МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 1-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

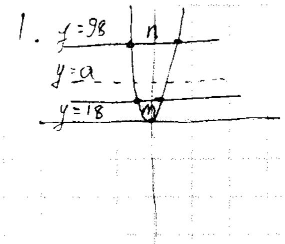
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-002

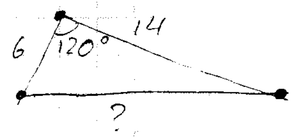
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. 

Пусть отрезок, отсекаемый $y=98$ будет n, тогда ~~n = n~~ $n = 2|x|$ в т. $2x^2 = 98 \Leftrightarrow$
$x^2 = 49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -7 \end{array}\right. \Rightarrow n = 14$

I 

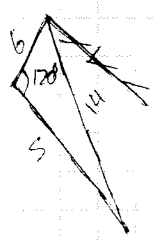
Пусть отрезок, отсекаемый $y=18$ будет m. найдём m:
$2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array}\right. \Rightarrow m = \cancel{x}\cdot|3|+|-3| = 6$

I Найдём третью сторону треугольника s по теореме косинусов:

$s = \sqrt{6^2 + 14^2 - 2\cdot 6\cdot 14\cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{79}$ т.к. $s = 2|x|$,

то $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{79} \\ x = -\sqrt{79} \end{array}\right. \Rightarrow y = 2x^2 \Leftrightarrow y = 2\cdot 79 \Leftrightarrow y = 158$.

значит $a = 158$

II 

Во втором случае $\sqrt{6^2 + s^2 - 2s\cdot 6\cos 120^\circ} = 14$
Решим уравнение:

$6^2 + s^2 - 12s\cdot\frac{1}{2} = 196$ $s > 0$, т.к. это сторона тр/ка

$s^2 - 6s + 36 - 196 = 0$

$s^2 - 6s - 160 = 0$

$D = 36 + 4\cdot 160 = 676$

$s_1 = \frac{6 + \sqrt{4\cdot 169}}{2} = 3 + 13 = 16$

$s_2 = \frac{6 - \sqrt{4\cdot 169}}{2} = 3 - 13$ не удовл. усл-ю, т.к. $s > 0$

Найдём a при $s = 16$, $x = \pm 8$

~~16 = 2~~ $y = 2\cdot 64$
$y = 128$

Ответ: $a = 158$, $a = 128$.

2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4 =$

$= \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x - \sin^2 5x + 5 = \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} -$

$- \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 - \cos 10x}{2} + 5 = \frac{\cos 4x - \cos 10x - 1 + \cos 2x - 1 + \cos 10x}{2} +$

$+ 5 = \frac{\cos 4x + \cos 2x - 2}{2} + 5 = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2}{2} + 5 =$

$\left(= \frac{2\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2}{2} + 5 = \frac{2\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x - 2}{2} + 5 \right)$

$= \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x + \cos 2x - 2}{2} + 5 = \frac{\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x + \cos 2x - 2}{2} + 5 =$

$= \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x - 3}{2} + 5$

Ответ:

$\max(g(x)) = \frac{1 \cdot 2 + 1 - 3}{2} + 5 = 5$

$\min(g(x)) = \frac{\cancel{2} - 1}{} = \frac{-3}{2} + 5 = 3,5$

3. Пусть набор из 7ми 8к это d. Тогда получим набор, состоящий из d и 10 семёрок или восьмёрок. Ответом будет сумма количеств перестановок d, умноженное на кол-во возможных вариантов (9 нулей и 1 семёрка, 8 нулей и 2 семёрки и т.д.) минус кол-во 17 значных чисел с ведущими нулями (когда нули впереди)

кол-во всех 17ти значных, включая те, что с ведущими 0ми $N = 9 \cdot 11!$

количество чисел, где 0 - ведущий:

$9 \cdot 10!$

Значит правильных чисел будет $9(11! - 10!) =$

$= 9 \cdot 10!(11 - 1) = 90 \cdot 10!$

Ответ: $90 \cdot 10!$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

ОДЗ:
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$$

$x \geq -1$
$x \geq -2$

① ②
$^{*}(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0$

*с помощью метода рационализации.

Найдём корни ①

$\sqrt{x+7} = x + 1$

$x + 7 = (x+1)^2$

$x^2 + x + 1 = x + 7$

$x^2 - 6 = 0$

$x = \pm\sqrt{6}$

Найдём корни ②

$2x + 4 = \sqrt{x+7}$

$x + 7 = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 + 15x + 9 = 0$

$D = 225 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 79$

$x = \frac{-15 - \sqrt{79}}{8}$

$x_2 = \frac{-15 + \sqrt{79}}{8}$

$$\begin{cases} (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})\left(x - \frac{-15-\sqrt{79}}{8}\right)\left(x - \frac{-15+\sqrt{79}}{8}\right) \geq 0 \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$$

$+ \quad \frac{-15-\sqrt{79}}{8} \quad - \quad -\sqrt{6} \quad + \quad \frac{-15+\sqrt{79}}{8} \quad -1 \quad - \quad \sqrt{6} \quad +$

Переходы есть в черновике.

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{6} \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x + 7 > x^2 \\ x > -4 \\ x + 7 \neq (x-1)^2 \\ x \geq \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right. \\ x \neq 2 \\ x \geq \sqrt{6} \end{cases}$$

$x^2 + x - 6 \neq 0$

$D_1 = 1 + 4 \cdot 7 = 29$

$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x &= \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{aligned}\right.$$

$D_2 = 1 + 4 \cdot 6 = 25$

$x = \frac{-1+5}{2} = 2$

$x = \frac{-1-5}{2} = -3$

Ответ: $x \in \left[\sqrt{6}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

7. Ответом должна стать сумма таких чисел, что разность остатков от деления на 45 $\neq 0$

Будем выбирать из начал числ. промежутков:

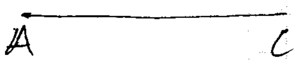
~~1...6; 52;~~ 1...6; 52...57; 103...108; 154...160; 205...211

$$\frac{(1+6)6}{2}+\frac{(52+57)6}{2}+\frac{(103+108)6}{2}+\frac{(154+160)6}{2}+\frac{(205+211)6}{2}=$$

$= 4171$

Ответ: 4171 - минимальная сумма.

6.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

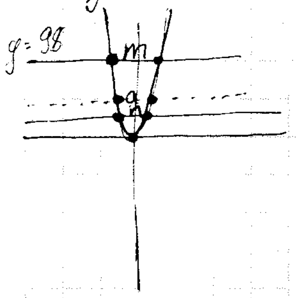
7-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1\. $y = 2x^2$ $\quad y=98 \quad y = 18 \quad y = a$



Сумма двух сторон всегда больше третьей =>

Пусть $y=98$ высекает отрlk n, $y = 18 - m$

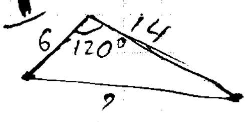
$a(y=a) - s$ =>

=> $n = 2x^2 = 98$

$x^2 = 49$

$x = +7 \quad x = -7 \Rightarrow n = 14$

I

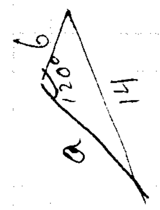


$2x^2 = 18$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$m = 6$

II



$s = \sqrt{6^2 + 14^2 - 2\cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos 120°}$

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$s = \sqrt{36 + 196 + 84} = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}$

$676 : 4 = 169$; $\; 14\cdot 14 = 196$; $\; 14 \cdot 6 = 84$; $\; 36 + 84 = 120$; $\; 196 + 120 = 316$; $\; 316 : 4 = 79$; $\; 79 \cdot 2 = 158$; $\; 64 \cdot 2 = 128$

$x = +\sqrt{79} \qquad x = -\sqrt{79}$

$y = 2\cdot 79 \qquad y = 158 \Rightarrow a = 158$

Ответ: $a = 158$.

2\. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{\cos(10x) - \cos 4x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{\cos 10x - \cos 4x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8}{2}$

~~$-(\sin x + \cos 5x)(\sin x - \cos 5x) + 4 + \sin 3x \sin 7x =$~~

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4 = \cancel{\sin 3x \sin 7x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\sin 10x + 5} =$

$= \sin 3x \sin 7x - \frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 10x) + 5 = \sin 3x\, \cancel{\sin 7x - \frac{1}{2}(2\sin 6x \cos 4x)} + 5 =$

$= \sin 3x \sin 7x - \cancel{\sin 6x \cos 4x + 5} = \sin 3x \sin 7x - 2\sin 3x$

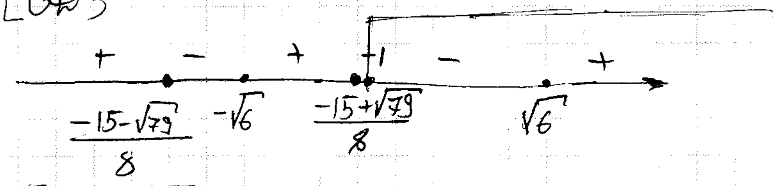
$\frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4 = \frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} -$

$- (\sin^2 x + \sin^2 5x) + 5 =$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})\left(x-\frac{-15-\sqrt{79}}{8}\right)\left(x-\frac{-15+\sqrt{79}}{8}\right) \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x \geq -2 \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$$



$x \geq \sqrt{6}$

$$\begin{cases} x \geq \sqrt{6} \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \Leftrightarrow$$

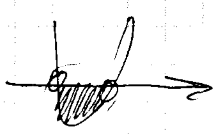
ОДЗ: $\cancel{x^2 < x+7}$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} > x \\ \sqrt{x+7} \neq x+1 \\ x > -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x+7 > x^2 \\ x > -4 \\ x+7 \neq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \\ x+7 \neq x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x^2+x-6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ x \neq 2 \\ \cancel{x \neq -3} \end{cases}$$

$D_1 = 1 + 4 \cdot 7 = 29$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$



$D_2 = 1 + 4 \cdot 6 = 25$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1+5}{2} = 2 \\ x = \frac{-1-5}{2} = -3 \end{array}\right.$$

~~Ответ: $x \in [0, 2)(2; \sqrt{6}$~~

$x \in \left[\sqrt{6}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

3\. Пусть набор из 7ми 8к это d.

тогда получим число, состоящее из d и 10 семёрок или восьмёрок.

Ответом будет сумма количества перестановок (d, одной семёрки, 9 нулей), (d, двух семёрок и 8 нулей) и т.д. ~~обозначим~~ минус все числа с ведущими нулями

Пусть n - кол-во перестановок d, "0" и 9ти 7к количество элементов 11, $n = 11!$

d 0 7 7 7 7 7 7 7 7 7 $\qquad N = 9n = 9 \cdot 11!$

d 0 0 7 7 7 7 7 7 7 7 $\qquad$ Ответ: $9 \cdot 11!$ -

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-СС2

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

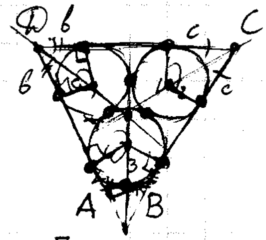
$(\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4)' =$

$= \frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} - \sin^2 x - \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} - \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3 =$

$= \cancel{\frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} + \cos^2 x + \cos^2 5x + 3}$

4.



$r - ?$ $AD + BC - AB - CD = 12$

~~ABCD - трапеция.~~

ABCD - трапеция: ~~т.к.~~

~~B $\triangle BCF$ B $\triangle ABF$~~

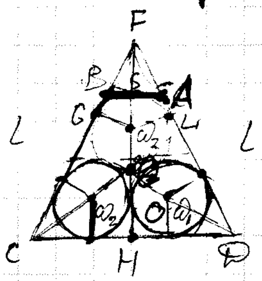
~~Пусть~~ ω_3 касается сторон BC и AD в т. G и L, а BA - в т. S

(1) $|BG| = |BS|$, $|AS| = |AL|$

т.к. BS и SA принадлежат BA, то чтобы выполнялось (1), $|BS|$ должен быть равен $|SA|$

ABCD - равнобокая трапеция

CFD - равнобедр. тр/к.



$F\omega_3 = D\omega_1 = C\omega_2$ - медианы, значит

~~CO~~ $CO = 2x$, $OH = x$

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0$
(1) (2)

найдём корни (1):

$\sqrt{x+7} = x + 1$ ОДЗ: $x + 1 \geq 0$, $x \geq -1$

$x + 7 = (x+1)^2$

$x^2 + x + 1 = x + 7$ $x = -\sqrt{6}$ - не вх. в ОДЗ.

$x^2 - 6 = 0$

$x = \pm\sqrt{6}$ => $x = \sqrt{6}$

найдём корни (2):

$2x + 4 = \sqrt{x+7}$ ОДЗ: $2x + 4 \geq 0$, $x \geq -2$

$x + 7 = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 + 15x + 9 = 0$

$D = 225 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 79$

$x_1 = \frac{-15 - \sqrt{79}}{8} \approx -2$

$x_2 = \frac{-15 + \sqrt{79}}{8} \approx -1$

$16 \cdot 9 = 146$, $225 - 146 = 79$

$64 < 79 < 81$, $\sqrt{79} \approx 9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9\cdot 11! - n_{10} - n_9 - n_8 - n_7 - n_6 - n_5 - n_4 - n_3$

$9\cdot 10! - 10! - 9! - 8! - 7! - 6! - 5! - 4! - 3!$

7. $[1;45]\ [46;90]\ [91;135]\ [136;180]\ [181;225]$

~~пусть выбраны числа а и в.~~ если а - в не делится на 45~~, то~~ ни а, ни в не делится на 45.

~~А так же сумма всех чисел не делит~~

ни а ни в не делится одновременно на 9 и на 4.

Значит ~~ответом будет~~ сумма 6ти минимальных чисел из каждого промежутка, не делящихся на 45.

из [1;45] это 1, 2, 3, 4, 5, 6

из [46;90] это ~~46, 47, 48, 49, 50, 51~~

из [91;135] ~~91, 92, 93, 94, 95, 96~~

из [136;180] ~~136, 137, 138, 139, 140, 141~~

из [181;225] 181, 1

ответом будет сумма из таких чисел, что разность остатков от деления на 45 $\neq 0$

Будем выбирать из начал промежутков.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 103, 104, 105, 106,

$R=6$ $R=12$

$57-45=12$

107, 108, 154 ... 160, 205 ... 211

$R=18$ $R=24$

$91+12=103$

$136+18=154$

$181+24=205$

$$\frac{(1+6)6}{2}+\frac{(52+57)6}{2}+\frac{(103+108)6}{2}+\frac{(154+160)6}{2}+\frac{(205+211)6}{2}$$

$7\cdot 3+109\cdot 3+211\cdot 3+314\cdot 3+416\cdot 3=$

$=21+327+633+942+1248=3190+960+21=4150+21=$

Ответ: 4171

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x$~~

~~$g(x) = \sin 3x \cdot 7x \quad 5$~~

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + 1 - \sin^2 5x + 4 =$

$= \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x - \sin^2 5x + 5 = \frac{\cos 10x - \cos 4x}{2} -$

$= \frac{-\cos 10x + \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{1 + \cos 10x}{2} + 5 =$

$= \frac{\cos 4x + \cos 10x - 1 + \cos 2x - 1 + \cos 10x}{2} + 5 = \frac{\cos 4x + \cos 2x - 2}{2} + 5 =$

$= \frac{\sin^2 2x - \cos^2}{} = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x + \cos^2 2x - 2}{2} + 5 =$

$= \frac{2\cos^2 2x - \sin^2 2x - 2}{2} + 5 = \frac{2\cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x}{2} + 5 = \frac{3\cos^2 2x - 1}{2} + 5$

Правильно

$\max(g(x)) = \frac{3-1}{2} + 5 = 6$

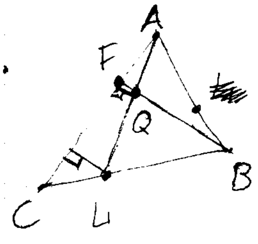
$\min(g(x)) = \frac{-3-1}{2} + 5 = -2 + 5 = 3$

~~$= \frac{\cos 4x - \cos 10x - 1 + \cos 2x - 1 - \cos 10x}{2}$~~ $+5$

$(0)^2 = -\frac{3}{2} + 5$

$(-1) = \frac{2 - 1 + 3}{2}$

6.



$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

$QH = 6$