

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

11-027

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

№1.

$$y = x^2$$

$$y = 169$$

$$y = x^2 = 169$$

$$x = 13$$

$$y = x^2$$

$$y = 64$$

$$y = x^2 = 64$$

$$x = 8$$

$$y = x^2$$

$$y = 9$$

$$y = 9 = 9$$

$$x = 3$$

Чтобы создать или составить треугольник с углом 120° эти стороны треугольника должны отличаться ровно на 5.

Например. $a = 13$. $b = 8$

$c = ?$

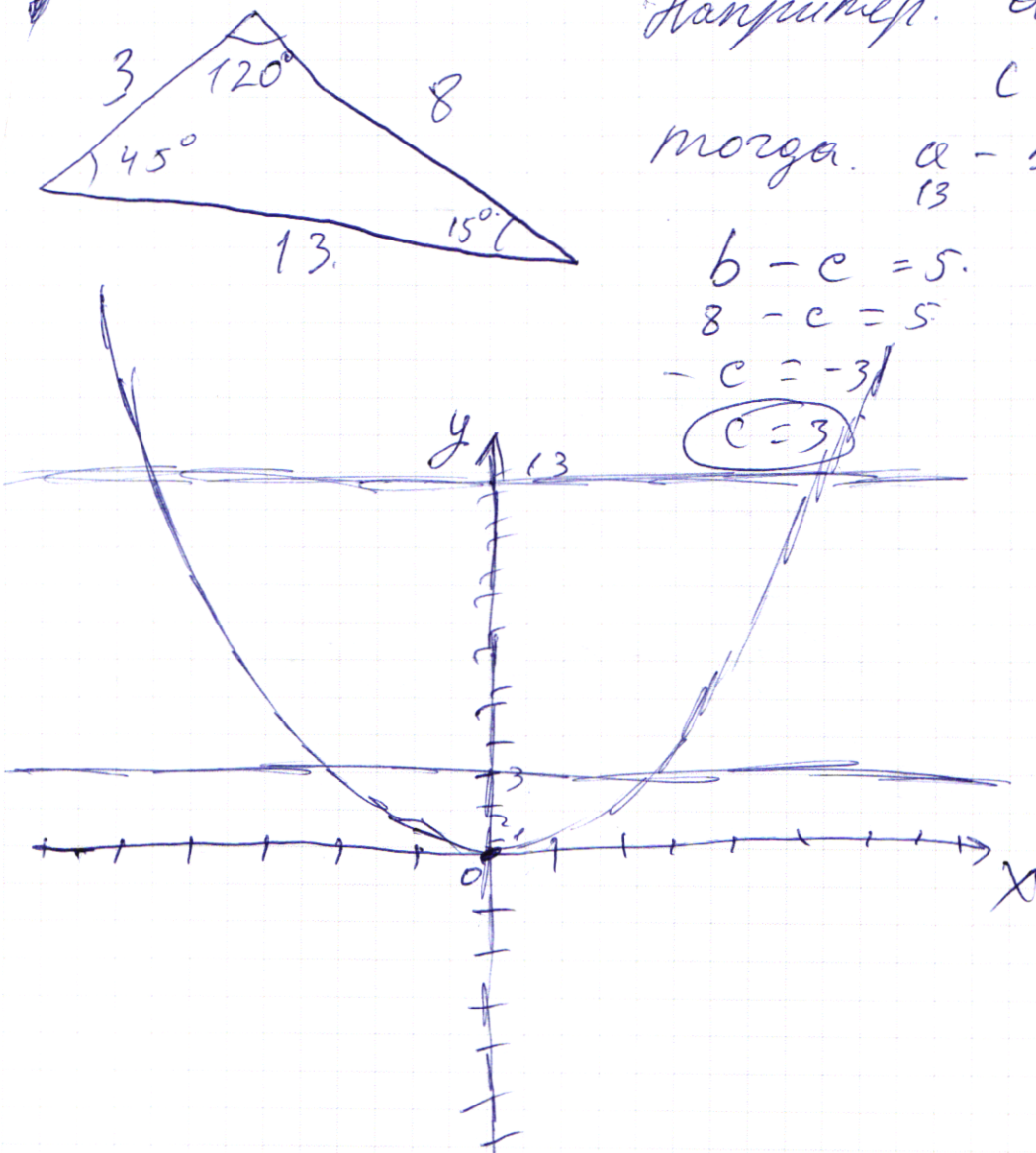
$$\text{тогда. } a - b = 5$$

$$13 - 8 = 5$$

$$8 - c = 5$$

$$-c = -3$$

$$c = 3$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

 $\sqrt{5}$.

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$x+5 \geq (\sqrt{x+3}-x)^1$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$x+x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$(2x+5)^2 \geq (\sqrt{x+3})^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3$$

$$4x^2 + 20x - x + 25 - 3 \geq 0$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 361 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$$

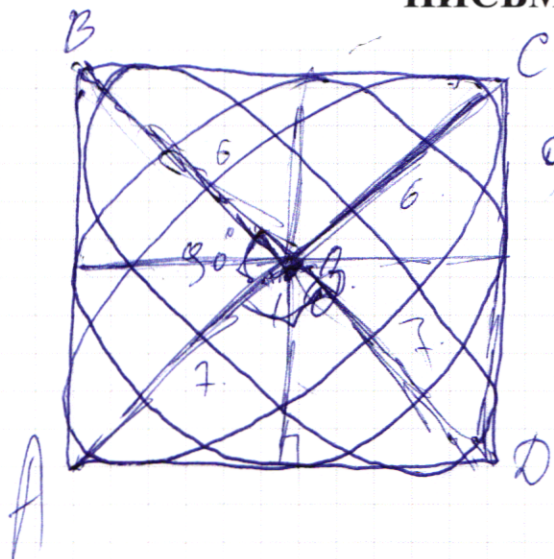
$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{2 \cdot 4} = -\frac{16}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4} \text{ П.к.}$$

Отв: $x_2 = -\frac{11}{4}$ П.к.; $x \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$;
 $x_1 = -2 \checkmark$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



а) $\angle AOB = 90^\circ$, где O — центр
окружности. ω_3 .

б) $a = 2$, $b = 2$

$$c^2 = 36 + 49$$

$$c^2 = 85$$

$$c = \sqrt{85}$$

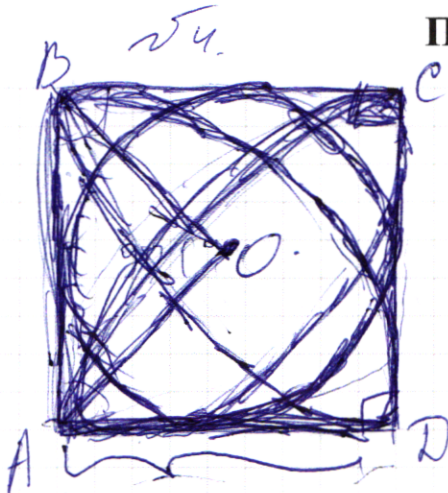
Ответ: $AB = \sqrt{85}$. если
 $AO \cdot BO = 42$.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



б) $\angle AOB$, где O - центр
окружности $\omega_3 = 90^\circ$
 $AD + BC - AB - CD = 10$
 $AO, BO = 42$

б3.
 N - 18 знач. число.

0, 5, 9.

5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5

$$125 \cdot 25 = 10000 + 25 \cdot 125 = 10000 + 625 \cdot 5 = 13125$$

	13125
×	5

11	81250

$$g(x) = \sin 5x - \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

а

$$\text{Log} \sqrt{x+3} - x (x+5) \geq 1.$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x.$$

$$x+x+5 \geq \sqrt{x+3}.$$

$$[2x+5]^2 \geq [\sqrt{x+3}]^2$$

$$4x^2 + 20x + 25 \geq x+3.$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0.$$

$$D = 361 - 4(ac) = 361 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9.$$

$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = \left(-\frac{11}{4}\right) \text{ П.К.}$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = -\frac{16}{8} = (-2) \checkmark$$

$$-\frac{11}{4} + 5 = -\frac{11+20}{4} = \left(\frac{9}{4}\right).$$

$$-\frac{11}{4} + 3 + \frac{11}{4} = (3).$$

Отв: $x \in (-2; 0) \cup (0; +\infty)$;



$$5 + 5 = 5 \cdot 5 \quad 5 \cdot 5$$

$$10 \cdot 5 = 50 \cdot 5 \quad 250 \cdot 5 = 1250 \cdot 5 = 6250 \cdot 5 = 90.$$

$$\perp 181 \cdot 250$$

✗

$$90.$$

$$\overline{10.6312.500.}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times 19 \\ \hline 171 \\ + 190 \\ \hline 361 \end{array}$$

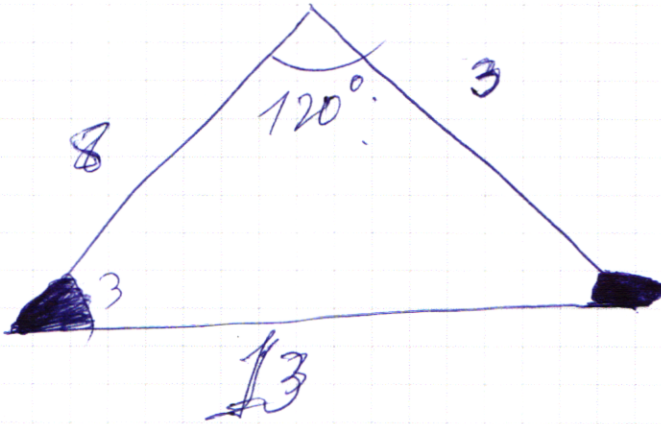
$$\begin{array}{r} 88 \quad 3 \\ \times 4 \\ \hline 352 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = x^2 = \sqrt{169} = 13.$$

$$y = x^2 = \sqrt{64} = 8.$$

$$y = 20^2 = \sqrt{a} + \sqrt{9} = 3.$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)