = 0$$

$$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 9$$

$$x_1 = \frac{-19-3}{2 \cdot 4} = \frac{-22}{8} = -\frac{11}{4}$$

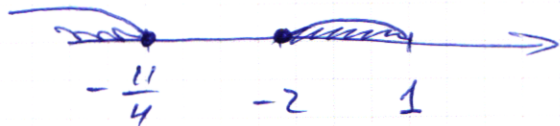
$$x_2 = \frac{-19+3}{2 \cdot 4} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$(x+2)\left(x+\frac{11}{4}\right) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [-2; +\infty)$$

а, теперь объединим ответы с ОДЗ:



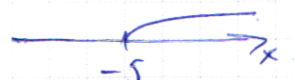
Ответ этой задачи будет:

$$x \in [-2; 1)$$

ОДЗ:

$$1) \quad x+5 > 0$$

$$x > -5$$



$$x \in (-5; +\infty)$$

$$2) \quad \sqrt{x+3}-x \geq 1$$

$$\sqrt{x+3} \geq 1+x$$

$$x+3 \geq 1+2x+x^2$$

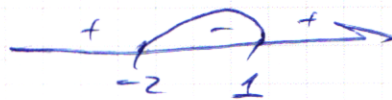
$$x^2+x-2 \leq 0$$

$$D = 1+8=9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

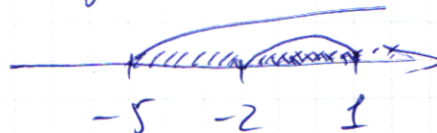
$$x_2 = -2$$

$$(x-1)(x+2) \leq 0$$



$$x \in (-2; 1)$$

Объединим ОДЗ 1 и 2



$$\text{НО} \neq \text{ОДЗ}; \quad x \in (-2; 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$= \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - 1 + \sin^2 x - 3$$

~~$$g'(x) = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin^2 7x)' + (\sin^2 x)' = 0$$~~

$$= \sin 5x \sin 9x - (\sin^2 7x - \sin^2 x) - 4 =$$

$$= \sin 5x \cdot \sin 9x - (\sin 7x + \sin x)(\sin 7x - \sin x) - 4$$

$$(25+x^2)(25+(a-x)^2) = 42$$

10 9,555,555,234,68 ММ.

$$\frac{(25+x^2)}{25+(a-x)^2} = \frac{42}{25+x^2}$$

1 555555,09.

$$a^2 = (25+x^2) + (25+(a-x)^2) - 2\sqrt{(25+x^2)(25+(a-x)^2)} \cos 2$$

$$a^2 = 25+x^2+25+x^2-2ax+x^2 - 2\sqrt{(25+x^2)(25+(a-x)^2)} \cos 2$$

$$2ax - 50 - 2x^2 = -2\sqrt{(25+x^2)(25+(a-x)^2)} \cos 2$$

$$x^2 - ax - 25 = \sqrt{(25+x^2)(25+(a-x)^2)} \cos 2$$

$$(x^2 - ax - 25)^2 = (25+x^2)(25+(a-x)^2) \cos^2 2$$

$$(x^2 - ax - 25)(x^2 - ax - 25) = x^4 - ax^3 - 25x^2 - ax^3 + a^2x^2 + 25ax - 25x^2 +$$

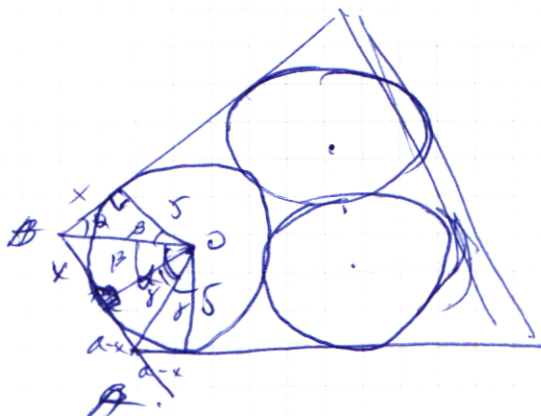
$$+ 25ax + 625 = x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + 50ax - 50x^2 + 625$$

$$(25+x^2)(25+a^2 - 2ax + x^2) = 625 + 25a^2 - 50ax + 25x^2 +$$

$$+ 25x^2 + x^2a^2 - 2ax^3 + x^4 = x^4 + 50x^2 - 50ax + 25a^2 + x^2a^2 - 2ax^3 + 625$$

$$\begin{aligned}
 & \cancel{x^4} + 50x^2 - 50ax + 25a^2 + \cancel{x^2 a^2} - \cancel{2ax^3} + \cancel{6a^2x} = \cancel{x^4} - \cancel{2ax^3} + \cancel{a^2x^2} + 50ax - \\
 & - 50a^2 + 6a^2
 \end{aligned}$$

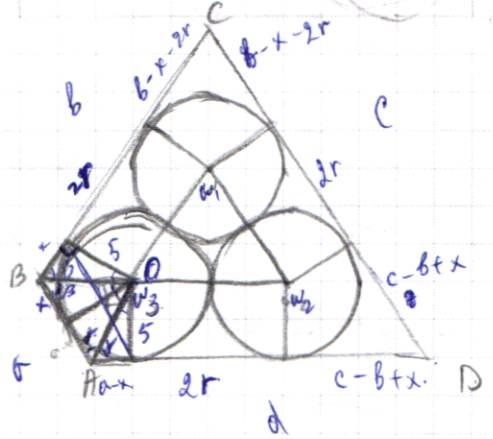
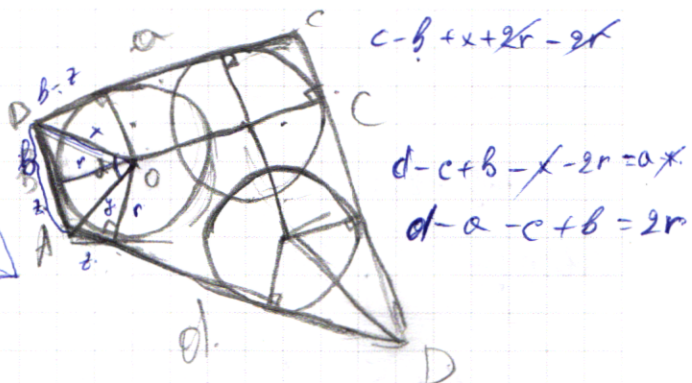
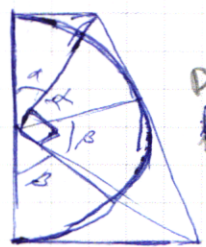
$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$$AD + BC = 10 + AB + CD$$



$$xy = 42$$

$$x = \frac{42}{y}$$

$$x^2 + y^2 = 2r^2$$

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot xy \cdot \cos B$$

$$AB = a$$

$$BC = b$$

$$CD = c$$

$$AD = d$$

$$BO = x \quad \frac{x}{\sin B} = \frac{y}{\sin A}$$

$$AO = y$$

По формуле окружность вписанная в четырёхугольнике и сумма противоположных сторон четырёхугольника равны.

$$b + d = a + c$$

по заданию.

$$d + b = 10 + c + a$$

$$d + b - c - a = 10 = 2r$$

$$10 = 2r$$

$$r = 5$$

$$\frac{x}{\sin B} = \frac{y}{\sin A}$$

$$25 + x^2 = OB^2$$

$$25 + (a-x)^2 = AO^2$$

$$(25 + x^2)(25 + (a-x)^2) = (AO \cdot BO)^2$$

$$BO = x$$

$$AO = y$$

$$\frac{5}{\sin B} = \frac{x}{\sin A}$$

$$x = \frac{5 \sin A}{\sin B}$$

$$\frac{x}{\sin B} = \frac{y}{\sin A}$$

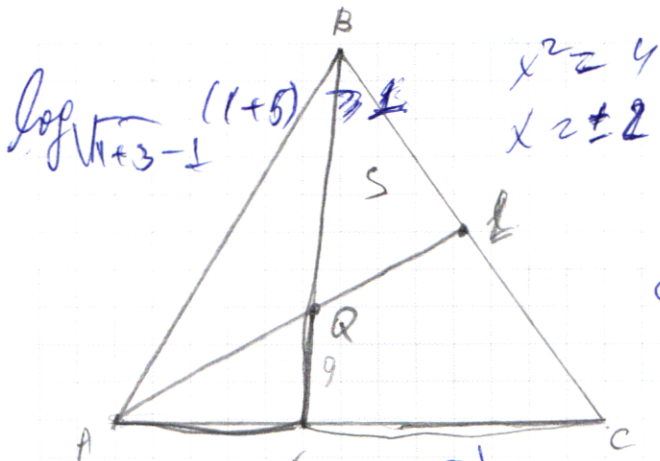
$$\frac{5}{\sin B} \cdot \sin B = \frac{5}{\sin A} \cdot \sin A$$

$$\frac{5}{\sin B} = \frac{y}{\sin A}$$

$$y = \frac{5 \sin A}{\sin B}$$

$$\frac{42}{y} = \frac{5}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{5y}{42}$$



$\log_{\sqrt{x+3}-1} (1+5) \geq 1$

$x^2 = 4$
 $x^2 \neq 2$

$\log_5 a = \dots$
 $\log_{10} = 1$
 $\log_{100} = 2$
 $\log_2 = 100$
 $\log_5 25 = 22$

$\textcircled{2} \textcircled{023}$
 $\sqrt{x+3} - x \geq 1$
 $x^2 \geq 2x + 1$

$\begin{array}{r} 22 \\ 16 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \\ -352 \\ \hline 9 \end{array}$
---	---

$\textcircled{023} :$
 $\textcircled{1} x + 5 > 0$
 $x > -5$

$\begin{array}{r} 22 \\ 116 \\ \hline 132 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$
--	---

$\textcircled{3} 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-1} (x+5) \geq 1$

$x + 5 \geq (\sqrt{x+3} - x)$

$x + 5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$(2x+5)^2 \geq (\sqrt{x+3})^2$

$4x^2 + 20x + 25 \geq x + 3$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$(x + \frac{11}{4})(x + 2) \geq 0$



$x \in (-\infty; -\frac{11}{4}) \cup (-2; +\infty)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$x + 5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$2x + 5 \geq \sqrt{x+3}$

$4x^2 + 20x + 25 \geq x + 3$

$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$

$D = 19^2 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$

$x_1 = \frac{-19 - 3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$
 $x_2 = \frac{-19 + 3}{8} = -\frac{16}{8} = -2$

$\textcircled{023} \textcircled{2}$

$\sqrt{x+3} \geq 1+x$

$\sqrt{x+3} - x \geq 0$

$x+3 = 1+x^2$

$x + 3 \geq x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 \leq 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$

$(x-1)(x+2) \leq 0$



$x \in [-2; 1]$

$\textcircled{023} \Rightarrow 1$
 $\textcircled{023} \Rightarrow 2$

$x \in [2; 5]$