

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

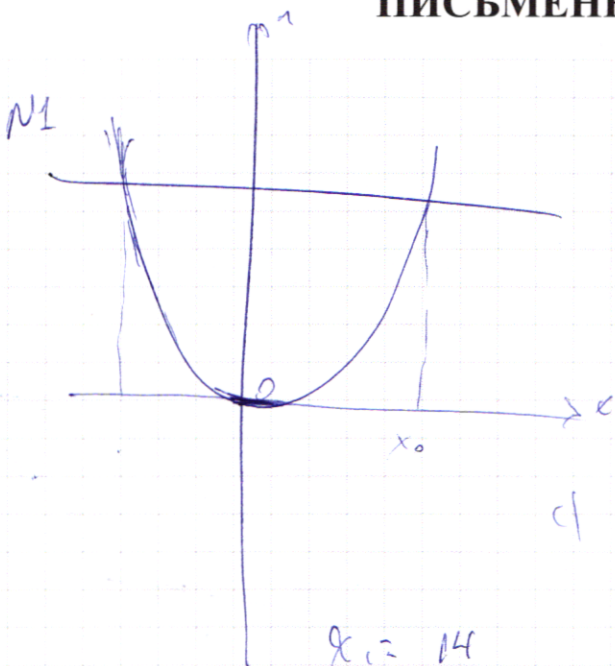
ШИФР

5-018

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

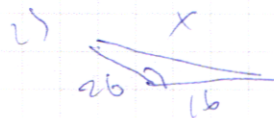
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$R = \sqrt{25169} = 26$$

$$b_2 = \sqrt{2564} = 16$$

Две треугольника есть
суть



$$x_1 = 14$$

$$f\left(\frac{x_1}{2}\right) = 49$$

$$y_1 = 49$$

$$\frac{x_2^2}{4} = y_2 = 337$$

Ответа $y = 49$
 $y = 337$

N2 $g(x) = \sin 5x - \sin 3x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$$2-g(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) (\cos 4x - \cos 14x) - 2 \sin^2 7x - 2 \cos^2 x - 6$$

$$2g(x) = \cos 4x - \cos 14x + 1 - 2 \sin^2 7x - 1 - 2 \cos^2 x + 1 - 6$$

$$2g(x) = \cos 4x - 1 - \cos 2x - 1 - 6 = \cos 4x - \cos 2x - 8$$

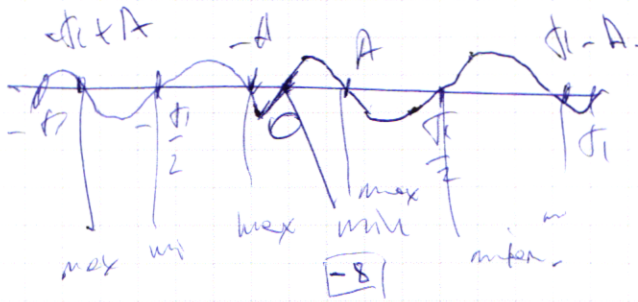
$$2g(x) = \cos 4x - \cos 2x - 8$$

Продифференцируем.

$$g'(x) = \frac{1}{2} (-4 \sin 4x + 2 \sin 2x) = -2 \sin 4x + \sin 2x$$

$$\sin 2x - 4 \sin 2x \cos 2x = 0.$$

$$\sin 2x (1 - 4 \cos 2x) = 0.$$



~~...~~

$$x = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}.$$

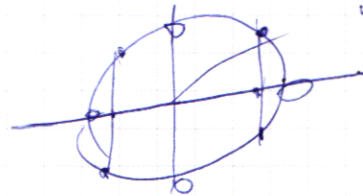
$$\cos 2x = \frac{1}{4}$$

$$2 \cos^2 x = \frac{5}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{5}{8}$$

$$x = \arccos \sqrt{\frac{5}{8}} = \arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$x \in A.$
min



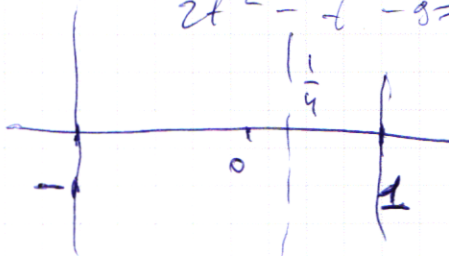
$$2g(x) = \cos 4x - \cos 2x - 8$$

$$2g(x) = 2 \cos^2 2x - \cos 2x - 9.$$

$$\cos 2x = t$$

$$g(x) = t^2 - \frac{t}{2} - 4.5$$

$$2t^2 - t - 9 = 0$$



Ось симметрии

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$$

$$t_{\text{min}} = -\frac{9}{2} = -\frac{73}{8}$$

$$g_{\text{min}} = -\frac{73}{10}.$$

$$g_{\text{max}} = -3.$$

Ось верши

$$g_{\text{max}} = g(-1)$$

$$2 + 1 - 9 = -6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

из для каждого варианта заданы
подка и номерок остается из свободных
мест. Вариантов их расположить:

$$2^{12} - 2 = \text{для двух различных вариантов}$$

подка

Возможных по номерок метрок: - 13
Первые имеют следующие номера 1 до 13 мест.

$$N = 13 \cdot (2^{12} - 2) = 53222$$

Отв. 53222

$$15 \quad \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 \quad x > -3$$

Следовательно, в контроле подо во время
 $(\sqrt{x+3}-x)$, тогда получить $(x+5)$ больше 1,
следовательно

$$(x+5) > 1 - \text{для допустимых } x.$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x > 1$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} - x > 1$$

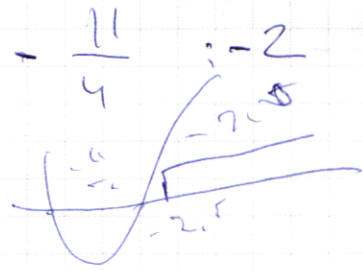
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 \leq 4x^2 + 2x + 20x \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$= \sqrt{x+3} > x \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x > 0 \end{cases} \quad x^2 - x - 3 < 0$$

$$\begin{cases} x+3 \leq 4x^2 + 25 + 20x \\ 2x+5 \geq 0 \end{cases} \quad x \geq -2,5$$

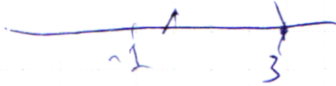
$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$



$$x \geq -2$$

$$x \leq 0$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$



Объединение

$$x \in (0; 3)$$

Ответ: $x \in (0; 3)$.

№7 Пусть выбран минимальное число из первого промежутка, тогда первое из его чисел из второго промежутка будет уже меньше, т.к. первое число второго промежутка 31.

Итого

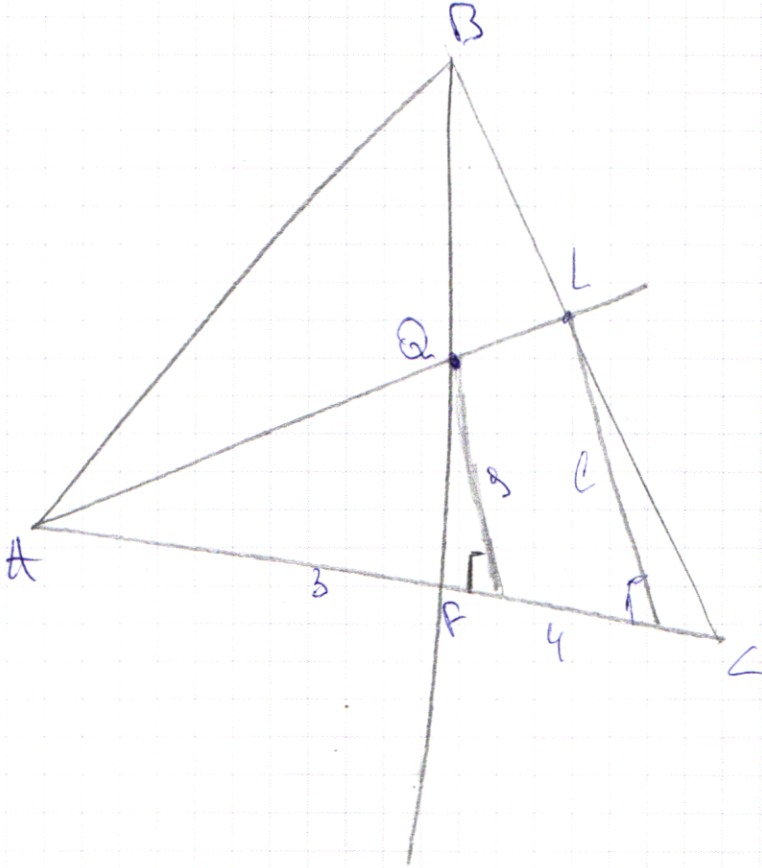
1 2 3 4 5
 41 42 43 44 45
 81 82 83 84 85
 121 122 123 124 125
 161 162 163 164 165

$$C = \left. \begin{array}{l} + 8 \cdot 5 \\ + 48 \cdot 5 \\ + 83 \cdot 5 \\ + 123 \cdot 5 \\ + 163 \cdot 5 \end{array} \right\} = C = 83 \cdot 28$$

$$C = 2075$$

Ответ: 2075

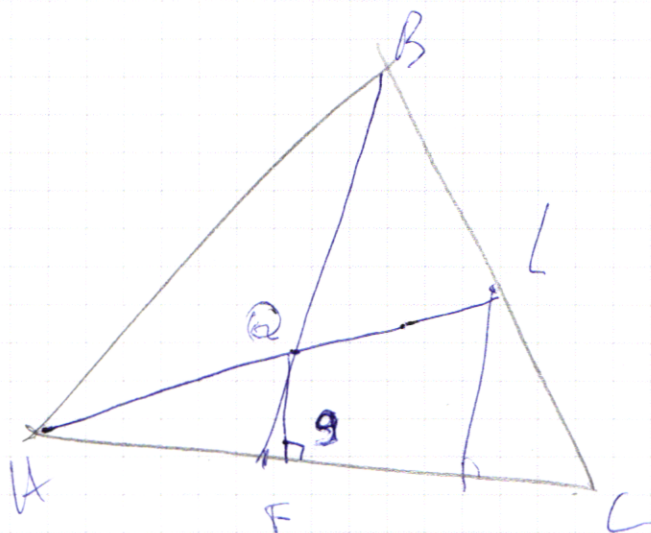
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\int_{\triangle ALQ} = S$$

$$\int_{\triangle BFL} = \frac{4}{7} S$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{16}$$

$$l = \frac{BL}{BC} \cdot 16 = 3$$

$$\frac{QL \cdot BL}{AL \cdot BC} = \frac{l}{16}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

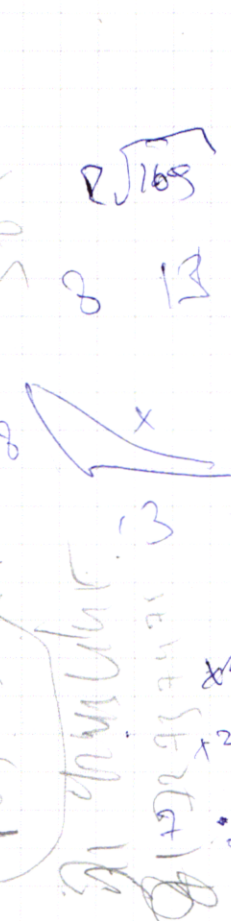
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$2\cos^2 x + 13 \cdot 8 = 987$
 $133 + 104 = 237$

Enjoy the Silence
 7
 237 + 104 = 341

237 + 104 = 341
 237 + 104 = 341
 237 + 104 = 341



$x^2 + 8x - 105 = 0$
 $x^2 + 8x + 8x = 168$
 $x^2 + 16x = 168$
 $x^2 + 16x + 64 = 168 + 64$
 $(x + 8)^2 = 232$
 $x + 8 = \sqrt{232}$
 $x = \sqrt{232} - 8$

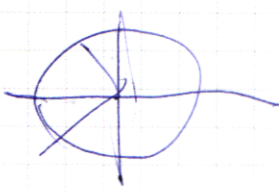
- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

$\sin 5x \sin 3x = \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = 0$

$5 \cos 5x \sin 8x + 5 \cos 8x \sin 5x = 12 \sin 7x \cos 7x$

Тригонометрия

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
 $\cos^2 x + 1 - \cos^2 x = 1$
 $1 = 1$



$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

~~sin(x cos)~~

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$2g(x) = \cos(4x) - \cos(4x) - 2\sin^2 2x - 2\cos^2 x$$

$$\cos 4x - \cos 4x - 2\sin^2 2x - 2\cos^2 x + 1 - 4$$

$$\cos 4x - \cos 4x + \cos 4x - 2\cos^2 x - 4$$

SIN

$$1 + 2\cos^2 x - 1 = -\cos 2x$$

$$\cos 4x - \cos 2x - 5 = 2g(x)$$

$$-4\sin 4x + 2\sin 4x = 0$$

$$\sin 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$$

$$\sin 2x (1 - 2\cos 2x) = 0$$

1014
2006
4094
4084
13
12272
4084
53222

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 - \cos$$

160
204

1014
2006