МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9-22

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-22

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. 1) $y=2x^2 \cap y=98$ $\quad 98=2x^2$; $x^2=49$

$x_1=7$; $x_2=-7$ Отрезок ограничены точками пересечения $A_1(7;98)$ и $B_1(-7;98)$ – $A_1B_1=\sqrt{(7-(-7))^2+(98-98)^2}=$
$=\sqrt{(14)^2}=14$

2) $y=2x^2 \cap y=18$ $\quad 18=2x^2$; $x^2=9$

$x_1=3$; $x_2=-3$ Отрезок ограничены точками пересечения $A_2(3;18)$ и $B_1(-3;18)$ – $A_2B_2=\sqrt{(3-(-3))^2+(98-98)^2}=$
$=\sqrt{(6)^2}=6$

3) $y=2x^2 \cap y=a$ ($a>0$, иначе они не пересекутся или пересекутся в одной точке) $a=2x^2$; $x^2=\frac{a}{2}$

$x_1=\sqrt{\frac{a}{2}}$; $x_2=-\sqrt{\frac{a}{2}}$ Отрезок ограничены точками пересечения $A_3(\sqrt{\frac{a}{2}};a)$ и $B_1(-\sqrt{\frac{a}{2}};a)$ – $A_3B_3=\sqrt{(\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{a}{2}})^2+(a-a)^2}=$
$=\sqrt{(2\sqrt{\frac{a}{2}})^2}=\sqrt{2a}$

4) По т. косинусов $d^2=b^2+c^2-2bc\cos\angle$; $\angle=120°$ $\cos120°=$
$=-\frac{1}{2}$ $\quad d^2=b^2+c^2+\frac{1}{2}\cdot2bc \Rightarrow d^2=b^2+c^2+bc$, где
d, b, c стороны образованного треугольника.

5) Пусть стороной d, лежащей напротив угла $\angle=120°$ будет $A_1B_1=14$, тогда:

$14^2=6^2+(\sqrt{2a})^2+6\cdot\sqrt{2a}$

Заменим $\sqrt{2a}=t$, $t>0$

$196=36+t^2+6t$

$t^2+6t-160=0$

По т. Виета

$t_1=-16$, $t_2=10$ $\Big|\Rightarrow t=10$
$t>0$.

$10=\sqrt{2a}$ $\quad 2a=100$ $\quad a=50$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

б) Пусть стороной a, лежащей напротив угла $\alpha=120°$ будет $A_3B_3=\sqrt{2a}$, тогда

$$(\sqrt{2a})^2 = 14^2+6^2+6\cdot 14$$

$$2a = 196+36+84$$

$$2a = 316$$

$$a = 158$$

7) Т.к. $A_2B_2=6$, не может быть стороной a лежащей напротив тупого угла $\alpha=120°$, так как в таком случае она должна быть наибольшей, то есть $6>\sqrt{2a}$, $6>14$, но не может быть таковой.

Значит, при $a=158$; $a=50$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$.

Ответ: при $a=\{50;158\}$

2. $g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

$g(x)=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}(2\cos 5x-$
$-1)-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=\frac{1}{2}\cdot\cos 4x-\sin^2 x+\cos^2 5x-\cos^2 5x+\frac{1}{2}+$
$+4=\frac{1}{2}(\cos^2 2x-\sin^2 2x)-\sin^2 x+4+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}((\cos^2 x-\sin^2 x)^2-$
$-4\sin^2 x\cos^2 x)-\sin^2 x+4\frac{1}{2}=\frac{1}{2}($

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

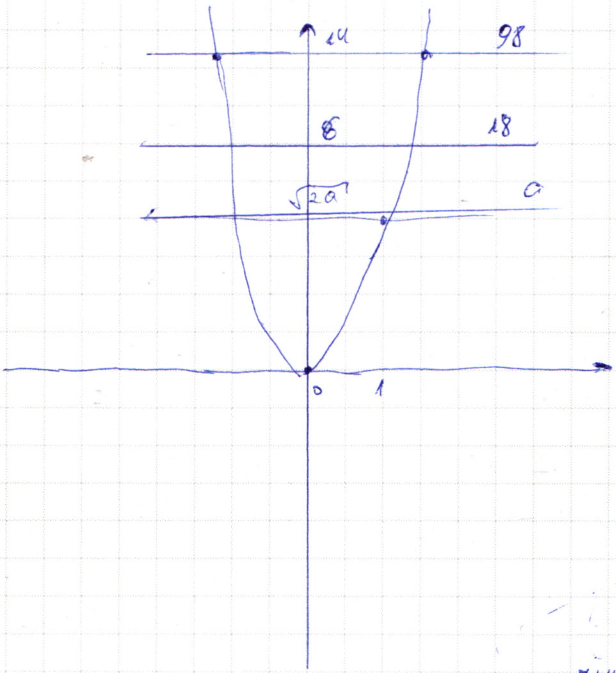
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-22

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$98 = 2\cdot 7^2$ $\quad x_1 = 7;\ x_2 = -7;\ |\ 14$

$18 = 2\cdot 3^2$ $\quad x_1 = 3;\ x_2 = -3\ |\ 6$

$a = 2\cdot x^2$

$\sqrt{\frac{a}{2}} = x$ $\quad x_1 = \sqrt{\frac{a}{2}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{a}{2}}$

$k = \sqrt{2a}$ $\quad 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

$k > 0$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$\cancel{14^2 = 3^2 + 2a + 2\cdot 3\cdot\sqrt{2a}}$

$\cancel{= 9 + 2a + 6\sqrt{2a}}$

$6^2 = 14^2 + k^2 + 14k$

$k < 0$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ACL}}\ \frac{7LH-12}{12}$

$\frac{S_{CLQB}}{S_{BCF}} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{BCF}}{S_{ACL}} = \frac{7LH-12}{5}$

$\frac{\frac{1}{2}5xLH}{\frac{1}{2}7xLH} = \frac{7LH-12}{5}$

$25 = 49LH - 84$

$14^2 = 6^2 + k^2 + 6\cdot k$

$196 = 36 + k^2 + 6k$

$160 = k^2 + 6k$

$k^2 + 6k - 160 = 0$

$k = -16;\ 10$ $\quad k = 10$

$10 = \sqrt{2a}$

$100 = 2a$

$a = 50$

$k^2 = 14^2 + 6^2 + 14\cdot 6$

$k^2 = 196 + 36 + 84$

$k^2 = 196 + 120$

$k^2 = 316$

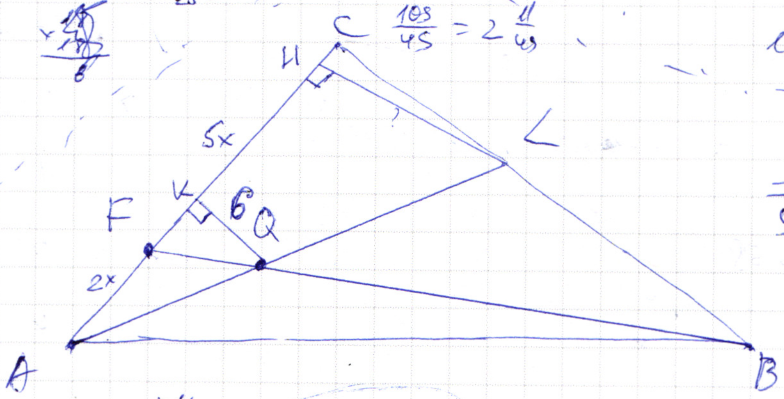
$\cancel{k = 2\sqrt{79}}$

$(\sqrt{2a})^2 = 316$

$2a = 316$

$a = 158$

$\frac{108}{45} = 2\frac{18}{45}$



$\frac{S_{BLQ}}{S_{ABC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{S_{BLQ}}{S_{BCF}} = \frac{7}{12}$

$\frac{S_{BCF}}{S_{BAC}} = \frac{5}{7}$

$\frac{S_{AQL}}{S_{AQF}} = \frac{7LH}{12}$

$S_{BCF} = 5x\cdot\frac{BH_1}{2}$

$S_{BAC} = 7x\cdot\frac{BH_1}{2}$

$S_{AFQ} = 6x$

$S_{ACL} = \frac{7}{2}xLH$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2$ $\quad \cos^4 x + \sin^4 x - 2\cos^2 x \sin^2 x = 4\sin^2 x \cos x$

$\cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

8. 1. $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$\frac{1}{2}\cos 4x + \cos^2 x \; 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$ $\quad x = -3 \quad x = -\frac{3}{4}$

$\frac{1-\sqrt{33}}{2} \vee -3$

$-\sqrt{33} \vee -7$

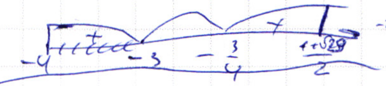
$-\sqrt{33} > -\sqrt{49}$

$\frac{1-\sqrt{33}}{2} \vee -\frac{3}{4}$

$-\sqrt{33} \vee -\frac{6}{4}$

$-2\sqrt{33} \vee -\sqrt{36}$

$<$



$4x^2 + 16x + 16 \geq x + 7$

$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$

$225 - 144 = 81$

$x = \frac{-15 \pm 9}{8}$

$\log_{\sqrt{x+7} - x}(x+4) \geq 1$

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ x + 4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{\lg(x+4)}{\lg(\sqrt{x+7}-x)} \geq 1$$

$$\begin{cases} x > -4 \\ \sqrt{x+7} > x \end{cases}$$

$\lg(x+4) \geq \lg(\sqrt{x+7} - x)$

$x + 4 \geq \sqrt{x+7} - x$

$2x + 4 \geq \sqrt{x+7}$

$$\begin{cases} x > -4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x + 7 > x^2 \end{cases} \\ x < 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} -4 < x < 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x + 7 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$

$\cancel{2x - \sqrt{x+7} + 4 > 7}$

$x^2 - x + 7 \neq 1$

$x^2 - x + 8 \neq 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{33}}{2}$

$-4 < x < \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

1) $\underbrace{88\ldots8}_{7}$ $\underbrace{\quad}_{10}$

$2^{10} - 2$ все 7, все 0

2) $\underbrace{7}_{1}\underbrace{88\ldots8}_{7}$ $\underbrace{\quad}_{9}$

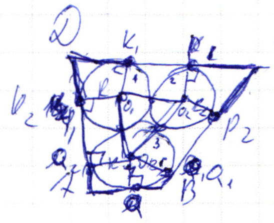
$2^9 - 1$ все 7

3) $\underbrace{7}_{1}$ $\underbrace{888\ldots8}_{7}$ $\underbrace{\quad}_{9}$

$2^9 - 1$ все 7

00 81 72 63 54 45 36 27 18 09

$\times 10$



$AD + BC - AB - CD = 12$

$R_2O_2 + R_2Q_1 = Q_1P_1 + 12$

$O_1O O_2$

$O_1O_2 + O_2O = O_1O_2 + 12$

$2R + 2R = 2R + 12$

$2R = R + 6$

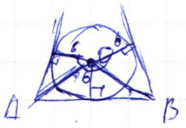
$R = 6$

$2^{10} - 2 + 10(2^9 - 1) = 2^{10} + 10 \cdot 2^9 - 12$

$2^{10} + 5 \cdot 2^{10} - 12 = 6 \cdot 2^{10} - 12 =$

$= 6(1024 - 2) = 6 \cdot 1022 = 6132$

$$\begin{array}{r} \times\, 1022 \\ 6 \\ \hline 6132 \end{array}$$



5. $AO = x$

$BO = \frac{58}{x}$

$\sqrt{x^2 - 6^2} + \sqrt{\left(\frac{58}{x}\right)^2 - 6^2}$

6. $360° - 60° - 50° - 50° = 120°$

$\angle AOB = 60°$

$AB^2 = x^2 + \left(\frac{58}{x}\right)^2 - 58$

$\sqrt{58}$ $\quad AB^2 = \frac{x^4 + 58^2 - 58x^2}{x^2}$

$AB =$

~~$0 + 45 + 90 \cdot 2$~~

7. $(0 + 45 + 90 + 135 + 180) \cdot 6$

$+ 1 + 2 + \ldots + 30 =$

$= 45 \cdot 6(1 + 2 + 3 + 4) + \frac{30 \cdot 31}{2} =$

$= 45 \cdot 6 \cdot 10 + 31 \cdot 15 =$

$= 15(3 \cdot 6 \cdot 10 + 31) =$

$= 15(180 + 31) = 15 \cdot 211$

$$\begin{array}{r} \times\, 211 \\ 15 \\ \hline 1055 \\ 211 \\ \hline 3165 \end{array}$$

3165

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. 1) Если семь подряд следующих "8" начинают число, тогда на оставшиеся 10 позиций по 2 цифры, кроме случаев, когда все "0" или "7"; т.е. $2^{10}-2$ вариантов.

2) В остальных случаях число начинается с "7", так как не может начинаться с "0". И из девяти цифр, не занятых в "8" могут быть по 2 цифры на позиции кроме случая, когда все "7" 2^9-1.

3) Таких случаев 10 в зависимости от расположения "8": $10\cdot(2^9-1)$

4) Всего $N=2^{10}-2+10(2^9-1)=2^{10}-2+10\cdot2^9-10=$

$=2^{10}+5\cdot2^{10}-12=6\cdot2^{10}-12=6(1024-2)=6\cdot1022=6132$

Ответ: 6132

4. $R=6$

$\angle O=60^\circ$

5. $x\in(-4;-3]\cup[\frac{3}{4};\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

6. $2\frac{11}{43}$

7. 3165

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-22

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-22

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)