МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 5-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

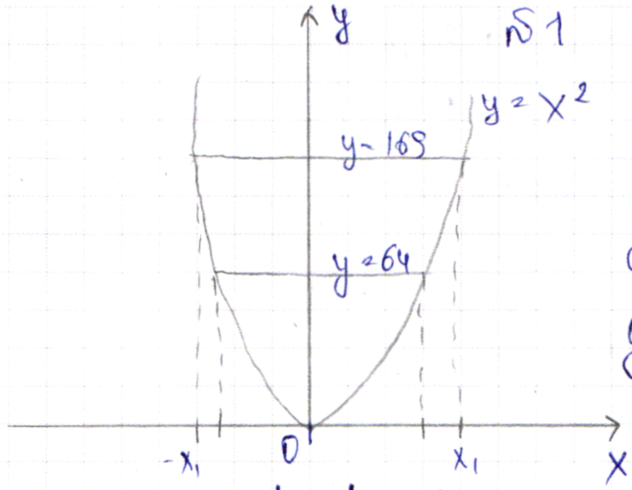
5-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



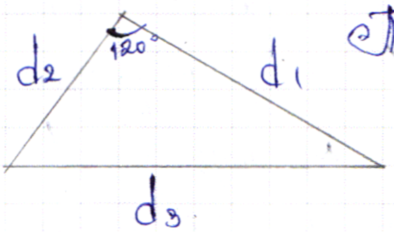
Пусть отрезок, высекаемый на прямое $y=169$ имеет длину d_1, на прямой $y=64$ имеет длину d_2, на $y=a$ – d_3.

Тогда $d_1=|2x_1|$, $y_1=x_1^2$, $x_1=\sqrt{y_1}=\sqrt{169}=13$, $d_1=2\cdot13=26$.

Аналогично $d_2=|2x_2|=2\sqrt{64}=2\cdot8=16$

Рассмотрим 3 случая расположения прямой $y=a$:

1) $y=a$ лежит выше, чем $y=169$, т.е. $a>169>64$, тогда $d_3>d_1>d_2$, d_3 – длина отрезка, высекаемого на прямой $y=a$. Т.к. $d_3>d_1>d_2$, то в сост. треугольнике d_3 – наиб. сторона и она лежит напротив угла $120°$.



Тогда по теореме косинусов:

$d_3^2=d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos120°$

$d_3^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos60°$ $(\cos60°=\frac{1}{2})$

$d_3^2=d_1^2+d_2^2+d_1d_2=$

$=26^2+16^2+26\cdot16=676+256+416=1348$

$d_3=\sqrt{1348}=2\sqrt{337}=|2x_3|=2\sqrt{a}$ $\Rightarrow a=337$

т.к. по условию $a>169>64$, то $a=337$ удовлетв. условию.

Ответ: $a=337$.

2) $y=a$ лежит между прямыми $y=169$ и $y=64$, т.е $169>a>64$, тогда $d_1>d_3>d_2$.

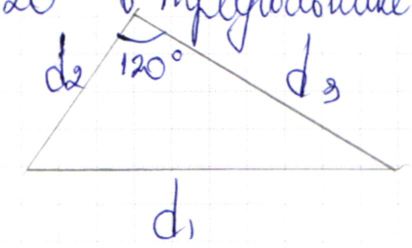
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

Т.к. d_1 - наиб. сторона, то она лежит напротив угла $120°$ в треугольнике:



по теореме косинусов:

$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2 - 2 d_3 d_2 \cos 120°$

$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2 + 2 d_3 d_2 \cos 60°$

$d_1^2 = d_2^2 + d_3^2 + d_3 d_2$

Тогда имеем квадратное уравнение отн-но d_3:

$d_3^2 + d_2 \cdot d_3 + d_2^2 - d_1^2 = 0$

$d_3^2 + 16 d_3 + (d_2 - d_1)(d_1 + d_2) = 0$

$d_3^2 + 16 d_3 - 10 \cdot 42 = 0$

$d_3^2 + 16 d_3 - 420 = 0$, $D > 0$

по теореме Виета: $d_3 = -30$ $d_{3_2} = 14$

- не уд. усл.

т.к. отрезок не может быть отрицательным, $d_3 = 14$

$d_3 = 2\sqrt{a} = 14$ $\sqrt{a} = 7$ $a = 49$

т.к. $169 > a > 64$, то $a = 49$ не уд. условию.

3) $169 > 64 > a$, т.е. $d_1 > d_2 > d_3$, d_1-наиб. сторона, тогда значение a, найденное в пункте 2 удовл. этому условию: $169 > 64 > 49$, $26 > 16 > 14$ (можно опираться на пункт 2, т.к. d_1 - наибольшая сторона треугольника в обоих случаях и теорема косинусов свой вид не поменяет.

Ответ: $a = 49$; $a = 337$.

№3

18значные числа, содержащие только "0", "5", "9";

~~5ти~~ 6 пятёрок, идущих подряд.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сначала рассмотрим сколькими способами можно поставить в число 6 пятёрок, идущих подряд:

* * * * * * * * * * * * * _ _ _ _ _

первая пятёрка может стоять на любой из выделенных позиций в числе. На пяти оставшихся позициях первая пятёрка стоять не может, т.к. тогда не будет 6 пятёрок подрят. т.е. всего способов 13.

Рассмотрим числа, у которых на первой позиции стоит не 5, тогда у них на первой позиции может стоять только цифра "9", потому что если на первом месте "0", то число перестаёт быть 18-значным, а на остальных позициях, не занятых "5" могут стоять и "0" и "9", всего таких чисел: $1 \cdot 1 \cdot 2^{11} \cdot \cancel{2^{12}} \cdot 12 = 12 \cdot 2^{11}$ (1сп 5 5 5 5 5 5 | 2 2 2сп 2сп 2сп 2сп; 1сп, сп, сп; 2 способа поставить число)

и таких чисел $2^{11} \cdot 12$, (*12, т.к. в 12 из 13 способов расставить "5" они занимают не первую позицию).

Если же "5" стоят на 1-6 местах, то всего таких чисел $1 \cdot 2^{12}$

Тогда всего чисел $12 \cdot 2^{11} + 2^{12} = 2^{11}(12+2) = 14 \cdot 2^{11} = 7 \cdot 2^{12} = 28672$

Для наглядности можно привести пример:

чтобы каждая цифра встречалась один раз хотя бы

1 сп

кол-во способов поставить цифру 0 или 5

$\boxed{}\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{12}$

$1\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{}\ 2 \ - 2^{11}$

$1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ \boxed{} \ - 2^{11}$

$\cancel{\sum = 2^{12} + 12\cdot 2^{11} = 7\cdot 2^{12} = 28672}$, ~~ответ сходится с алгебр. анализом.~~

~~Ответ: 28672.~~

Если же на первом месте стоит "5", то имеем $\boxed{5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5}$ - - - - - - - -

но т.к. каждая цифра должна встречаться хотя бы один раз, то хотя бы одну цифру можно выбрать одним способом, значит всего чисел $1\cdot 1\cdot 2^{11} = 2^{11}$

Тогда всего чисел: $13\cdot 2^{11} = 13\cdot 2048 = 26624$ (для наглядности приведен пример выше).

Ответ: 26624.

№2

$g(x) = \sin 5x\cdot\sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin(7x-2x)\cdot\sin(7x+2x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= (\sin 7x\cos 2x - \sin 2x\cos 7x)(\sin 7x\cos 2x + \sin 2x\cos 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= (\sin 7x\cos 2x)^2 - (\sin 2x\cos 7x)^2 - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin^2 7x\cos^2 2x - \sin^2 2x\cos^2 7x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin^2 7x(1-\sin^2 2x) - \sin^2 2x(1-\sin^2 7x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \cancel{\sin^2 7x} - \cancel{\sin^2 2x\sin^2 7x} - \sin^2 2x + \cancel{\sin^2 2x\sin^2 7x} - \cancel{\sin^2 7x} - \cos^2 x - 3 =$

$= -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = -4\sin^2 x\cos^2 x - \cos^2 x - 3 =$

$= -4(1-\cos^2 x)\cos^2 x - \cos^2 x - 3 = \cancel{-4+4\cos} - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x - \cos^2 x - 3 =$

$= 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = 4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3 = (2\cos^2 x)^2 - 2\cdot 2\cdot \frac{5}{4}\cos^2 x - 3 =$

$= (2\cos^2 x)^2 - 5\cos^2 x + \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - 3 = \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16}$

$-1 \le \cos x \le 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

$0 \le 2\cos^2 x \le 2$

$-\frac{5}{4} \le 2\cos^2 x - \frac{5}{4} \le \frac{3}{4}$

$0 \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 \le \frac{25}{16}$

$-\frac{73}{16} \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16} \le \frac{25-73}{16}$

$-\frac{73}{16} \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16} \le -\frac{48}{16}$

$-4\frac{9}{16} \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16} \le -3$

$g(x)_{наим} = -4\frac{9}{16}$

$g(x)_{наиб} = -3$

Ответ: $-4\frac{9}{16}$; -3.

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \ge 1$

Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 & (1) \\ \sqrt{x+3} - x \ne 1 & (2) \\ x+5 > 0 & (3) \end{cases}$$

Решим (1) неравенство

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sqrt{x+3}-x>0$

$\sqrt{x+3}>x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x+3\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x+3>x^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x\ge -3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-x-3<0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in[-3;0)\\ \begin{cases}x\ge 0\\ x\in\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2};\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in[-3;0)\\ x\in\left[0;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\end{array}\right.$$

$x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right).\ (1^*)$

Решим (2) неравенство:

$\sqrt{x+3}-x\neq 1$

$\sqrt{x+3}\neq 1+x$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1+x\ge 0\\ x+3\neq 1+x^2+2x\end{cases}\\ \begin{cases}1+x<0\\ x+3\ge 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cancel{x\ge 1}\ x\ge -1\\ x^2+x-2\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cancel{x\le 1}\ x\ge -1\\ x\neq -2\\ x\neq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x\ge -3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in[-1;1)\cup(1;+\infty)\\ x\in[-3;-1)\end{array}\right.$$

$x\in[-3;1)\cup(1;+\infty)\ (2^*)$

Решим (3) неравенство:

$x+5>0$

$x>-5\ (3^*)$

Совместим решения (1^*), (2^*), (3^*)

$$\begin{cases}x>-5\\ x\in\left[-3;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\in[-3;1)\cup(1;+\infty)\end{cases}$$

$x\in[-3;1)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ – ОДЗ.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-010
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим 2 случая:

1) $\sqrt{x+3}-x>1$ тогда $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq\log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\sqrt{x+3}>1+x$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1+x<0\\ x+3\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}1+x\geq 0\\ x+3>1+x^2+2x\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1\\ x\geq -3\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1\\ x^2+x-2<0\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x\in[-3;-1)\\ \begin{cases}x\geq -1\\ x\in(-2;1)\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x\in[-3;-1)\\ x\in[-1;1)\end{array}\right.$

$x\in[-3;1)$ (*)

удовл. ли ОДЗ: ОДЗ: $\begin{cases}x\in[-3;1)\cup\left(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)\\ x\in[-2;1)\end{cases}$

$x\in[-2;1)$

$x+5\geq\sqrt{x+3}-x$

$\sqrt{x+3}\leq 2x+5$

$\begin{cases}2x+5\geq 0\\ x+3\geq 0\\ x+3\leq 4x^2+25+20x\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq -2,5\\ x\geq -3\\ 4x^2+19x+22\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq -2,5\\ x\in\left(-\infty;-\frac{11}{4}\right]\cup[-2;+\infty)\end{cases}$

$x\in[-2;+\infty)$

Объединим с (*)

$\begin{cases}x\in[-3;1)\\ x\in[-2;+\infty)\end{cases}$

$x\in[-2;1)$ - проверим,

2) $0<\sqrt{x+3}-x<1$, то, что $0<\sqrt{x+3}-x$ учтено в ОДЗ

$\sqrt{x+3}-x<1$

$\sqrt{x+3}<1+x$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sqrt{x+3} < 1+x$

$$\begin{cases} 1+x>0 \\ x+3\geq 0 \\ x+3<1+x^2+2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ x\geq -3 \\ x^2+x-2>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty) \end{cases}$$

$x\in \cancel{(-1;} (1;+\infty)$ (**)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$x+5\leq \sqrt{x+3}-x$

$\sqrt{x+3}\geq 2x+5$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+5<0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+5\geq 0 \\ x+3\geq 4x^2+25+20x \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-2{,}5 \\ x\geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq -2{,}5 \\ 4x^2+19x+22\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in[-3;-2{,}5) \\ \begin{cases} x\geq -2{,}5 \\ x\in\left[-\frac{11}{4};-2\right] \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in[-3;-2{,}5) \\ x\in[-2{,}5;-2] \end{array}\right.$$

$x\in[-3;-2]$

Совместим с (**): $\begin{cases} x\in(1;+\infty) \\ x\in[-3;-2] \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x\in[-2;1)$

№6

$\triangle ABC$, $AF:FC=3:4$

$\dfrac{S_{\triangle BDL}}{S_{\triangle BAC}}=\dfrac{1}{16}$ $\quad d_1=9$

Найти: d.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

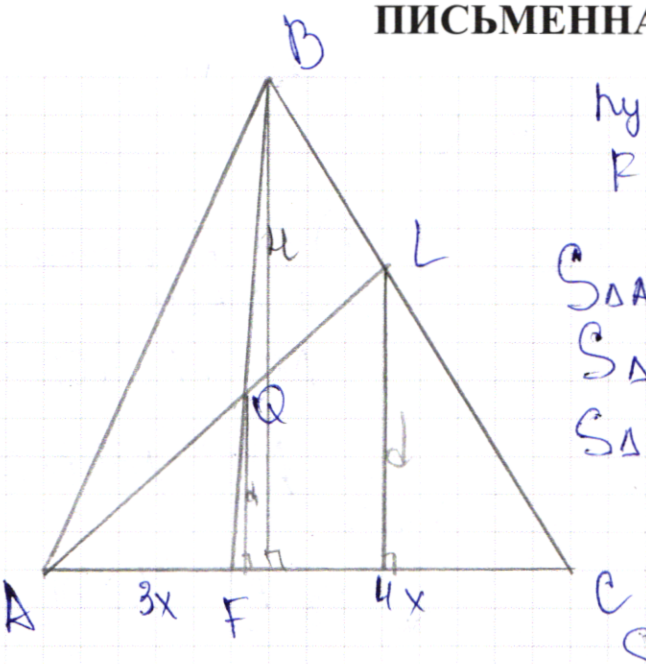
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5 - 010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



пусть $AF = 3x$

$FC = 4x$, тогда $AC = 7x$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} H \cdot 3x$

$S_{\Delta FBC} = \frac{1}{2} H \cdot 4x$

$S_{\Delta AQF} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 3x$

$S_{\Delta ALC} = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot d$

$S_{FQLC} = S_{\Delta ALC} - S_{\Delta AQF} =$

$= \frac{1}{2} 7x \cdot d - \frac{1}{2} h \cdot 3x = \frac{1}{2} x (7d - 27)$

$S_{\Delta BQL} = S_{\Delta BAC} - S_{\Delta ABF} - S_{\Delta ALC} + S_{\Delta AQF} =$

$= \frac{1}{2} H \cdot 7x - \frac{1}{2} H \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot d + \frac{1}{2} \cdot h \cdot 3x =$

$= \frac{1}{2} x (7H - 3H - 7d + 27) = \frac{1}{2} x (4H - 7d + 27)$

$\frac{S_{\Delta BQL}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{\frac{1}{2} x (4\cancel{x}H - 7d + 27)}{\frac{1}{2} H \cdot 7x} = \frac{1}{16}$

$16(4\cancel{x}H - 7d + 27) = 7H$

$16 \cdot 4\cancel{x}H - 16 \cdot 7d + 16 \cdot 27 = 7H$

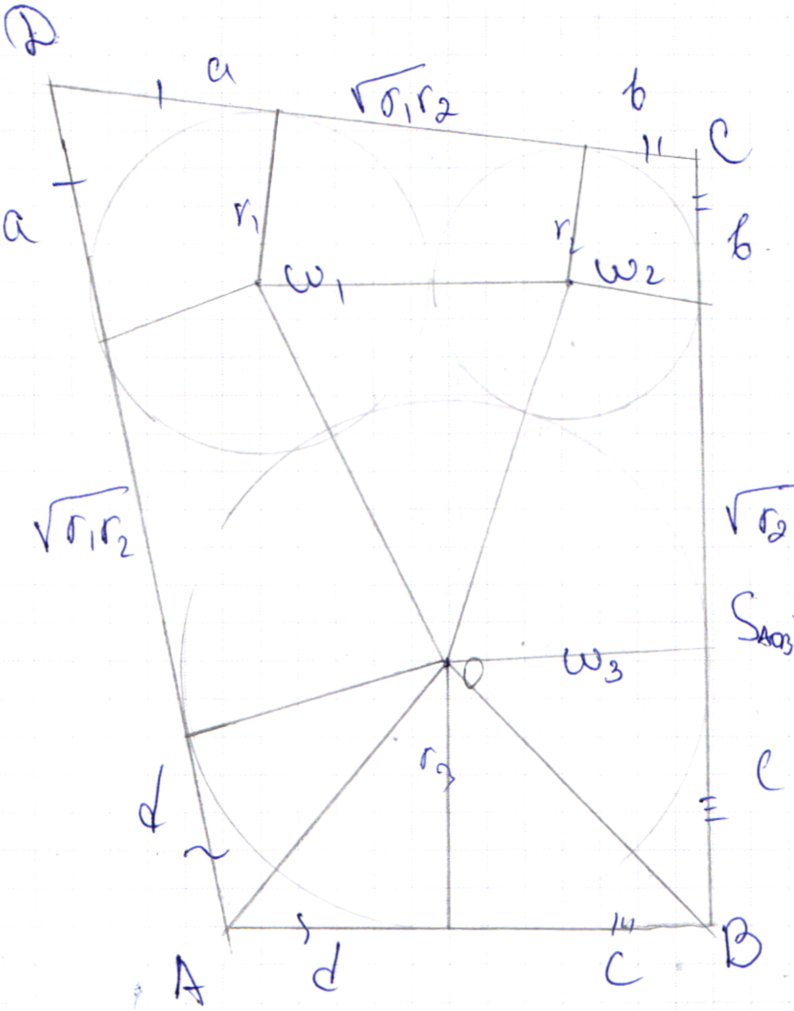
$16 \cdot 7d - 16 \cdot 27 = 57H$

$d = \frac{57H + 16 \cdot 27}{16 \cdot 7}$

№4 1) $AD+BC-AB-CD=10$

$d+\sqrt{r_1r_2}+a+b+\sqrt{r_2r_3}+c-$

$-d-c-a-b-\sqrt{r_1r_2}=10$



$\sqrt{r_1r_2}+\sqrt{r_2r_3}=10+\sqrt{r_1r_2}$

3) По т. косинусов для ΔAOB:

$AB^2=AO^2+OB^2-2AO\cdot OB\cdot\cos\angle O$

$AB^2=AO^2+OB^2-84\cos\angle O$

$S_{AOB}=\frac{r_3\cdot AB}{2}=\frac{AO\cdot OB\cdot\sin\angle O}{2}$

$AB=\frac{AO\cdot OB\cdot\sin\angle O}{r_3}=$

$=\frac{42\cdot\sin\angle O}{r_3}$.

№7

Числа, кратные 35: 35, 70, 105 140

пусть из 1 взято 1 3 5 7 9, 37 39 41 43 45, 71, 73 75 77 79, 107 109 111 113 115, 141, 143, 145, 147 149

$\sum=\overbrace{1+3+5+7+9}^{25}+\overbrace{37+39+41+43+45}^{205}+\overbrace{71+73+75+77+79}^{377}+\overbrace{107+109+111+113+115}^{551}=25+205+377+551+$

$+\cancel{23}\ 580+147=230+377+551+580+147=$

$=1885$

$$\begin{array}{r}551\\377\\580\\147\\\hline 1885\end{array}$$

Ответ: 1885

☐ черновик ☑ чистовик Страница №10

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2^{12}
1	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2	2 2 2 2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2	2 2 2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2	2 2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2	2 2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2 2	2 2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2 2 2	2 2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2 2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	2	2^{11}
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2		2^{11}

6 подряд

5

$12 \cdot 2^{11} + 2^{12}$ $\qquad$ $12 \cdot 2^{11} + 2^{12}$

$6 \cdot 2^{12} + 2^{12} = 7 \cdot 2^{12}$

1024×12: 2048, 642 (sic); $4096 \times 7 = 28672$

32 - 5
64 - 6
128 - 7
256 - 8
512 - 9
1024 - 10

1024×28: 8192, 2048, 28672

2048×13: 6144, 2048, 26624

5: $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -5 \\ \sqrt{x+3} \neq x+1 \\ \sqrt{x+3} > x \end{cases}$

$\sqrt{x+3} \neq x+1$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x+3 \neq x^2+1+2x \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+1 < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -1 \\ x \geq -3 \end{cases}$ $x \in [-3; -1)$

$\sqrt{x+3} > x$

$\begin{cases} x < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$ $x \geq -3$ $[-3; 0)$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases}$ $x^2 - x - 3 < 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$x \in \left[0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

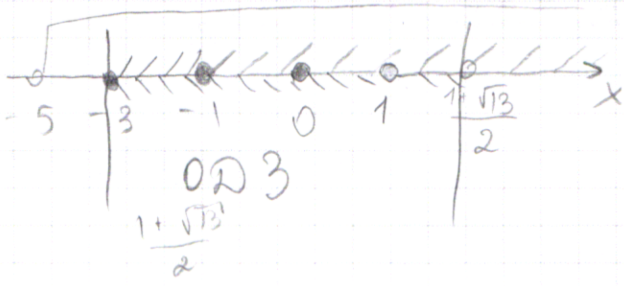
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ОДЗ: $\begin{cases} x > -5 \\ \left[\begin{array}{l} x \in [-3; -1) \\ \left[\begin{array}{l} x \geq -1 \\ x \neq 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} [-3; 0) \\ \left(0; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases}$



$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$ $x \in ($

1) $\sqrt{x+3} - x > \cancel{0}\ 1$

$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$\sqrt{x+3} \leq 2x+5$

$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \leq 4x^2+25+20x \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -2{,}5 \\ 4x^2+19x+22 \geq 0 \\ x \geq -3 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -2{,}5 \\ (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [2; +\infty) \end{cases}$ $-\frac{5}{2}$ $-\frac{10}{4}$

$x \in [2; +\infty)$

с уч. ОДЗ: $x \in \left[2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$19 \cdot 19 = 171$, 19, 361 $\quad 22 \cdot 16 = 132$, 22, 352 $\quad 361 - 352 = 9$

$88 = 8 \cdot 11$

$\sqrt{x+3} > x+1$

$\begin{cases} x+3 > x^2+1+2x \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+x-2 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases}$

$x \in (1; +\infty)$

$(-2; 1)$ $[-1; 1)$

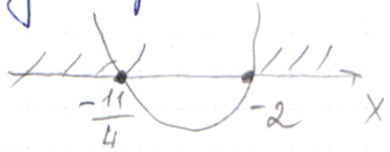
≥ -1

-19 $\quad 88$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$y = 4x^2+19x+22 \quad D(y) = \mathbb{R}$

$y = 0$ при $x = -2$ $\quad x = -\frac{11}{4}$



$x \in (-\infty; -\frac{11}{4}] \cup [2; +\infty)$

$[-1; 1)$ – реш. нет.

2) $0 < \sqrt{x+3} - x < 1$

$\sqrt{x+3} < x+1$

$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+3 < x^2+1+2x \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ x \geq -3 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -1 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases}$

$x \in (1; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+5 \le \sqrt{x+3} - x$

$2x+5 \le \sqrt{x+3}$

$\sqrt{x+3} \ge 2x+5$

$\begin{cases} 2x+5<0 \\ x+3\ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 2x+5\ge 0 \\ x+3 \ge 4x^2+25+20x \end{cases}$

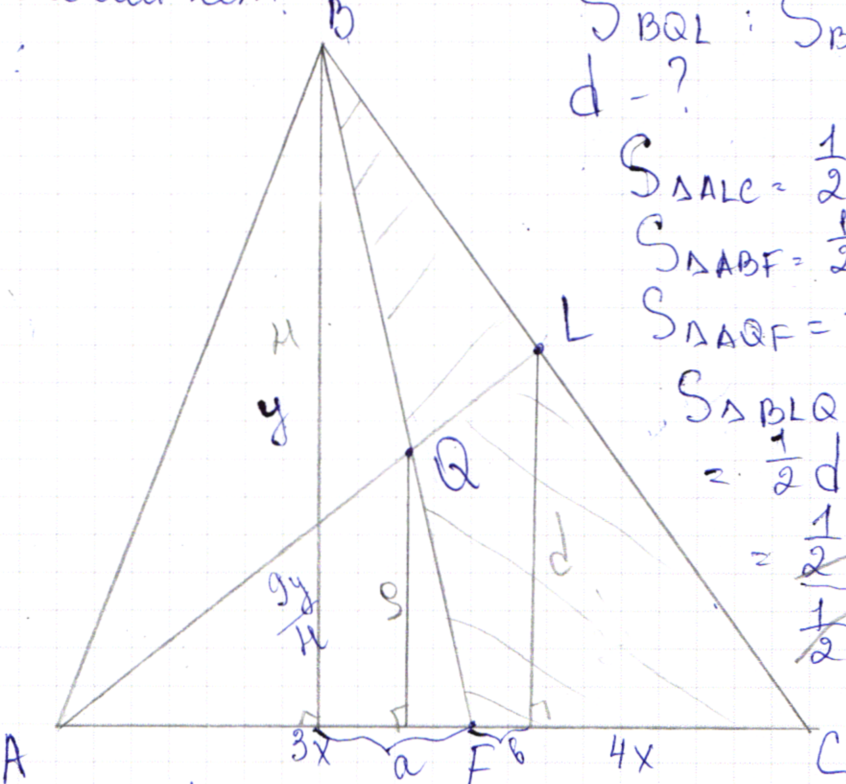
$\begin{cases} x<-2{,}5 \\ x\ge -3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x\ge -2{,}5 \\ 4x^2+19x+22\le 0 \end{cases}$

$x\in[-3;-2{,}5)$ $\quad \begin{cases} x\ge -2{,}5 \\ x\in\left[-\frac{11}{4};-2\right] \end{cases}$

$x\in(1;+\infty)$ $\quad x\in[-2{,}5;-2]$

решений нет.

№6:



$\frac{BQL}{\frac{1}{2}7xH} = \frac{1}{16}$

$BQL = \frac{7xH}{32}$

$2dx + BQL = \frac{1}{2}7xH$

$2dx + \frac{7xH}{32} = \frac{1}{2}7xH$

$2dx = \frac{7xH}{2} - \frac{7xH}{32}$

$2d = \frac{105H}{32}$

$H = \frac{64d}{105}$

$S_{BQL} : S_{BAC} = 1:16$

$d - ?$

$S_{\Delta ALC} = \frac{1}{2}d\cdot 7x$

$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2}\cdot H\cdot \cancel{7}3x$

$S_{\Delta AQF} = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3x$

$S_{\Delta BLQ} = S_{\Delta ALC} + S_{\Delta ABF} - S_{\Delta AQF} =$

$= \frac{1}{2}d\cdot 7x + \frac{1}{2}H\cdot 7x - \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3x =$

$= \frac{\frac{1}{2}x(7d+7H-\cancel{18}27)}{\frac{1}{2}H\cdot 7x} = \frac{1}{16}$

$7H = 16\cdot 7d + 7H\cdot 16 - 27\cdot 16$ $\quad 27\cdot 16 = 7H\cdot 15 + 7d\cdot 16$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$S_{\triangle BQL} = S_{\triangle BAC} - \left(S_{\triangle ABF} + S_{\triangle ALC} - S_{\triangle AQF}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}H\cdot 7x - \left(\frac{1}{2}H\cdot \overset{3}{\cancel{4}}x + \frac{1}{2}d\cdot 7x - \frac{1}{2}8\cdot 3x\right) =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{2}x}\left(7H - 3H - 7d + 27\right)}{\cancel{\frac{1}{2}}H\cdot 7\cancel{x}} = \frac{1}{16}$$

$$7H = 16(4H - 7d + 27)$$

$$\boxed{7H = 64H - 112d + 432}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \times 27 \\ \hline 112 \\ 32 \\ \hline 432 \end{array}$$

$$S_{\triangle BFC} = \frac{1}{2}H\cdot 4x = S_{\triangle BQL} + S_{\triangle ALC} - S_{\triangle AQF}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}H\cdot 4\cancel{x} = \frac{1}{2}\cancel{x}(4H - 7d + 27) + \frac{1}{2}d\cdot 7\cancel{x} - \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\cancel{x}$$

$$S_{FQLC} = \frac{1}{2}d\cdot 7x - \frac{1}{2}d\cdot 3x = \frac{1}{2}d\cdot 4x = 2dx$$

$$112d - 57H = 432$$

$$112d - \frac{64d\cdot 57}{105} = 432$$

$$d\left(\frac{112\cdot 105 - 64\cdot 57}{105}\right) = 432$$

$$d = \frac{\overset{216\ \overset{27}{108}}{\cancel{432}}\cdot \cancel{105}^{35}}{\cancel{8112}} = \frac{27\cdot 35}{169} = \frac{5\cdot 7\cdot 3^3}{13^2}$$

$\cancel{2704}$ $\cancel{1352}$ $\cancel{676}$ 169

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 105 \\ \hline 560 \\ 112 \\ \hline 11760 \\ -\ 3648 \\ \hline 8112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ 57 \\ \hline 448 \\ 320 \\ \hline 3648 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

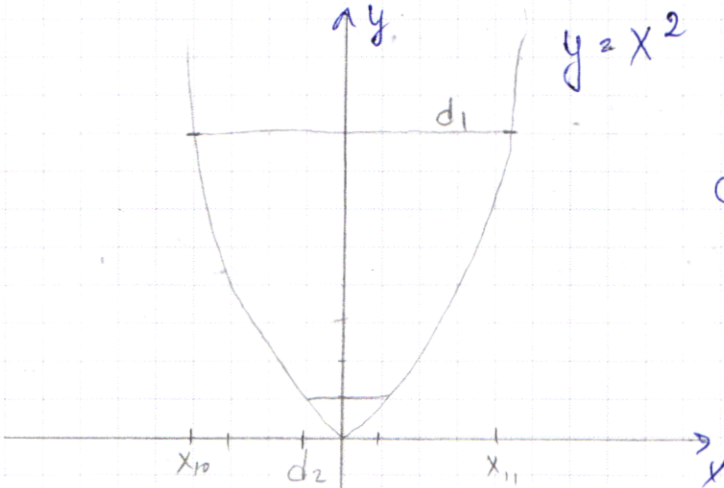
5-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1:



$y = x^2$ $\quad d_1 = 2x_1 = 2\sqrt{169} = 2\cdot 13 = 26$

$d_2 = 2x_2 = 2\sqrt{64} = 2\cdot 8 = 16$

$d_3 = 2x_3 = 2\sqrt{a}$

$a > 0$

$26 \cdot 16 = 416$ $\quad 26 \cdot 26 = 676$ $\quad 16 \cdot 16 = 256$

$y = 169$ $\quad x_{10}^2 = 169$ $\quad x_{11} = -x_{10}$ $\quad d_1$ – отрезок на прямой $y = 169$

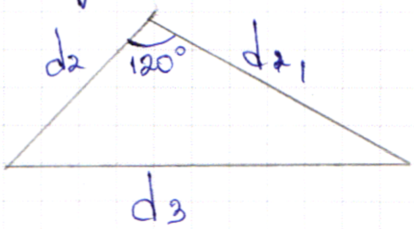
$y = 64$ $\quad d_2$ – отрезок на прямой $y = 64$

$y = a$ $\quad d_3$ – отрезок на прямой $y = a$

Рассмотрим 3 случая:

$a > 169 > 64$

1. $d_3 > d_2 > d_1$ если $d_3 > d_2 > d_1$, то в треугольнике с тупым углом $= 120°$ d_3 лежит напротив этого угла:



тогда по теореме косинусов:

$d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2\cdot d_1 d_2 \cos 120°$

$d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2 d_1 d_2 \cos 60°$

$d_3^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_1 d_2 =$

$676 + 256 + 416 = 1348$

$= 26^2 + 16^2 + 26\cdot 16 = 676 + 256 + 416 = 1348$

$d_3 = \sqrt{1348} = 2\sqrt{337}$ $\quad d_3 = 2\sqrt{a} = 2\sqrt{337}$

Ответ: $a = 337$ $\quad \sqrt{a} = \sqrt{337}$

$a = 337$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

№2: $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$\Rightarrow g'(x) = 5\sin 9x \cdot \cos 5x + 9\sin 5x \cos 9x - (7\sin 7x \cos 7x + 7\sin 7x \cos 7x) -$

$- (\cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)) =$

$= 5\sin 9x \cdot \cos 5x + 9\sin 5x \cos 9x - 14\sin 7x \cos 7x + 2\sin x \cos x =$

$= 5\sin 9x \cdot \cos 5x + 9\sin 5x \cdot \cos 9x - 7\sin 14x + \sin 2x = 0$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= \sin(6x - x) \cdot \sin(10x - x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= (\sin 6x \cos x - \sin x \cos 6x)(\sin 10x \cos x - \sin x \cos 10x) - (\sin 6x \cos x - \sin x \cos 6x)^2 -$

$- \cos^2 x - 3 =$

$\sin 30° \cdot \sin 30° =$

$\sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt3}{4}$

$(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{12}) =$

$\cos\frac{\pi}{12} = \cos(45° - 30°) =$

$\cos(60° - 30°) =$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin 5x \cdot \sin 9x$

$\sin 30° \cdot \sin 30° = \sin^2 30° = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2})\ \frac{1}{2} \cdot (\frac{\sqrt3}{2} - 1)$

$\frac{1}{2}(\sin 45° + \cos 0) =$

$\frac{1}{4}$

$\sin 90° \cdot \sin 90° = 1$

$\frac{1}{2}(1 + \cos 2)$

$\frac{1}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) =$

$\frac{1}{2}(\sin 45° \cdot \cos 0°) = \frac{1}{\sqrt2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt2} =$

$\frac{1}{2}(\sqrt2 + 1)$

$\sin(7x - 2x) \cdot \sin(7x + 2x) =$

$= (\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x)^2 = \sin^2 7x \cos^2 2x - \sin^2 2x \cos^2 7x =$

$= \sin^2 7x(1 - \sin^2 2x) - \sin^2 2x(1 - \sin^2 7x) =$

$= \sin^2 7x - \cancel{\sin^2 2x \sin^2 7x} - \sin^2 2x + = \sin^2 7x - \sin^2 2x$

$(\sin 7x - \sin 2x)(\sin 7x + \sin 2x)$

$-4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x - 3$

$-(4\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x + 3) =$

$g(x) = \sin^2 7x - \sin^2 2x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = = -(4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + 1 - \sin^2 x + 3) =$

$= -\sin^2 2x - \cos^2 x - 3 = -(\sin^2 2x + \cos^2 x + 3) =$

$= (4\sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x + 3) = -(4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x) + 3) =$

$= -(4\sin^2 x - 4\sin^4 x + 1 - \sin^2 x + 3) = 4\sin^4 x - 3\sin^2 x + \cancel{2} - 4$

$2 \quad 4 - 3 + 2 = 3 \quad -4 \quad -3 \quad = -(4\sin^2 x - 4\sin^4 x + 4 - \sin^2 x) =$ $+3$

$= -(-4\sin^4 x + 3\sin^2 x - \cancel{4}\ 4$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-010
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{BAC} = \frac{1}{2} H \cdot 7x$

$S_{ABF} = \frac{1}{2} H \cdot 3x$

$S_{FBC} = \frac{1}{2} H \cdot 4x$

$S_{\Delta AQF} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3x$

$S_{\Delta ALC} = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot d$

$S_{FQLC} = \frac{7}{2} x d - \frac{9 \cdot 3x}{2} = \frac{x}{2}(7d - 27)$

$\frac{BQL}{BAC} = \frac{1}{16}$

$16 BQL = BAC$

$16 BQL = \frac{1}{2} 7x H$

$BQL = \frac{7xH}{32}$

$S_{\Delta BQL} = \frac{1}{2} H \cdot 7x - \frac{1}{2} H \cdot 3x - \frac{1}{2} 7xd + \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3x =$

$= \frac{1}{2} x (7H - 3H - 7d + 27) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{x}(4H - 7d + 27) = \frac{7\cancel{x}H}{\cancel{32}\ 16}$

$16(4H - 7d + 27) = \frac{7H}{\cancel{16}}$

$\frac{x}{2}(7d - 27) + BQL = \frac{1}{2} H \cdot 4x$

$\frac{x}{2}(7d - 27) + BQL = 2Hx$

$\frac{\cancel{x}}{2}(7d - 27) + \frac{1}{2} x (4H - 7d + 27) = 2H\cancel{x}$

$7d - 27 + 4H - 7d + 27 = 4H$

$\frac{H}{4x + a} = \frac{d}{4x - b}$ $\quad \frac{9}{3x - a} = \frac{d}{3x + b}$

$(4x + a)d = H(4x - b)$ $\quad d(3x - a) = 9(3x + b)$

$\frac{9(4x + a)(3x + b)}{3x - a} = H(4x - b)$ $\quad d = \frac{9(3x + b)}{3x - a}$

$\frac{9(4x + a)(3x + a)}{3x - a} = H(4x - a)$

$4x - b + 3x + a = 7x$

$a - b = 0$

$a = b$

$4x - b + 3x + b = 7x$

$\cancel{9}y + \frac{9y}{H} = \frac{1}{2} H \cdot 3x$ $\quad y\left(\frac{2H + 18}{H}\right) = 3Hx$

$2y + \frac{18y}{H} = 3Hx$ $\quad y = \frac{3H^2 x}{2H + 18}$

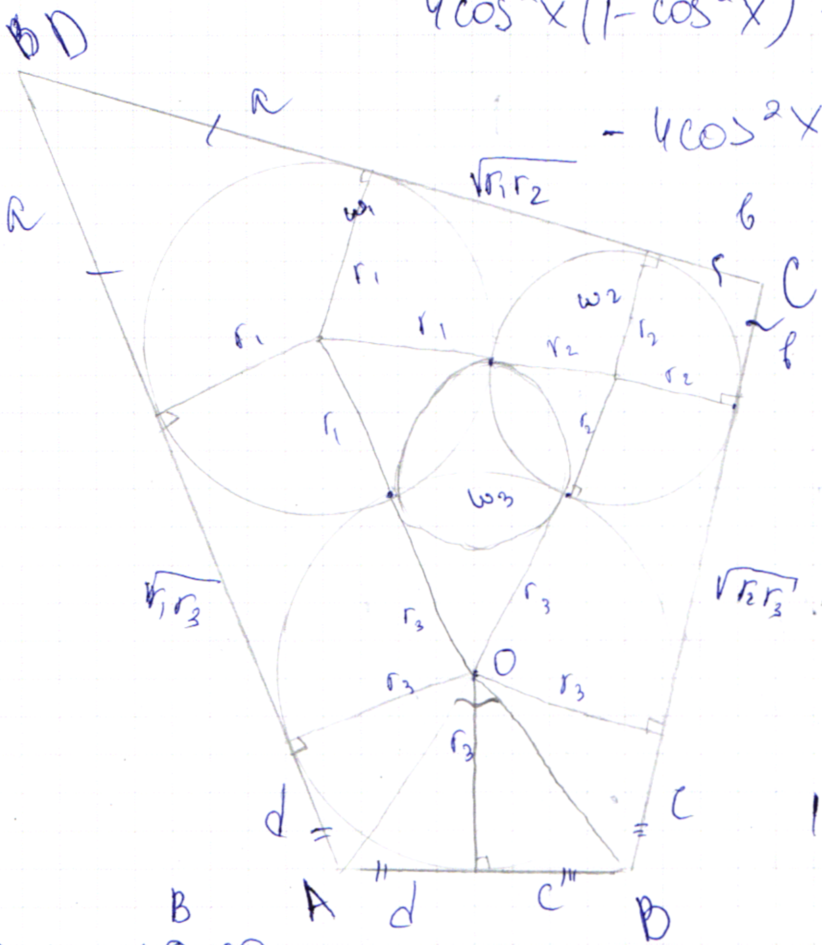
$\cancel{d} + \sqrt{r_1 r_3} + a + \cancel{c} + \sqrt{r_2 r_3} + \cancel{b} - \cancel{c} - \cancel{d} - a - \cancel{b} - \sqrt{r_1 r_2} = 10$

$\sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3} = 10 + \sqrt{r_1 r_2}$

$-4\cos^2 x(1-\cos^2 x) - \cos^2 x - 3$

$-4\cos^2 x + 4\cos^4 x - \cos^2 x - 3$

$4\cos^4 x - 5\cos^2 x - 3$



$48 - 25 = 43$ $\qquad$ $73 - 25 = 48$

$73 \,|\, 16$ $\qquad$ ~~16~~ $\qquad 16 \times 4$

141 175 $\qquad 73 - 64 = 9$

a) $AD + BC - AB - CD = 10$

35 70 105 ~~140~~ $\qquad$ 71 73 75 77 79

1 3 5 7 9 $\qquad$ 107 109 111 113 115

~~36~~ $\qquad$ 142 144 146 148 150

37 39 41 43 45

3, ~~25~~ +, ~~48~~, ~~43~~, ~~47~~, ~~39~~, ~~37~~, 200

$4 \cdot ? = 5$

$4 \cdot \frac{5}{4}$ $\qquad \frac{25}{16} - \frac{25}{16} - 3$ $\qquad 16 \times 3 = 48$ $\qquad \frac{25}{73}$

$-1 \le \cos x \le 1$

$0 \le \cos^2 x \le 1$

$0 \le 2\cos^2 x \le 2$

$-\frac{5}{4} \le 2\cos^2 x - \frac{5}{4} \le \frac{3}{4}$ $\qquad 73 - 16 = 57$

$\left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16}$

$0 \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 \le 1$

$-\frac{73}{16} \le \left(2\cos^2 x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{73}{16} \le -\frac{57}{16}$

$\frac{71}{16} \le \quad \le 5$

$4\sin^4 x - 3\sin^2 x + 4$

$\left(2\sin^2 x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 4$

$0 \le 2\sin^2 x \le 2$ $\qquad 0 \le \quad \le \frac{25}{16}$

$-\frac{3}{4} \le 2\sin^2 x - \frac{3}{4} \le \frac{5}{4}$ $\qquad -\frac{9}{16} \le \quad \le 1$