

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

2-002

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

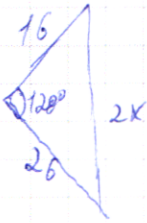


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1. y = x^2 \quad y = 169 \quad y = 264 \quad y = 29$$

$$(x_1 - x_2) = 26 \quad (x_1' - x_2') = 16$$

Треугольник с сторонами 16, 26,  $2x$  и с углом  $120^\circ$ . Поскольку  $26 > 16$ ,  $120^\circ$  находится напротив 26 или  $2x$ . Рассмотрим оба варианта

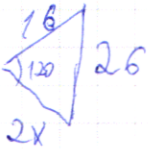


$$16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos 120 = 4x^2$$

$$4x^2 = 1348$$

$$x^2 = 337$$

$$a = y = x^2 = 337$$



$$16^2 + 4x^2 - 2 \cdot 16 \cdot 2x \cdot \cos 120 = 26^2$$

$$4x^2 + 32x = 420$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484$$

$$x = \frac{-8 + 22}{2} = 7$$

$$a = y = x^2 = 49$$

Ответ:  $a = 49$ ,  $a = 337$

$$2. g(x) = 2 \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = 5 \cos 5x \sin 9x + 9 \cos 9x \sin 5x - 14 \sin 7x \cos 7x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$5 \sin 14x - 7 \sin 14x + 4 \cos 9x \sin 5x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$4 \sin 5x \cos 9x + 2 \sin x \cos x - 2 \sin 14x = 0$$

$$-2 \cos 5x \sin 9x + 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\sin x \cos x = \sin 9x \cos 5x$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

$$g(x) = 2 \sin\left(2\pi k + \frac{\pi k}{2}\right) \cdot \sin\left(4\pi k + \frac{\pi k}{2}\right) - \sin^2\left(3\pi k + \frac{\pi k}{2}\right) - \cos^2 \frac{\pi k}{2} - 3 =$$

$$2 - \cos^2 \frac{\pi k}{2} - 3$$

ответ,  $g_{\max} = -3$      $g_{\min} = -4$

3. Можно цифры 5, идущие в ряд обозначить  $a$ -ами, тогда будет 13 мест, где можно будет заполнить  $a$  или  $a^2$ . Поскольку  $a$  можно заполнить 4 раз, то рассмотрим 2 варианта.

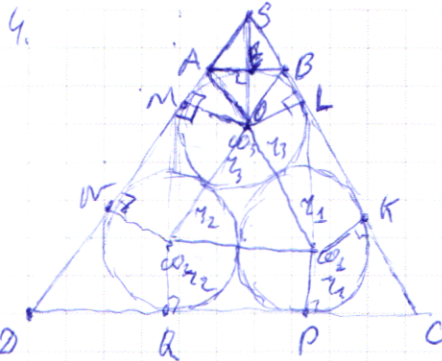
а в самом начале, тогда вариантов будет  $2^{12}$  (поскольку в остальных местах можно заполнить  $a$  и  $a^2$ )

В остальных случаях в начале должна быть девятка, потом в одном из 12 мест должна быть  $a$ , а в остальных местах  $a^2$  или  $a$ . Тогда будет  $12 \cdot 2^{11}$  вариантов.

Итого количество будет их сумма.

ответ,  $14 \cdot 2^{11}$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD + BC - AB - CD = AM + MN + DN + BC + LR + KL -$$

$$- AE - EB - DQ - QR - PC = 10$$

$$MN + LK - PQ = 10$$

$$\left( \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 10 \right)$$

$$\alpha_1$$

$$\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 10$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 5$$

обозначим  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$

Поскольку  $DN = DQ = PC = KC = SM = SL$ , а  $MN = LK = PQ = 2\alpha$ , то  
треугольник  $DEF$  равносторонний

$$SO = \frac{MO}{\sin 30^\circ} = 2\alpha = 10 \quad OE = 2\alpha = 5 \quad SE = 5 \quad \triangle ABS \sim \triangle SDC \rightarrow AS = BS = SA$$

$$AB \perp SO \rightarrow AO = OB = AS = BS \rightarrow \angle AOB = 60^\circ$$

$$AO \cdot OB = 42 \quad ?$$

Поскольку  $\triangle O_1 O_2 O_3$  равносторонний треугольник, а  $AC \parallel O_1 O_2$ ,  
 $AS \parallel O_2 O_3$ ,  $SC \parallel O_3 O_1$ , то  $\triangle ASC$  тоже равносторонний  
 $\angle ASO = 30^\circ \quad SO = 2MO = 10 \quad SE = EO = 5 \quad AB \perp SO \Rightarrow AO = OB = AS = BS = AS$

$$AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$AO \cdot OB = \frac{100}{3}$$

$$5. \log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 1 \\ x+5 \geq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x < 1 \\ x+5 \leq \sqrt{x+3}-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ \sqrt{x+3} \leq 2x+5 \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x+3 > x^2+2x+1 \\ x+3 \leq x^2+20x+25 \\ x \geq -2,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} < 1+x \\ 2x+5 \leq \sqrt{x+3} \\ 1+x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3 < x^2+2x+1 \\ x+3 \geq x^2+20x+25 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

$$x^2+x-2 < 0$$

$$4x^2+19x+22 \geq 0$$

$$x^2+x-2 > 0$$

$$4x^2+19x+22 \leq 0$$

$$D=9$$

$$D=9$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm 3}{8}$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$$

$$x \in \left[-\frac{22}{8}; -2\right]$$

$$x \in (-2; 1)$$

$$x \in \left[-\frac{22}{8}; -2\right]$$

$$x \in (-\infty; -\frac{22}{8}] \cup [-2; \infty)$$



$$x \in [-2; 1)$$

Ответ  $x \in [-2; 1)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Даны в ряд те числа, которые не могут повторяться, мы помечим.

1, 36, 71, 106, 141

2, 37, 72, 107, 142

...

35, 70, 105, 140, 175

Из каждой строки мы ~~два~~ можем выбрать только одно число. Поскольку сумма выбранных чисел должна быть минимальна, то мы должны выбрать числа из первых 25 строк.

Запишем числа по столбцам

1, 1+35, 1+70, 1+105, 1+140

2, 2+35, 2+70, 2+105, 2+140

...

25, 25+35, 25+70, 25+105, 25+140

Поскольку мы с каждого столбца должны выбрать 5 чисел, то будет 5 чисел, где они равны  $x$  ( $x=1, 2, \dots, 25$ ), затем  $x+35$  затем  $x+70$ , затем  $x+105$  и затем  $x+140$ .

Сумма всех  $x$ -ов будет  $1+2+\dots+25$  (поскольку с каждой строки можно выбрать 1 цифру), а сумма всех чисел

$$\text{будет } 1+2+\dots+25+5 \cdot 35+5 \cdot 70+5 \cdot 105+5 \cdot 140 = \frac{1+25}{2} \cdot 25 + 3 \cdot 350 =$$
$$= 1750 + 325 = 2075$$

Ответ 2075.



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{x+3} - x \leq 1 \quad x > -5$$

$$x > -3$$

$$\sqrt{x+3} - x \leq 1 \quad x+3 \leq x^2 \quad x^2$$

$$\sqrt{x+3} - x \leq 1 \quad x+3 > x^2$$

$$\sqrt{x+3} - x \leq x+5 \quad x^2 - x - 3 \leq 0$$

$$\sqrt{x+3} - x \leq x+5 \quad 2x+8 > 0$$

$$x \geq -4$$

$$2x+5 > 0$$

$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$x+3 \leq 4x^2 + 20x + 25$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$x \geq -\frac{5}{2}$$

$$4x^2 + 19x + 22 > 0$$

$$x^2 - x - 3 > 0$$

$$4x^2 + 19x + 22 > 0$$

$$x \geq -\frac{8}{3}$$

$$D = 361 - 88 = 273$$

$$D = 1 + 9 = 10$$

$$D = 361 - 88 = 273$$

$$\frac{88}{3 \cdot 2}$$

$$x \in \left[ -\frac{5}{2}; \frac{1-\sqrt{10}}{2} \right) \cup \left[ \frac{1+\sqrt{10}}{2}; \infty \right)$$

$$x \geq -10$$

$$\left[ -11; -8 \right] \left[ -\infty; -\frac{5}{2} \right]$$

36-51+22

$$x \in \left[ \frac{1-\sqrt{10}}{2}; \frac{1+\sqrt{10}}{2} \right]$$

$$x \geq 2,5$$

$$x \in \left[ -\frac{13 \pm 3}{2}; -8 \right] \cup \left[ -11; \infty \right)$$

$$x \in \left[ -\frac{5}{2}; \infty \right) \cup$$

$$x \in \left[ -\infty; -11 \right) \cup \left[ -8; \infty \right)$$

$$x \in \left[ -\frac{5}{2}; 1 \right]$$

$$\sqrt{x+3} - x > 1$$

$$\sqrt{x+3} > 1+x$$

$$x+3 > 0$$

$$\sqrt{x+3} \leq 1+x$$

$$x \leq -1$$

$$x+3 > x^2 + 2x + 1$$

$$x \geq -1$$

$$x \geq -1$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

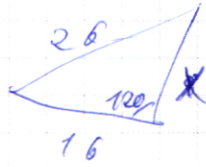
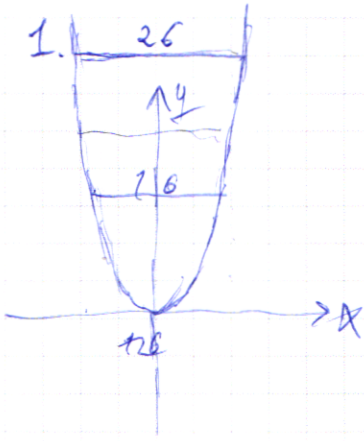
$$\left[ -1; 1 \right]$$

$$D = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = 1, -2$$

$$x \in \left[ -2; 1 \right]$$

$$x \in \left[ -3; 1 \right]$$



$$256 + a^2 + 2 \cdot 16 \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 2676$$

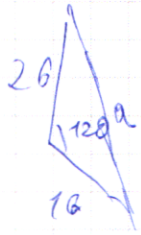
$$16a + a^2 = 2420$$

$$a^2 + 16a - 420 = 20$$

$$D = 256 + 1680 = 1936$$

$$2x = \frac{-16 + 44}{2} = 14$$

$$x = 7, a = 249$$



$$676 + 256 + 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2$$

$$932 + 416 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 1348$$

$$a = 36.7$$

105

$$\begin{array}{r} 1398 \ 4 \\ 12 \overline{) 6337} \\ \underline{14} \\ 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 520 \\ \hline 676 \\ - 256 \\ \hline 420 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 1840 \\ \hline 2116 \end{array} \quad \begin{array}{r} 44 \\ \times 44 \\ \hline 176 \\ 1760 \\ \hline 1936 \end{array}$$

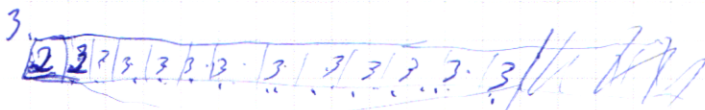
$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ 192 \\ \hline 256 \end{array}$$

4  
3

$$3\sqrt{6}x + \frac{\sqrt{6}x}{2}$$

$$\frac{5\sqrt{6}x}{2} = 2\sqrt{6}x + \frac{\sqrt{6}x}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{6}x}{2} = 2\sqrt{6}x + \frac{\sqrt{6}x}{2}$$



$$12 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 12 = 2 \cdot 12 \cdot 14$$

$$\sin^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x - 3 = 0$$

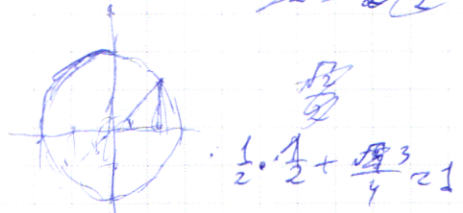
$$5 \cos 8x \cdot \sin 9x + 9 \cos 9x \cdot \sin 5x - 14 \cdot \sin 7x \cos 7x + 2 \cos x \sin x = 0$$

$$5 \cos 4x - 7 \sin 14x + \sin 2x + 4 \cos 8x \sin 5x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$5 \sin 14x - 7 \sin 14x + 4 \cos 9x \sin 5x + 2 \sin 2x = 0$$

$$4 \cos 9x \cdot \sin 5x + \sin 2x - 2 \sin 14x = 0$$



$$-2 \cos 5x \sin 9x + \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x = 2 \cos 5x \sin 9x$$

$$\sin x \cos x = 2 \cos 5x \sin 9x$$

$$x = \frac{\sqrt{6}x}{2}$$

$$4 \sin 14x = 4 \sin 5x \cos 9x +$$

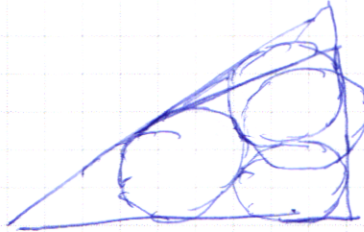
$$2 \sin 14x = 2,$$

$$\sin 2 - 3 = \sin 9x \cos 5x - \cos 9x \sin 5x$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$x, x+35$

$2, 8, 90$



1, 36, 71, 106, 141

2, 37, 72, 107, 142

3, 38, 73, 108, 143

4, 39, 74, 109, 144

5, 40, 75, 110, 145

6, 41, 76, 111, 146

7, 42, 77, 112, 147

8, 43, 78, 113, 148

9, 44, 79, 114, 149

10, 45, 80, 115, 150

1, 1+35, 1+70, 1+105

2, 2+35, 2+70, 2+105

$25+24+23+\dots \cdot x \cdot 20 = x \cdot 70 +$

$+x \cdot 108 + x \cdot 140$

$x + x \cdot 35 + x \cdot 70 + x \cdot 105 +$

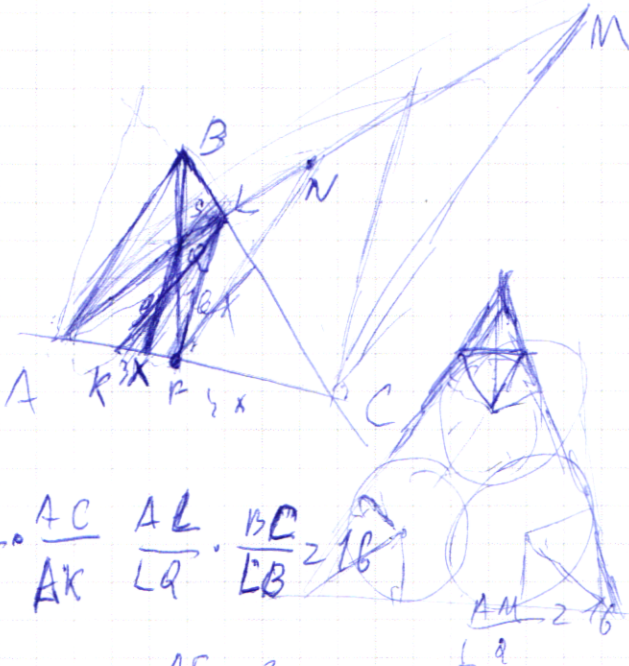
$+ x \cdot 140 = x(350)$

$x + 5 \cdot 35 + 5 \cdot 70 + 5 \cdot 105 +$

$+ 5 \cdot 140$

$5 \cdot 350 + x \cdot 21750 + x$

$25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$



$$\frac{AL}{LQ} \cdot \frac{AC}{AK} = \frac{AL}{LQ} \cdot \frac{BC}{LB} = 216$$

$$\frac{AF}{FC} = 2 \frac{3}{4}$$

$$\frac{AL}{LQ} \cdot \frac{AM}{ML} = 216$$

$$\frac{AM}{ML} = 216$$

$$LQ + AN = 23$$

$$AM = 7$$

$$\frac{LQ}{AM} = 2 \frac{1}{16}$$

$$\frac{AN}{AM} = 2 \frac{48}{7}$$

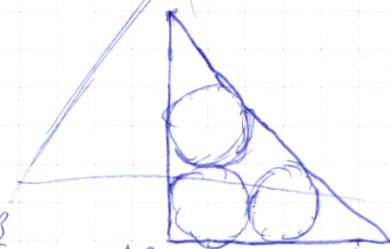
$$\frac{AN}{AM} = 2 \frac{48}{7} \Rightarrow r_3 = 5$$

$$20 + 7_3 + 7_2 + 2_3 + 7_1 - x_1 - 7_2 \Rightarrow r_3 = 5$$

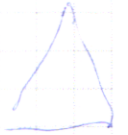
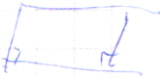
$$AM + MT + TD + MD + NK + KC - AM - AN - 2K - QL - KC$$

$$MT + NK - QL = 10$$

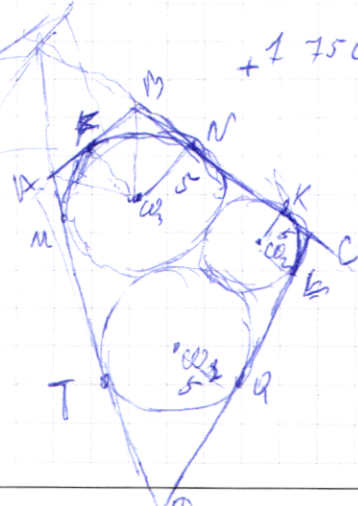
35, 70, 105, 140



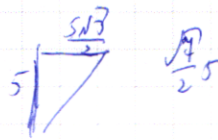
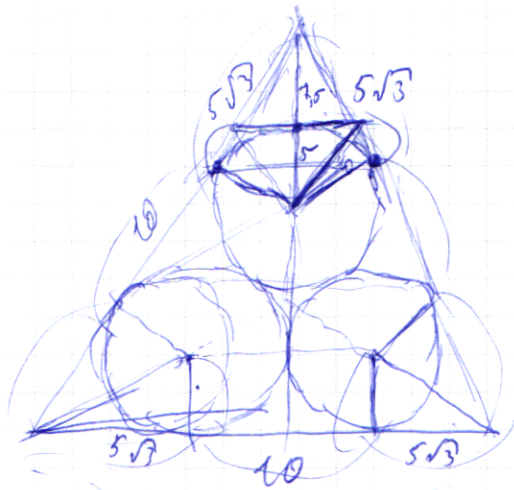
$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 25 \\ \hline 100 \\ + 65 \\ \hline 265 \\ \hline 325 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 25 \\ \hline 65 \\ + 65 \\ \hline 325 \end{array}$$



+ 1750



$$4(1+\sqrt{3})5\sqrt{3} = 5\sqrt{3} + 15$$