

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

6-004

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper. The page contains several diagrams and calculations:

- Top Left:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $BO = 100 \cdot \cos^2 \alpha$  and  $BO = 100 \cdot \cos^2 \alpha$ .
- Top Center:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $AB \cdot BC \cdot CA = 4R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .
- Top Right:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ .
- Middle Left:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\sin 15^\circ \times 7 \times \sin 15^\circ$ .
- Middle Center:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\log \sqrt{2+x} + \log \sqrt{2-x} = \log 2$ .
- Middle Right:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\sin 3x \times \sin 7x + \sin 4x \times \sin 5x + \cos 5x \times \sin 4x$ .
- Bottom Left:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\log \sqrt{2+x} - \log \sqrt{2-x} = \log 1$ .
- Bottom Center:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $\log \sqrt{2+x} - \log \sqrt{2-x} = \log 1$ .
- Bottom Right:** A diagram of a triangle with an inscribed circle. Calculations include  $y = 2x^2$  and  $y = 9.8 \times 10^7$ .

~~1000~~ | 000000'000000'0000

000000'000000'000000

~~1000~~ | 1000



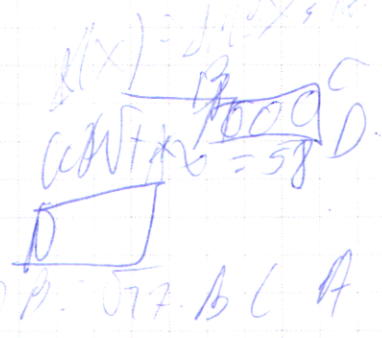
$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$

121  
 14-1826



$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$

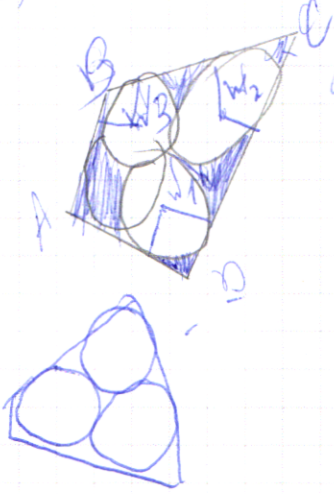
$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$



$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$



$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$   
 $\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$



$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$



$\log \sqrt{x+7} - x(x+4) \geq 1$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1  
(Нумеровать только чистовики)

$$N2. y(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 6$$

$$y(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 6$$

$$y(x) = \sin(3x \cdot 7x - \sin(x)) + \cos^2 5x + 6$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

6-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the work.

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)