МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-052

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-052

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y=x^2$ Если $a<0$, то решений, y и y_3 не пересекаются. Противоречие условию $\Rightarrow a\geq 0$

$y_1=169$

$y_2=64$

$y_3=a$

Найдем точки пересечение y и y_1:

$y=y_1$; $x^2=169 \Rightarrow x=\pm 13 \Rightarrow$ Отрезок, получаемый в результате пересечения y и y_1, будет иметь длину: 26.

Найдём точки пересечения y и y_2:

$y=y_2 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=\pm 8$. Следовательно, Отрезок, получаемый в результате пересечения y и y_2, будет иметь длину 16.

Найдём точки пересечение y и y_3:

$y=y_3 \Rightarrow x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow$ Следовательно, отрезок, получаемый в результате пересечения y и y_3, будет иметь длину $2\sqrt{a}$.

~~Тогда~~ Есть 3 отрезка. Их длины: 16; 26; $2\sqrt{a}$. Если составить из этих ~~треугольников~~ отрезков треугольник, то один из углов такого Δ-ка будет равен $120°$. Мы знаем, что напротив большего угла лежит большая сторона. Возможны 2 случая:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

I $26 > 2\sqrt{a} \Rightarrow$ напротив большего угла лежит ~~угол~~ отрезок, длина которого 26. Запишем теорему косинусов:

$$26^2 = 4a + 16^2 - 2\cdot 2\sqrt{a}\cdot 16\cos 120^\circ = 4a + 256 + 32\sqrt{a}$$

$$676 = 256 + 4a + 32\sqrt{a}$$

$$420 = 4a + 32\sqrt{a}$$

$$105 = a + 8\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

~~$a_1 = 15$ $a_2 = 4\sqrt{6}$~~ ~~$a = 49$~~ замена: $y = \sqrt{a}$; $y > 0$

$$y^2 + 8y - 105 = 0$$

$$y_1 = 7$$

$y_2 = -15$; ограничение $y > 0$

$y = 7 \Rightarrow a = 49$

II $26 < 2\sqrt{a} \Rightarrow$ напротив большего угла лежит отрезок, длина которого $2\sqrt{a}$. Запишем теорему косинусов:

$$4a = 26^2 + 16^2 - 2\cdot 26\cdot 16\cdot \cos 120^\circ$$

$$4a = 676 + 256 + 26\cdot 16$$

$$4a = 832 + 416$$

$$4a = 1248$$

$$a = 312$$

~~Ответ~~

~~3 = 0 случай нет, т.к.~~

$a = 49; 312$

Ответ: 49; 312

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-052

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3$

$\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\left(\frac{\cos 4x-\cos 14x}{2}\right)-\left(\frac{1-\cos 14x}{2}\right)-$

$-\left(\frac{\cos 2x+1}{2}\right)-3=\frac{\cos 4x-\cos 14x+\cos 14x-1-\cos 2x-1}{2}-3=$

$=\frac{\cos 4x-\cos 2x-2}{2}-3=\frac{\cos 4x-\cos 2x-8}{2}=\frac{2\cos^2 2x-\cos 2x-9}{2}$

$g(x)=\frac{2\cos^2 2x-\cos 2x-9}{2}=\cos^2 2x-0.5\cos 2x-4.5.$

Будем рассматривать $g(x)$ на $[0;2\pi]$. Это можно сделать, т.к. её период 2π, и наименьшее и наибольшее значение будет достигаться на этом промежутке.

$g(x)=(\cos^2 2x)-0.5(\cos 2x)-4.5$; график $(g(x))$ на $[0;2\pi]$ - парабола, с $a>0$ $\Rightarrow \min(g(x))$

$x_{min}=-\frac{-0.5}{2}=\frac{1}{4}=x_в$ - ~~это точка минимума, т.к. на промежутке $[0;2\pi]$, график $g(x)$ - парабола, с $a>0$,~~

$\min(g(x))=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{9}{2}=-\frac{1}{16}-\frac{9}{2}=-\frac{73}{16}=-4\frac{9}{16}$

Очевидно, что $(\max(g(x)))$ достигается в наиболее удалённой от $x_в$-вершины точке, т.к. на промежутке $[0;2\pi]$, графиком этой функции является парабола. Наиболее удалённой точкой будет точка с ~~$x=$~~ $\cos 2x=-1\Rightarrow$

$\max(g(x))=$ ~~$1.5-4.5$~~ $(-1)^2-0.5(-1)-4.5=-3$

$\min(g(x))=-4\frac{9}{16}$

$\max(g(x))=-3.$

Ответ: $\min(g(x))=-4\frac{9}{16}$; $\max(g(x))=-3$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Будем рассматривать $g(x)$ на промежутке $[0; \pi]$. Период функции $-\pi \Rightarrow$ наибольшее и наименьшее значения будут достигаться на этом промежутке.

$g(x) = (\cos^2 2x) - 0.5 \cdot (\cos 2x) - 4.5.$

Графиком $g(x)$ на промежутке $[0; 2\pi]$ служит парабола с ветвями вверх, т.к. $a > 0 \Rightarrow$ наименьшее значение функции будет достигать в x вершины.

$$x_в = -\frac{-0.5}{2} = \frac{1}{4}$$

$$g(x_в) = \min(g(x)) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{16} - \frac{9}{2} = \frac{-73}{16} = -4\frac{9}{16}$$

Из-за того, что графиком функции $g(x)$ является парабола с ветвями вверх, на промежутке $[0; \pi]$, то наибольшее значение функции будет достигать в наиболее удалённой точке. Наиболее удалённой точкой будет, та для которой выполняется условие: $\cos 2x = -1$, $x \in [0; \pi]$. Такая точка существует $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\max(g(x)) = 1 + 0.5 - 4.5 = -3$$

Ответ: $\min(g(x)) = \left(-4\frac{9}{16}\right)$ — наименьшее значение

$\max(g(x)) = (-3)$ — наибольшее значение

№3

Есть 18 позиций. Шесть из них всегда заняты пятёрками. При этом, они идут подряд. Всего есть 13 вариантов, как могут располагаться шесть подряд идущих пятёрок. После того, как пятёрки будут расставлены, 12 позиций останется.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В каждом числе хотя бы один раз должна встречаться „0" и „9". Кол-во способов выбрать место для „0" – 12. Кол-во способов выбрать место для „9", после того как поставили „0" – 11. После того, как были поставлены „0" и „9", остается 10 позиций. На эти 10 позиций можно поставить „0" и „9" => вариантов их расстановки: 2^{10}.

Рассчитаем сколькими же способами можно составить число, требуемое по условию:

$13 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 2^{10} = 1\,610\,752$ вар-ов

Ответ: 1610752 вар-ов

№ 5.

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+3}-x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \\ x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} > x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \\ x \neq 1 \\ x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \setminus \{1\}$$

I $0 < \sqrt{x+3} - x < 1$

$$\begin{cases} x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ \sqrt{x+3} < 1+x \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{x+3} < 1+x$

$\sqrt{x+3} < 1+x$

$$\begin{cases} 1+x \geq 0 \\ (1+x)^2 > x+3 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 1+2x+x^2 > x+3 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -3 \\ (x-1)(x+2) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x > -1 \\ x \geq -3 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (1; +\infty)$$

$$\begin{cases} x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \in (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{x+3}-x}(f(x)) - \text{убывающая} \\ \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \end{array}\right\} \Rightarrow x+5 \leq \sqrt{x+3}-x$$

$x+5 \leq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \leq \sqrt{x+3}$

а) $\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2.5 \\ x \geq -3 \\ x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

б) $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ (2x+5)^2 \leq x+3 \\ x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2.5 \\ x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ 4x^2+20x+25 \leq x+3 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ 4x^2+19x+22 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \in (-\frac{22}{8}; -2) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

II $\sqrt{x+3} - x > 1$

$\sqrt{x+3} > 1+x$

а) $\begin{cases} 1+x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; -1]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $\begin{cases} 1+x > 0 \\ x+3 > 1+2x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)(x+2) < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \in (-2;1) \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;1)$

$\left[\begin{array}{l} x \in (-1;1) \\ x \in [-3;-1] \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-3;1)$

$\left.\begin{array}{l} \log_{\sqrt{x+3}-x}(f(x)) - \text{возрастающая} \\ \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) \end{array}\right\} \Rightarrow x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ 4x^2+20x+25 \leq x+3 \\ x \in [-3;1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2.5 \\ x \geq -3 \\ x \in [-3;1) \\ x \in (-\frac{22}{8};-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-2.5;1) \\ x \in (-\frac{22}{8};-2) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [-2.5;2)$

~~Ответ~~

$\left[\begin{array}{l} x \in [-2.5;2) \\ \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-2.5;2)$

Ответ: $x \in [-2,5;2)$

~~Изп.~~ №1

~~Пр.~~ Рассмотрим минимальную сумму, которую можно получить, пренебрегая ~~усл~~ ~~у~~ тем условием, что никакая разность не делится 35. Запишем числа, при которых будет минимальная сумма (по пять минимальных эл-ов из каждой группы)

1; 2; 3; 4; 5 — 1

36; 37; 38; 39; 40 — 2

71; 72; 73; 74; 75 — 3

106; 107; 108; 109; 110 — 4

141; 142; 143; 144; 145. — 5

Теперь применим условие, что никакая разность не делится на 35. При этом будем изменять числа на минимальное значение, которое возможно. Сначала ~~ххх~~ запишем в таблице все числа.

1	2	3	4	5
36	37	38	39	40
71	72	73	74	75
106	107	108	109	110
141	142	143	144	145

Числа, записанные в одном столбце дают разность, делящуюся на 35. Значит, надо увеличивать числа, чтобы разность не делилась на 35. Т.к. мы брали ~~по~~ по пять минимальных, то прибавляем по пять. ~~Так~~ Разность между соседними числами в одном столбце равна 35, и вместо того, чтобы прибавлять к нижним числам по пять, будем строить таблицу с шагом +40, идя по столбцам получается такая таблица:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

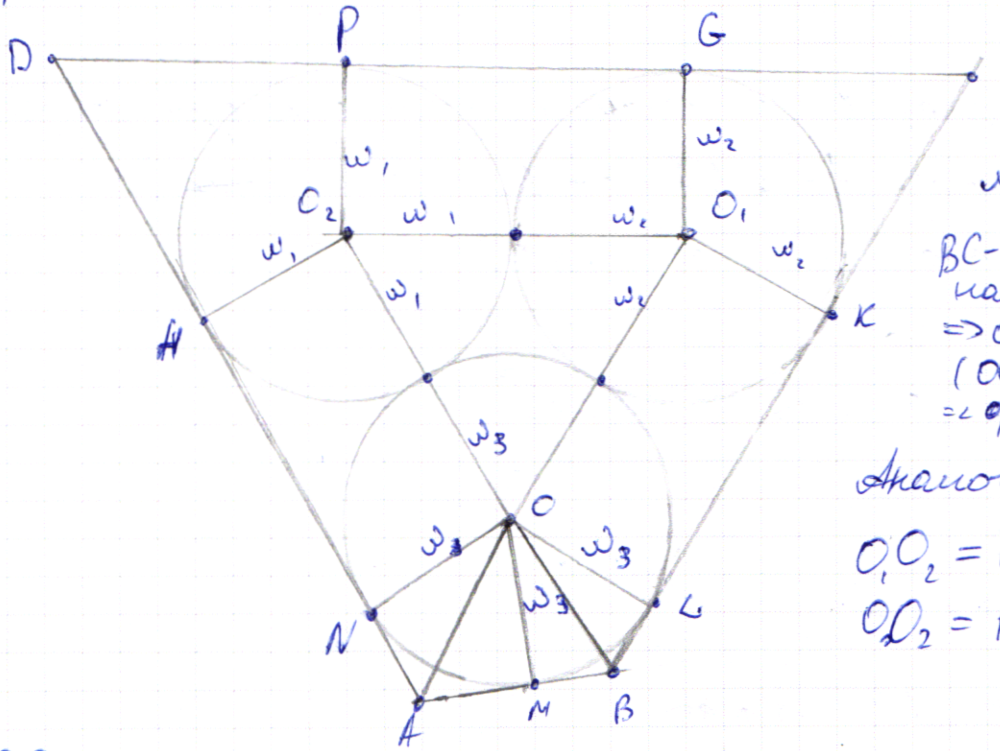
1	2	3	4	5
41	42	43	44	45
81	82	83	84	85
121	122	123	124	125
161	162	163	164	165

Т.к. мы брали изначально минимальные числа и прибавили к ним минимально возможное значение, чтобы выполнялось условие, то числа, представленные ~~минимальные для~~ дают минимальную сумму и удовлетворяют условию задачи.

Сумма: 2075

Ответ: 2075.

№4



$\omega_1=\omega_2=\omega_3$

BC - касательная к ω_2 и ω_3 $\Rightarrow OO_1 = LK$ ($OO_1 \parallel LK$; $\angle OLK = \angle O_1KL = 90^\circ$)

Аналогично,

$O_1O_2 = PG$

$OO_2 = HN$

$$\left.\begin{array}{l} OO_1 = \omega_3+\omega_2 \\ O_1O_2 = \omega_2+\omega_1 \\ O_2O = \omega_1+\omega_3 \\ \omega_3=\omega_1=\omega_2=\omega \end{array}\right\} \Rightarrow OO_1 = O_1O_2 = O_2O \Rightarrow HN = LK = PG$$

$\omega=\omega_1=\omega_2=\omega_3$; ω - величина

$AD+BC-AB-CD=10$

$DP=DH$ (т.к. DP и DH - касательные к одной окружности, проведённые из одной точки)

Аналогично, $GC=CK$; $NA=AM$; $BM=LB$ $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &AD+BC-AB-CD=10 \\ &HN=PG=LK \\ &GC=CK;\ NA=AM;\ BM=LB;\ DP=DH \\ &AB=AM+MB \end{aligned}\right\} \Rightarrow HN=10 \Rightarrow$$

$2\omega=10 \Rightarrow$
$\omega=5=\omega_1=\omega_2=\omega_3$

б) $\angle AOB$ -?

$\angle AOB=360^\circ-\angle O_2OO_1-\angle O_2ON-\angle O_1OL-\angle NOA-\angle BOL$

$\angle NOL=360^\circ-60^\circ-90^\circ-90^\circ=120^\circ$ ($\triangle O_2O_1O$ - р/с, т.к. все стороны равны, HO_2ON - прямоугольник; KO_1OL - прямоугольник)

т.к. O - центр окружности, A - точка из которой проведены 2 касательные: AB и NA, то AO - бис-са ~~угла~~ $\angle NOM$. $\Rightarrow$
Аналогично, BO - бис-са $\angle MOL$

$$\left.\begin{aligned} &\angle NOL=120^\circ \\ &\angle NOA=AOM \\ &\angle LOB=\angle MOB \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle AOB=60^\circ$$

3) AB ?

$AO\cdot BO=42$

~~Пусть $AN=x$, тогда~~

$S_{\triangle AOB}=OM\cdot AB\cdot 0{,}5=AO\cdot OB\cdot \sin 60^\circ\cdot\frac{1}{2}$ ($OM\perp AB$ т.к. OM - радиус, AB - касательная) $\Rightarrow AB=\dfrac{AO\cdot OB\cdot\sin 60^\circ}{OM}=$

$=\dfrac{42\cdot\frac{\sqrt3}{2}}{5}=\dfrac{21\sqrt3}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 5$ Чистовик.

$\angle AOB = 60^\circ$

$\angle AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$

№6

$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle BFC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{7}{4} S_{\triangle BFC} = 16 \cdot S_{\triangle BQL} \Rightarrow$

$\frac{7}{64} \cdot S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QH$; QH - высота; $QH = 9$

$BL = \frac{7}{32 \cdot 9}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-052

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \\ x \neq 1 \\ x \neq -2 \\ x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) / \{-2; 1\}$$

$22 \cdot 16 = 6$

$D = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-19+3}{8} = \frac{16}{8} = 2$

$x_2 = \frac{-19-3}{8} = \frac{-22}{8}$

$\frac{22}{8} = 2$

I $\sqrt{x+3} - x > 1$

$\sqrt{x+3} > 1+x$

а) $\begin{cases} 1+x > 0 \\ x+3 > 1+2x+x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2+x-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x-1)(x+2)<0 \end{cases} \Rightarrow x > -1,\ x \in (-2; 1)$

$\Rightarrow x \in (-1; 1)$

б) $\begin{cases} 1+x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-3; -1] \Rightarrow x \in [-3; 1)$

$22 \times 16 = 132 + 22 = 352$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}$ - воз-рал $\Rightarrow$

$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D = 19^2 - 22 \cdot 16 =$

$= 361 - 352 = 9$

19

$(20-1)^2 =$

$= 400 - 40 + 1$

I $(x+3)$ $\begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ (2x+5)^2 \geq x+3 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -2.5 \\ 4x^2+20x+25 \geq x+3 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

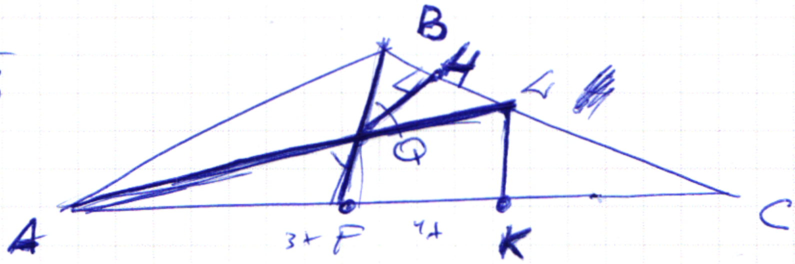
13 расположений 5-ок.
хотябы одна только
оставшихся 12 =>
хотя бы одна девятка
на оставшихся 11 => 10 что-угодно
из 2 =>

$2^{10} \cdot 13 = 1024 \cdot 13$

$\frac{BQL}{BAC} = \frac{1}{16}$

$QH = 9$

S_{BFC}



$\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{3}{4} \Rightarrow S_{ABF} = S_{BFC} \cdot 0.75$

$\frac{7}{4} S_{BFC} = S_{\triangle ABC} = 16 S_{\triangle BQL}$

$\frac{7}{64} S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QH$

$\frac{7}{64} S_{\triangle BFC} = S_{\triangle BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QH$

$\frac{7}{32} = BL \cdot 9$

$BL = \frac{7}{32 \cdot 9}$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = x^2$ ~~$x = \pm 13$,~~

$y = 169 \quad x = \pm 13 \Rightarrow AA_1 = 26$

$y = 64 \quad x = \pm 8 \Rightarrow BB_1 = 16$

$y = a \quad x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow CC_1 = 2\sqrt{a}$

I $CC_1^2 = BB_1^2 + AA_1^2 - 2AA_1 \cdot BB_1 \cdot \cos 120^\circ$

$= 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 =$

$16 = 2^4$

$16 \cdot 16 = 2^8 = 256$

$26^2 = 400 + 240 + 36 = 676$

$16^2 = 100 + 120 + 36 = 256$

$26 \cdot 16 = 260 + 26 \cdot 6 =$

$= 260 + 156 = 416$

$26 \times 26 = 156 + 52 = 676$

$676 + 256 = 832$

$832 + 416 = 1248$

$1248 : 2 = 624$, $624 : 2 = 312$

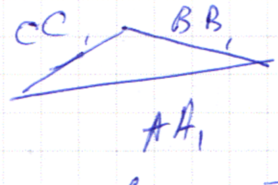
$26 \times 16 = 156 + 26 = 416$

$26 \times 6 = 156$

$1248 : 4 = 312$

$a = 312$

II



$AA_1^2 = CC_1^2 + BB_1^2 + CC_1 \cdot BB_1$

$676 = 4a + 256 + 4a \cdot 16 =$

$16 = 2^4$, $4 = 2^2$ $\Rightarrow 16 \cdot 4 = 2^6 = 64$

$676 - 256 = 420$

$420 = 4a + 64a = 68a$

$a = \frac{420}{68} = \frac{210}{34} = \frac{105}{17}$

$68 \times 5 = 340$

$a = \frac{105}{17}$

№2

1 2 3 4 5 6 7 — показ — решено

тріг. геом log ариф

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{\cos(9x-5x) - \cos(5x+9x)}{2} = \frac{\cos 4x - \cos 14x}{2}$

$\cos(5x+9x) = \cos 5x \cdot \cos 9x - \sin 9x \cdot \sin 5x$

$\cos(5x-9x) = \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \sin 5x$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

I $\sqrt{x+3} - x > 1$ II $\sqrt{x+3} - x < 1$

$\sqrt{x+}$

ОДЗ:

$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3} - x \neq 1 \\ \sqrt{x+3} - x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ x > -5 \\ \sqrt{x+3} = 1+x \\ \sqrt{x+3} > x \end{cases}$

$\sqrt{x+3} = 1+x$

$1+x \geq 0$

$x \geq -1$

$x+3 = 1+2x+x^2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1+8 = 9 = 3^2$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$x_2 = -2$

$x \geq -3$

$x > -5$

$x \neq 1$

$x \neq -2$

$x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$\sqrt{x+3} > x$

I $\begin{cases} x \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -3 \end{cases}$ $x \in [-3; 0]$

II $\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow D = 1+12 = 13$

$x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x \in (\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \end{cases} \Rightarrow x \in (0; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-052
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1+2+3+4+5=15$

6 $\angle AOB$?

$\omega_1=\omega_2=\omega_3$

$15+40\cdot5=215$

ω_1-? $\omega_2=\omega_3$-?

$\angle AOB$-?

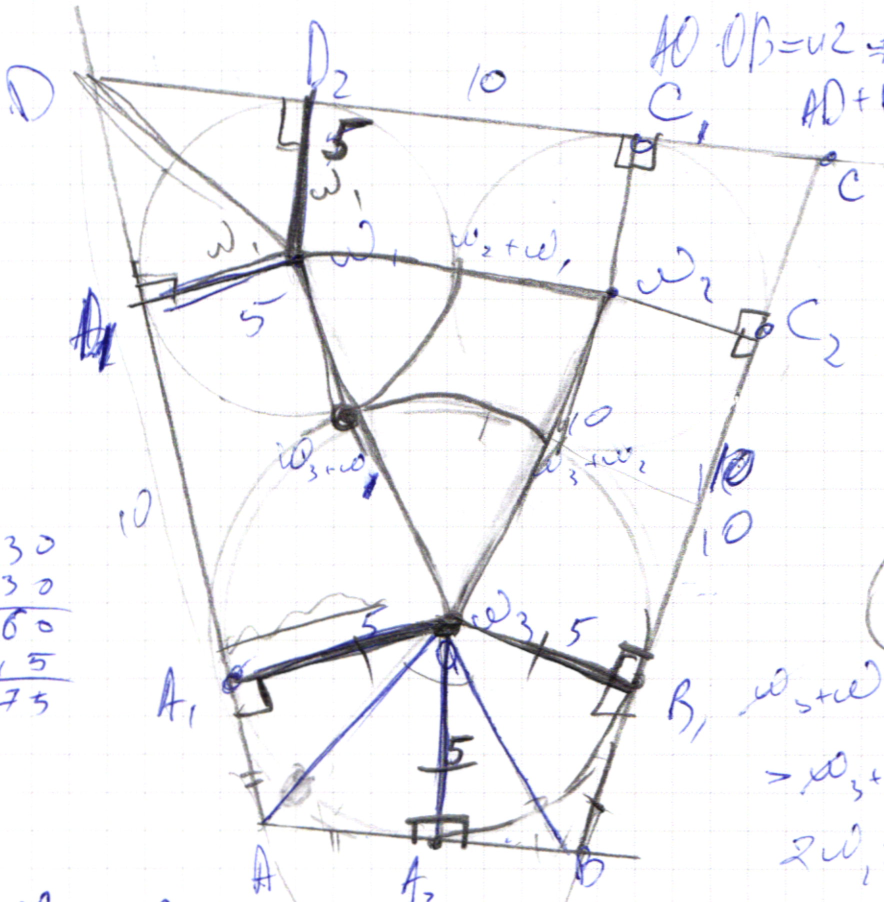
$AO\cdot OB=\sqrt{2}\cdot AB$?

$AD+BC-AB-CD=10$

415
+120
5
600

+40
5
200

60



15
21,5
41,5
61,5
81,5
830

830
+830
1660
+41,5
2075

$\omega_3+\omega_1+\omega_2+\omega_1>$
$>\omega_3+\omega_2$

$2\omega_1>0$

$AB=AD+BC$

$AD+BC-AB-CD=10$

$AD+BC-$
$-AB-CD=10$

$A_1D_1+B_1C_2-D_2C_1=10$

$2\omega_1+2\omega_1-2\omega_1=10$

$BC-AB=CC_2+10-AA_2$ $\omega=5$

$AD-CD=AA_1-CC_1$

$BC-AB=$

AA_1-CC_1

$AB=10+CD-AD-BC=AA_1+BB_1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$AO \cdot BO = 42$

$x \cdot y = 42$

$x = \frac{42}{y}$

$\sqrt{\left(\frac{42}{y}\right)^2 - (5)^2}$

$+49$
56

$a^2 + 8a - 105$

$105 : 7 = 15$

$-\ 105 \mid 7$
$\ \ \ 7 \quad \mid 15$
$\ \ 35$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-052

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1	2	3	4	5	6	7	8
+	+	+	нс	+	—	+	
			полна		не нс		

1, 2, 3, 4, 5,

41, 42, 43, 44, 45

81, 82, 83, 84, 85

121, 122, 123, 124, 125

161, 162,

$35\cdot1=35$

$35\cdot2=70$

$35\cdot3=105$

$35\cdot4=140$

$35\cdot5=175$

$\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{9}{2}-\frac{1}{16}-\frac{9}{2}=-\frac{73}{16}$

$16\cdot4=64$

$30\cdot4=120$

1, 2, 3, 4, 5 → 1, 2, 3, 4, 5 (15)

36, 37, 38, 39, 40 → 41, 42, 43, 44, 45

71, 72, 73, 74, 75 → 71, 72, 73, 74, 75

⇒ 1, 2, 3, 4, 5 ⇒ 41, 42, 43, 44, 45 ⇒

76, 77, 78, 79, 80 ⇒ 76, 77, 78, 79, 80

4 9 16 25

1, 3, 5, 7, 9,

37, 39, 41, 43, 45

41,

1, 3, 5, 7, 9,

42, 44, 46, 48, 50

$(2\cos^2 2x-\cos 2x)'=$

$=-8\sin^2 x+\sin x=0$

$\sin x=\frac{1}{5}$

$x_b=\frac{+0.5}{2}=\frac{1}{4}$

$16\cdot4=64$

$73=64+9$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - \cancel{\cos^2 x} - 3 =$

$= \frac{\cos 4x - \cos 14x}{2}$

$\times 1024$

$\sin^2 7x,$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x = -\cos 2x + 1 = 1 - \cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\frac{\cos 4x - \cos 14x}{2} + \frac{\cos 14x - 1}{2} - \cos^2 x - 3 =$

$= \frac{\cos 4x - 1}{2} - \cos^2 x - 3 = 0$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\frac{\cos 2x + 1}{2} = \cos^2 x$

$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$

$2\cos^2 2x - \cos 2x$

$\Rightarrow \frac{\cos 4x - 1}{2} - \frac{\cos 2x + 1}{2} - 3 = 0$

$\frac{\cos 4x - 1 - \cos 2x - 1 - 6}{2} = 0$

$\frac{\cos 4x - \cos 2x - 8}{2} = 0$

$\frac{2\cos^2 2x - \cos 2x - 9}{2} = 0$

$\frac{\min}{\max}\left(\frac{2\cos^2 2x - \cos 2x}{2}\right)$

$2x^2 - x - 9 = 0$

$x_B = -\frac{6}{2a} = \frac{1}{4}$

$t_{max} = 1$

$$\begin{array}{r} 1573 \\ \times\ 1024 \\ \hline 6292 \\ 3146 \\ 1573 \\ \hline 1610752 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 13 \\ \hline 363 \\ 121 \\ \hline 1573 \\ \times\ 1024 \end{array}$$