

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

11-025

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 98 \quad y = 2x^2$$

$$98 = 2x^2$$

$$18 = 2x^2$$

$$x = \pm 7$$

$$x = \pm 3$$

$$9 = 2x^2 = 18$$

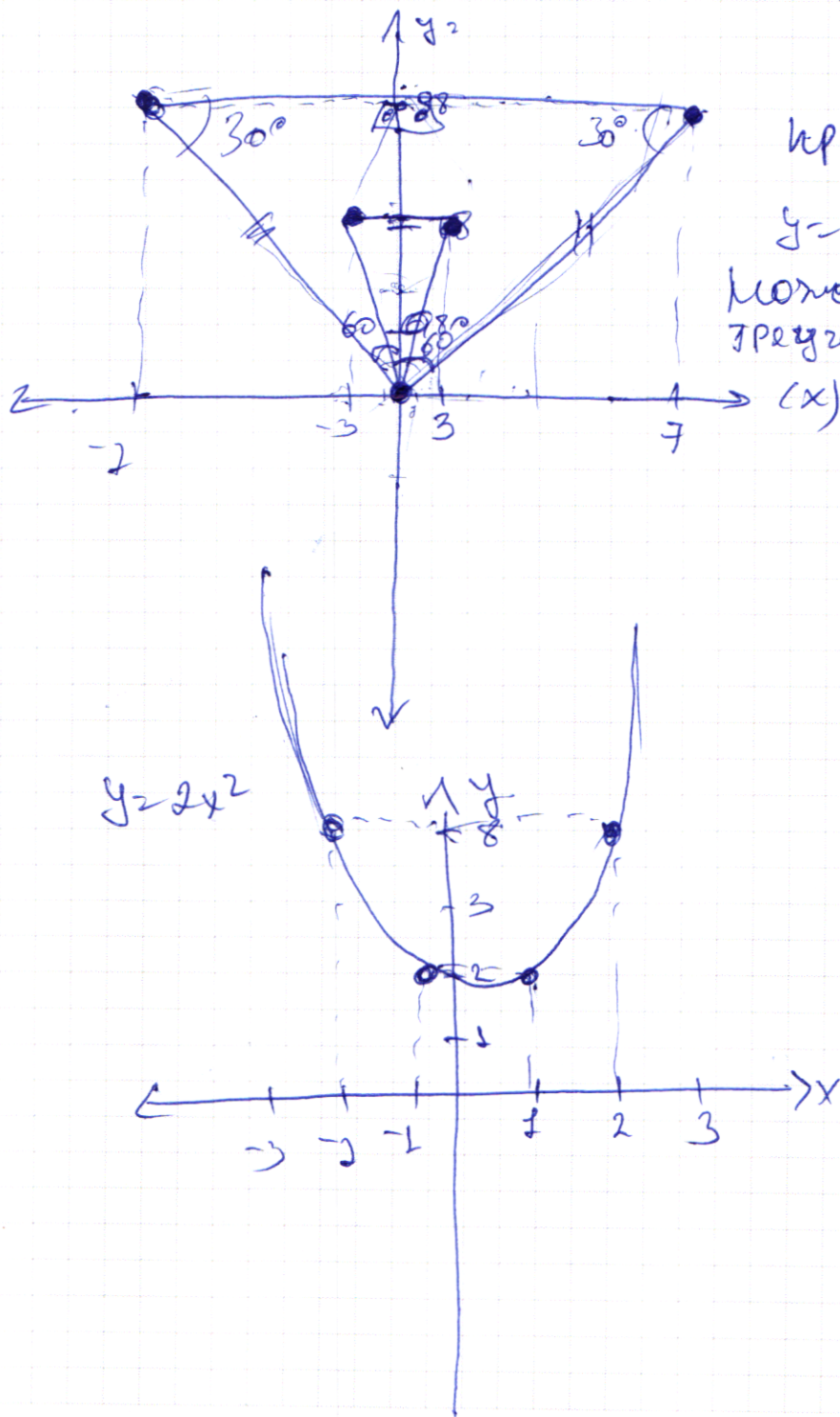
$$y = 2x^2$$

при $a = 0$

$$y = 0$$

Можно составить
треугольник со
сторонами 60°

1





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Б

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) > 1$$

~~$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) > 1 \Leftrightarrow \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)^{-1}$$~~

$$x+4 > \sqrt{x+7}-x$$

$$4x^2 + 16x + 9 > 0$$

$$2x+4 > \sqrt{x+7}$$

$$D = 16^2 - 16 \cdot 9$$

$$(2x+4)^2 > x+7$$

$$D = 225 - 144$$

$$4x^2 + 16x + 16 > x + 7$$

$$D = 81$$

$$4x^2 + 16x + 16 - x - 7 > 0$$

$$x_1 = \frac{-16 + \sqrt{81}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 + 9}{8} = -\frac{7}{8}$$

$$x_2 = \frac{-16 - \sqrt{81}}{8} = \frac{-16 - 9}{8} = -\frac{25}{8}$$

$$\boxed{x_1 > -\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{x_2 > -5}$$

ODZ

$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$x+7 > (1-x)^2$$

$$x+7 - 1 - 2x - x^2 > 0$$

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

$$D = 25$$

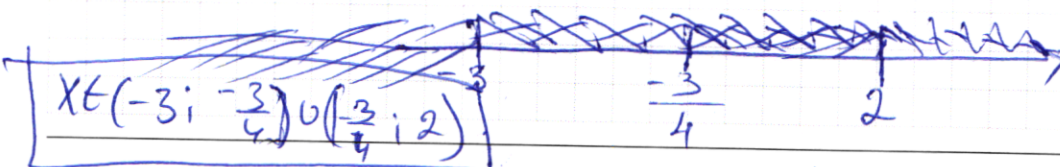
$$\boxed{x_1 > -\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{x_1 \leq 2}$$

$$\boxed{x_2 > -3}$$

$$\boxed{x_2 \leq -3}$$

$$x \leq 2$$

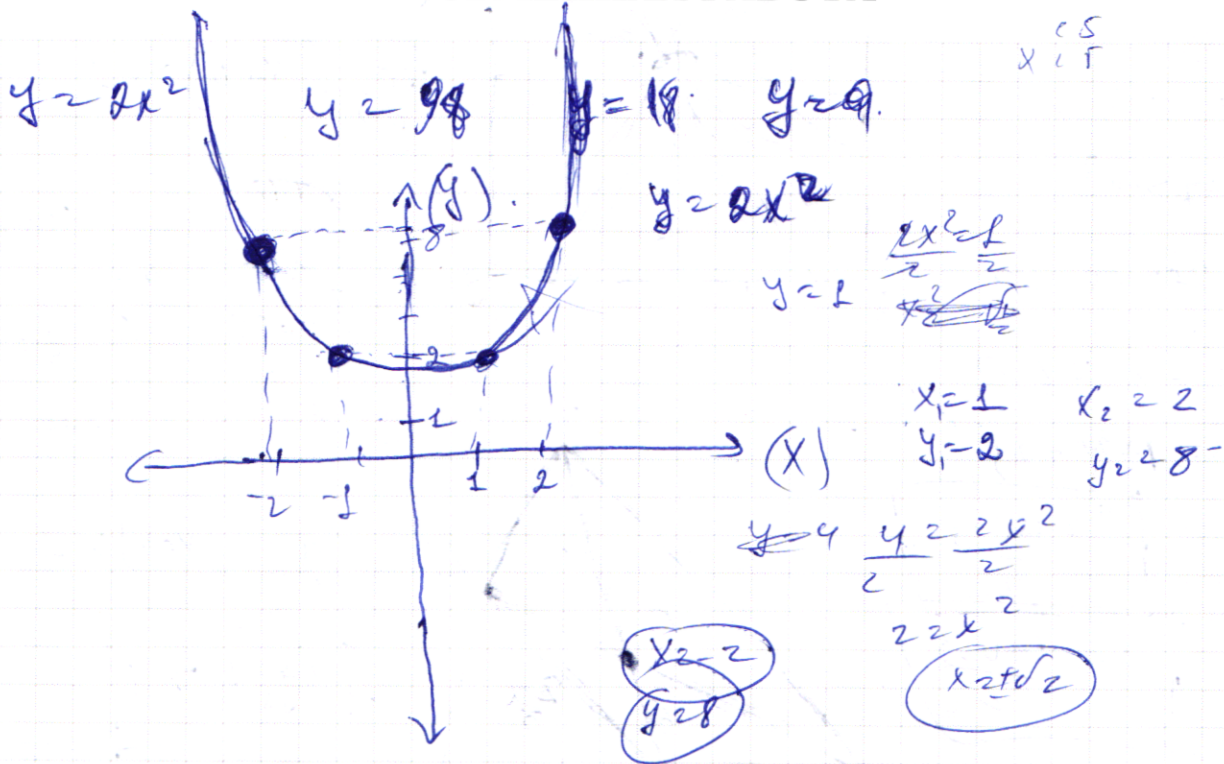




черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 11$

5. $\log_{\sqrt{x+7}}(x+4) \geq 1$

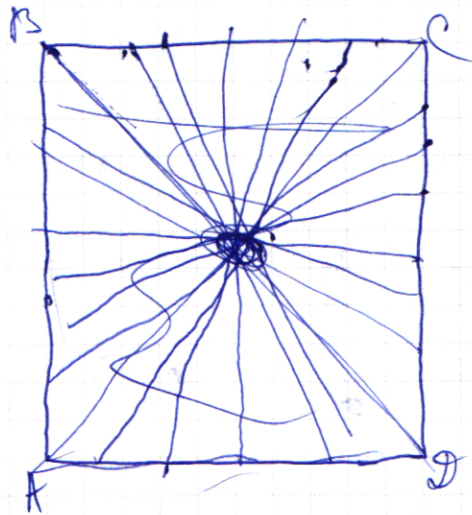
~~$\log_a b = c$~~

$$\begin{aligned} x+4 > 1, \sqrt{x+7} > 0 \\ (x+4) \geq (\sqrt{x+7})^2 \\ 4x^2 + 16x + 16 &= x+7 \\ 4x^2 + 15x + 9 &\geq 0 \\ D = 15^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 225 - 144 \\ D &= 81 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{-15 + \sqrt{81}}{8}$$

$$x_2 = \frac{-15 - \sqrt{81}}{8}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x+7 > x^2 \\ x^2 - x - 7 > 0 \\ D = 1 + 28 = 29 \\ D = 29 \\ x_1 = \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$



lg

$$\log_5(x+4) \geq 1$$

$$\sqrt{x+7} - x \geq 0$$

$$x+7 \geq x^2$$

$$x^2 - x - 7 \leq 0$$

$$x^2 - x - 7 \leq 0$$

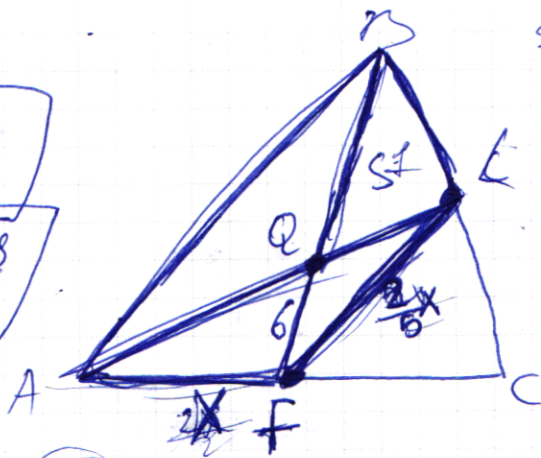
$$D = 1 + 28 = 29$$

$$\frac{x_1 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \log_5 3$$

$$\sqrt{-\frac{3}{4} + 7} + \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

SA BALU SA BAC = 5:12



$$\log_{13}(x+4) \geq 1$$

$$\log_5(x+4) \geq 1$$

$$-\frac{3}{3} + 4$$

$$\log_{13} \frac{13}{3} \geq \frac{13+16}{4}$$

$$5^x = 1$$

$$f(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$f(x) = \dots$$

$$\log_9$$

$$x \neq 9 \neq 0$$

$$x = -4$$



$$y = 288$$

$$\frac{88 = 2x^2}{2}$$

$$\frac{98/2}{8} = \frac{49}{8}$$

$$4^2 = 49$$

$$x^2 = 7$$

$$\frac{182 \pm 2x^2}{2}$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$x \in \left(-3; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 4 \right)$$

$$\log_5(x+4) \geq 1$$

$$x \in$$

$$x \in \left(-3; \frac{3}{4} \right)$$

$$x \in \left(-3; \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}; 4 \right)$$