

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

13-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

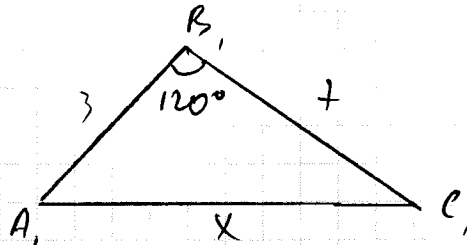
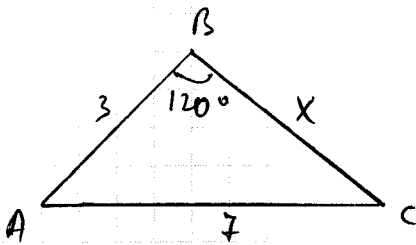
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1.

$$y = 2x^2, \quad y = 98, \quad y = 18, \quad y = a, \quad \alpha = 120^\circ$$

Решение: $2x^2 = 98 \Rightarrow x = \pm 7$; (7)
 $2x^2 = 18 \Rightarrow x = \pm 3$; (3)

Возможные случаи составления треугольника:



$$AB = 3, \quad AC = 7, \quad BC = x$$

$$A_1B_1 = 3, \quad B_1C_1 = 7, \quad A_1C_1 = x$$

Т.к. угол 120° , то в треугольнике он будет наибольшим, значит должен лежать против наибольшей стороны.

Рассмотрим I случай, когда наибольшая сторона 7:

По Теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

$$49 = 9 + x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$49 = 9 + x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

По Теореме Виета:

$$x_1 = -5 \text{ не удовл. условию (длина отрезка } > 0)$$

$$x_2 = 8$$

Получим $\triangle ABC$, где $AB=3$, $BC=8$, $AC=7$, но угол 120° - больший, лежит против AC , а $AC < BC$. Значит $BC=8$ там не подходит.

Рассмотрим II случай:

$$x^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$x^2 = 79$$

$$x = \sqrt{79} \Rightarrow AC = \sqrt{79}.$$

Если, что он больше 3 и больше 7, значит

$$a = 2 \cdot x^2 = 2 \cdot 79 = 158.$$

Ответ: $a = 158$.

Задача №2.

Решение:

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4.$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 10x - \frac{1}{2} \cos 4x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x - \cos^2 2x + \sin^2 2x - 2\sin^2 x + 2\cos^2 5x + 8)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (3\cos^2 5x + \cos^2 5x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7.

Решение:

В условии не указано, что он выбирал различные числа, поэтому допустим, что из каждого промежутка он выбрал по 6 одинаковых чисел. Очевидно, чтобы получить наименьшую сумму из I промежутка он взял число 1 шесть раз. Из II промежутка он взял число 47 шесть раз; Из III промежутка он взял число 93 шесть раз; Из IV промежутка он взял число 139 шесть раз; Из V промежутка он взял число 185 шесть раз;

Тогда сумма оказалась:

$$S = 6(1 + 47 + 93 + 139 + 185) = 2790$$

Ответ: наименьшая сумма 2790.

~5.

Решить неравенство:

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1.$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x) \geq 0.$$

Вспомогательная св-ва:

$\log_a b - \log_a c$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-c)$.

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-\sqrt{x+7}+x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7}-(x+7)+6)(2(x+7)-\sqrt{x+7}-10) \geq 0$$

Замена: $\sqrt{x+7} = t$; $t > 0$

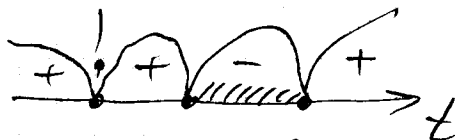
$$(t^2 - t - 6)(2t^2 - t - 10) \leq 0$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 3$$

$$t_3 = -2$$

$$t_4 = 2,5$$



$$-2 \quad 2,5 \quad 3$$

$$2,5 \leq t \leq 3$$

$$t = -2 \notin \text{ODZ}$$

$$2,5 \leq \sqrt{x+7} \leq 3$$

$$6,25 \leq x+7 \leq 9$$

$$-0,75 \leq x \leq 2$$

При $x = 2$ $\sqrt{x+7} - x = \sqrt{9} - 2 = 3 - 2 = 1$, но $a \neq 1$.

Ответ: $x \in [-0,75; 2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №3.

Решение:

Данное число может быть записано следующими способами:

1) $\underbrace{88\dots8}_{7p} \underbrace{(047)}_{1000}$, где $\underbrace{047}_{1000}$ набор цифр может

быть составлен $10^3 = 1000$ способами.

2) $7 \underbrace{88\dots8}_{7p} \underbrace{(047)}_{900}$, где $\underbrace{047}_{900}$ составлен $9^3 = 81$ способами

3) $7 \underbrace{(047)}_1 \underbrace{88\dots8}_{7p} \underbrace{(047)}_{900}$, где $\underbrace{(047)}_{900} \underbrace{(047)}_1$ составлен 81 способами.

...

11) $\underbrace{(047)}_{100} \underbrace{88\dots8}_{7p}$, где $\underbrace{(047)}_{100}$ выбраны 81 способом.

Итого способов: $10 \cdot 81 + 100 = 810 + 100 = 910$.

Ответ: всего 910 способов.

Задача №4.

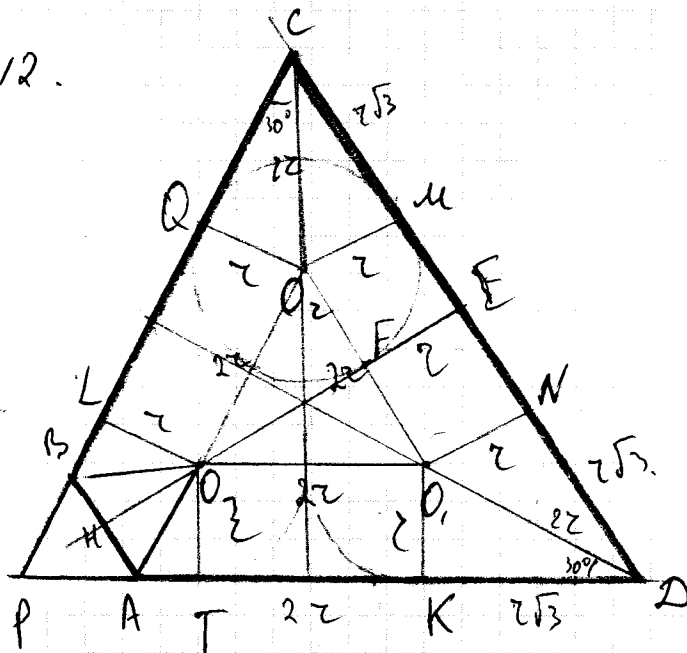
a) $AO + BC - AB - CD = 12$.

Найти: z

б) Найти $\angle AOB$

в) $AO \cdot BO = 58$.

Найти: AB .



Решение: $O_1 O_2 = O_2 O_3 = O_1 O_3$.

$\triangle PCD$ - правильный, т.к. подобен $\triangle O_1 O_2 O_3$.

$CQ = CM = DN = DK = PT = PL$ (касательные).

$PQ = PK = CL = CN = DM = DT$ (касательные).

$CD = PD = AD + AP$

$CD = CP = CB + BP$

$KE = OK + OF + FE = z + z\sqrt{3} + z = 2z + z\sqrt{3} = z(2 + \sqrt{3})$

$CD = CM + MN + DN = 2z + 2z\sqrt{3} = 2z(\sqrt{3} + 1)$

~~$\frac{(2z(\sqrt{3} + 1))^2 \sqrt{3}}{24} = \frac{1}{2} \cdot z(2 + \sqrt{3}) \cdot 2z(\sqrt{3} + 1)$~~

~~$2(\sqrt{3} + 1) \cdot \sqrt{3} = z(2 + \sqrt{3})$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

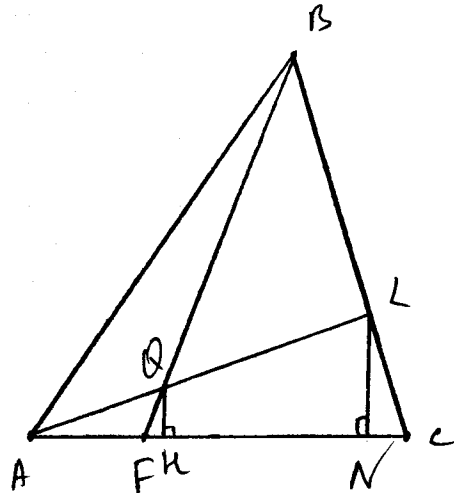
$$AF : FC = 2 : 5$$

$$S_{BQL} : S_{ABC} = 5 : 12.$$

$$p(Q; (AC)) = QH = 6.$$

Найти:

$$p(L; (AC)) = LN$$



Решение:

$$S_{\triangle ABF} : S_{\triangle BFC} = 2 : 5.$$

$$S_{\triangle AQF} = \frac{1}{2} AF \cdot QH = 3 AF$$

$$S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BFC} = 7 : 5$$

$$S_{\triangle ALC} = \frac{1}{2} AC \cdot LN = \sum_3 AF \cdot LN$$

$$S_{BQL} = S_{BFC} - (S_{ALC} - S_{AQF}) = S_{BFC} - S_{ALC} + S_{AQF}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ALC} = \frac{1}{2} AC \cdot LN \\ S_{AQF} = \frac{1}{2} AF \cdot QH \end{array} \right.$$

$$\frac{S_{ALC}}{S_{AQF}} = \frac{7 LN}{2 \cdot 6} = \frac{7 LN}{12}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = 1 - \frac{S_{ALC}}{S_{BFC}} - \frac{S_{AQF}}{S_{BFC}}$$

$$\frac{S_{BFC}}{S_{BQL}} = \frac{12}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{BFC}} = \frac{7}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{12}{5} S_{BQL} = \frac{7}{5} S_{BFC} \Rightarrow \frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{12}$$

$$S_{BFC} = S_{BQL} + S_{BQLC}$$

$$\frac{S_{BFC}}{S_{BQL}} - 1 = \frac{12}{7} - 1$$

$$\frac{S_{BFC} - S_{BQL}}{S_{BQL}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{S_{FQLC}}{S_{BQL}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{S_{ARF}}{S_{ALC}} = \frac{AF \cdot QH}{AC \cdot LN} = \frac{2QH}{7LN} = \frac{12}{7LN}$$

$$AD + BC - (AB + CD) = 12.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7 + \frac{2\sqrt{3}}{2} + 22.$$

$$27 + \frac{2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ +36 \\ \hline 94 \end{array}$$

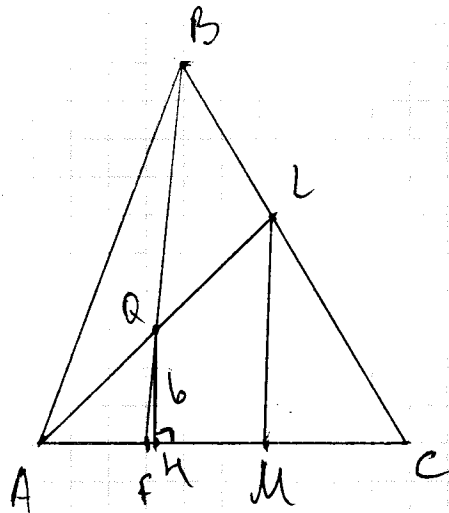
$$\sqrt{94}$$

$$47$$

$$\frac{58\sqrt{3}}{2} = 29\sqrt{3}$$

$$58 + 1 \quad z = \frac{58\sqrt{3}}{6}$$

$$z = \frac{58\sqrt{3}}{6}$$



$$AF : FC = 2 : 5.$$

$$S_{BOL} : S_{BAC} = 5 : 12.$$

$$OL = 6, LM = ?$$

$$2AD - (AB + CD) = 17.$$

$$2AD = 17 + AB + CD$$

$$AD = BD = 6.$$

$$AB = 6.$$

$$2CD = AD + BC + 12.$$

$$2CD = 12 + AB + CD + 12$$

$$CD = AB + 24.$$

$$CD = 30.$$

$$24 + 48 - 36 = 12.$$

$$27 + 2K = 30$$

$$2 + K = 15.$$

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$13 - 11 = 2.$$

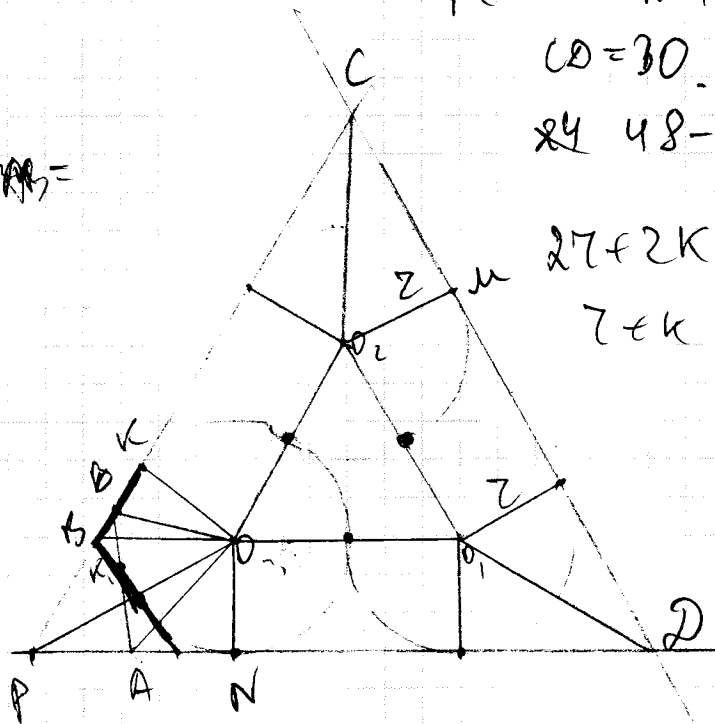
$$AN + DN - KM - CM + CK + AB =$$

$$= AN - CM + AB = 12.$$

$$AB + CD = AD + BC - 12.$$

$$\frac{1}{2}(AD - MC) \cdot 2 \cdot (2 + \sqrt{3})$$

$$32 + 2\sqrt{3} = 3(2 + \sqrt{3}).$$



$$CD =$$

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 47 + 6 \cdot 93$$

$$6(1 + 47 + 93 + 139)$$

$$6(140 + 140) = 1680.$$

$$13x - 11x = 12$$

$$x(13 - 11) = 12$$

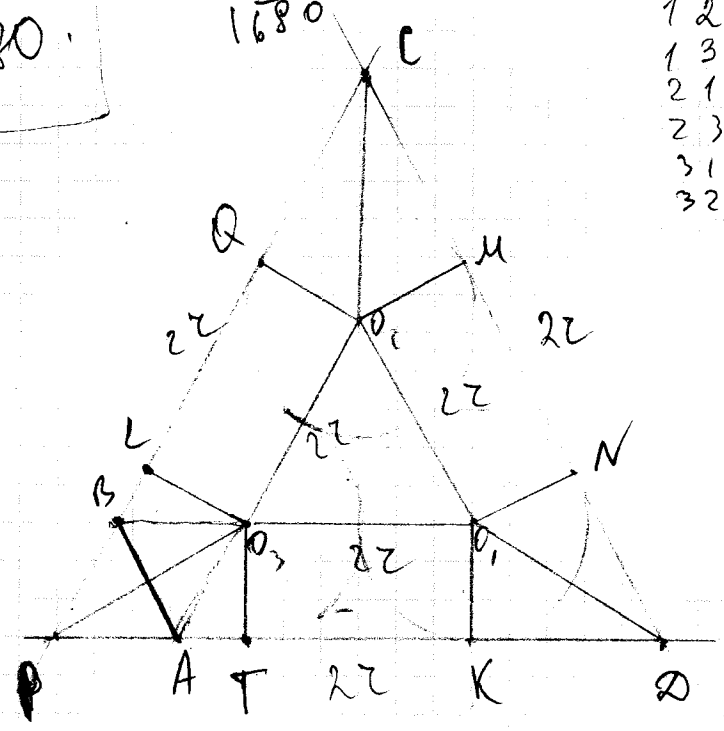
$$x = 4.$$

$$\begin{array}{r} 137 \\ - 47 \\ \hline 90 \\ + 139 \\ \hline 229 \\ + 1660 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 185 \\ - 159 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$AD + BC - AB - CD = 12.$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{array}$$



$$26 + 26$$

$$52 + 30 - 8$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ + 140 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ + 185 \\ \hline 365 \\ \times 6 \\ \hline 2790 \end{array}$$

$CM = CQ = DN = DK = PL = PT$; $PQ = PK = CL = CN = DM = DT$
 $CO_2 = DO_1 = PO_3$ $2CO = AD + BC + AP + BP$

$AD = DT + AT$ $DT + AT + CL + BL = 2DT + AT + BL$
 $BC = CL + BL$

$AB =$
 $CD = CN + DN$

$\triangle PCA$ - правильный

$$\frac{29\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2 = 58$$

$$a = \sqrt{58}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 58 \\ - 3 \\ \hline 174 \\ + 6 \\ \hline 180 \\ 8 \end{array}$$

$$\frac{29\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{58 \cdot 3}}{2} = \sqrt{\frac{174}{4}}$$

$AD + BC + 6 = AB + CD + 6$
 $PD + AP \neq 2CO - AP - BP - AB - CD = 12$
 $CO - PABP = 12$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

13-008

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x^2 \quad y = 98; \quad y = 18; \quad y = a.$$

$$y = 2x \quad ; \quad y = 98$$

$$2x^2 = 98$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7.$$

$$7^2 = 9 + x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$49 = 9 + x^2 + 3x$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$\textcircled{\times} \quad x = -5 \Rightarrow y = 50 \Rightarrow a = 50.$$

$$x = 8 \Rightarrow y = 128 \Rightarrow a = 128.$$

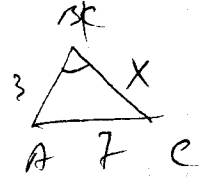
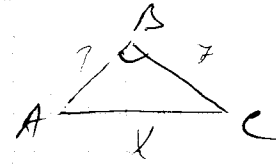
$$x^2 = 7^2 + 3^2 + 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ$$

$$x^2 = 49 + 9 + 21$$

$$x^2 = 79$$

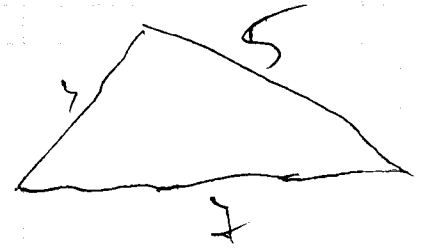
$$x = \pm \sqrt{79}$$

$$y = 158 \Rightarrow a = 158.$$



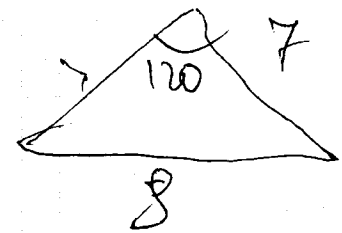
$$49 = 9 + 25 + 15$$

$$49 = 49.$$



$$3 \quad 5 \quad 7$$

$$3 \quad 7 \quad 8$$



Ответ: 50, 128, 158.

$$2 \cdot 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$g(x) = \sin^3 x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 5x + \frac{1}{2} \cos 2x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos 2x - 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 5x + 8)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} (\cos 5x - \cos^2 x + \sin^2 x + 2 \cos^2 5x + 8) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 5x - (\cos^2 x + \sin^2 x) + 2 \cos^2 5x + 8) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos 5x + 2 \cos^2 5x + 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1}{2} \cos 5x + \cos^2 5x + 3,5 \right)' = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (-\sin 5x) + 2 \cos 5x \cdot 5 \cdot \sin 5x = \\ &= -\frac{5}{2} \sin 5x + 5 \sin 10x = \frac{5}{2} (\sin 10x - \sin 5x) \end{aligned}$$

$$\sin 10x - 2 \sin 5x = 0$$

$$2 \sin 5x (\cos 5x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 5x = 0 \\ \cos 5x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \pi n \\ 5x = 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = \frac{\pi n}{5} \\ x = \frac{2\pi k}{5} \end{matrix} \rightarrow x = \frac{\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$1 - 2 \sin^2 x$$

$$-1 \leq \cos^2 5x \leq 1$$

$$-2 \leq 2 \cos^2 5x \leq 2$$

$$-3 \leq 2 \cos^2 5x + \cos 5x \leq 3$$

$$4 = 2 \cos^2 5x + \cos 5x + 7 \leq 10$$

$$2 \leq \frac{1}{2} (2 \cos^2 5x + \cos 5x + 7) \leq 5$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos^2 2x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 10x - \cos 4x - 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 5x + 8)$$

$$\frac{1}{2} (2 \cos^2 5x - 1 - 1 + 2 \sin^2 2x - 2 \sin^2 x + 8)$$

$$\frac{1}{2} (4 \cos^2 5x + 2 \sin^2 x (2 \cos^2 x - 1) + 6) =$$

$$= \frac{1}{2} (4 \cos^2 5x + 2 \sin^2 x \cdot \cos 2x + 6)$$

$$2 \cos^2 5x + 1 - \cos 2x + 6$$

$$2 \cos^2 5x - \cos^2 2x + 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \underbrace{888 \dots 8}_{7} \cdot \underbrace{07}_{10}$$

9! - выбор 0.

10! - выбор 7

$$\begin{array}{r} 102 \\ \underline{152} \\ 104 \\ \underline{260} \\ 2704 \\ \times 84 \\ \underline{216} \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

$$2) \underbrace{888 \dots 8}_{7} \cdot \underbrace{07}_{9}$$

$$9! + 10! + 8! + 10!$$

$$\underbrace{7}_{10} \quad \underbrace{888 \dots 8}_{7}$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)$$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

$$x+7 \geq 0$$

$$4(x+2)^2 \geq x+7$$

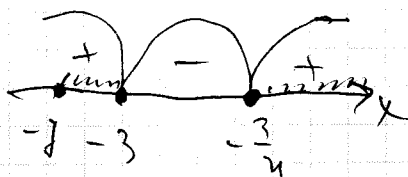
$$4x^2 + 16x + 16 \geq x + 7$$

$$4x^2 + 15x + 9 \geq 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x_1 = \frac{-15+9}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$x_2 = \frac{-15-9}{8} = -3$$



$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x \neq 2$$

$$x > -7$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \approx 3,2$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \approx -2,2$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x + 4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0.$$

$$\sqrt{x+7} - x - 1 = 0.$$

$$\sqrt{x+7} = t$$

$$(-(x+7) + 6 + \sqrt{x+7})(2x + 14 - \sqrt{x+7} - 10) \geq 0.$$

$$(-t^2 + t + 6)(2t^2 - t - 10) \geq 0.$$

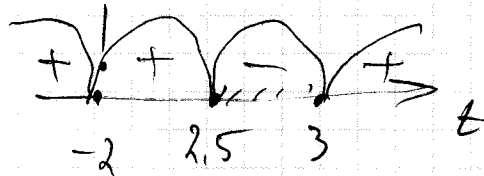
$$(t^2 - t - 6)(2t^2 - t - 10) \leq 0.$$

$$t_1 = -2 \text{ (crossed out)};$$

$$t_2 = 3.$$

$$t_3 = -2$$

$$t_4 = 2,5$$



$$2,5 \leq t \leq 3.$$

$$2,5 \leq \sqrt{x+7} \leq 3.$$

$$2,25 \leq x+7 \leq 9$$

$$\underline{-4,75 \leq x \leq 2}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 4,5 \\ \hline 625 \\ 1 \end{array}$$

$$2t^2 - t - 10 = 0.$$

$$D = 1 + 80 = 81$$

$$t_1 = \frac{1+9}{4} = 2,5$$

$$t_2 = \frac{1-9}{4} = -2$$

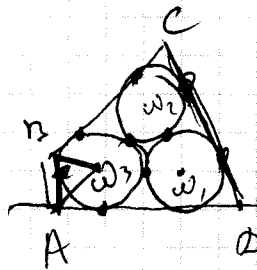
$$\begin{array}{r} 9 \cdot 10 \\ 7,00 \\ \hline 2,25 \\ 4,75 \end{array}$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1) \left(\frac{x+4}{\sqrt{x+7} + x} \right) \geq 0.$$

$$\frac{-0,5}{\sqrt{6,5}}$$

$$9 < x > -4.$$

0000000000 1
 0000000007 11
 0000000077 20
 0000000777 28



10!

$$AB + BC - AB - CD = 12.$$

0000
 0007
 0070
 0700
 7000
 0077
 0707
 7007
 7070
 7700
 0777
 0777
 7077
 7707
 7770
 7777

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{4!}{2!} =$$

15.