МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 15-031

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

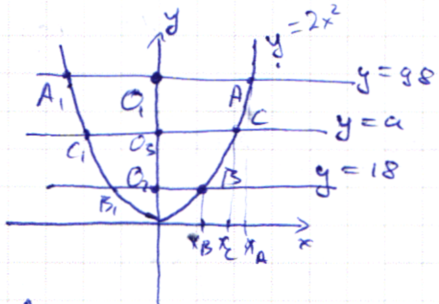
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

© МФТИ, 2017

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.



AA_1, BB_1, CC_1 – стороны треугольника.

$a>0$, иначе парабола не пересекает $y=a$.

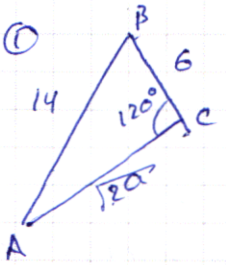
$O_1A_1 = \frac{1}{2} AA_1$, т.к. $y=2x^2$ симметрична отн. OY. Аналогично остальные.

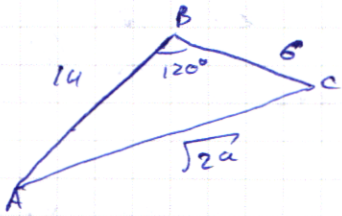
$O_1A_1 = x_A \quad y = 98 = 2x_A^2 \Rightarrow x_A = \sqrt{49} = 7 \Rightarrow AA_1 = 14$

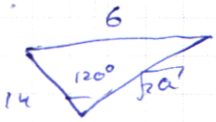
$O_2B_1 = x_B \quad y = 18 = 2x_B^2 \Rightarrow x_B = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow BB_1 = 6$

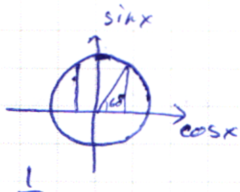
$O_3C_1 = x_C \quad y = a = 2x_C^2 \Rightarrow x_C = \sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow CC_1 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = \sqrt{2a}$

Возможны 2 варианта:

① 

② 

③ 



$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

Вариант ③ невозможен, т.к. 120° – больший угол Δ – должен лежать против большей стороны, а $14>6$.

① Т. кос. для $\triangle ABC$:

$14^2 = 6^2 + 2a + 6\sqrt{2a} \Leftrightarrow 196 = 36 + 2a + 6\sqrt{2a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 80 = a + 3\sqrt{2a} \Leftrightarrow 6400 = a^2 + 18a + 6\sqrt{2}\cdot a = a^2 + 6(3+\sqrt{2})a \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 6(3+\sqrt{2})a - 6400 = 0$

$D_1 = 9(3+\sqrt{2})^2 + 6400 =$

$= 9(9+2+6\sqrt{2}) + 6400 = 6499 + 6\sqrt{2}$

$a = \frac{-3(3+\sqrt{2}) + \sqrt{6499+6\sqrt{2}}}{1}$ – берём только $+\sqrt{D}$, т.к. $a>0$

② Т. кос. для △ABC:

$$2a = 196 + 36 + 14\cdot 6 = 232 + 84 = 316 \Rightarrow a = 158$$

Ответ: $a = 158$; $a = -3(3+\sqrt{2}) + \sqrt{6499 + 6\sqrt{2}}$.

№5.

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 \qquad 1 = \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$\Updownarrow$$

Неравенство определено при $\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>-7 \end{cases}$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$$

$$\Updownarrow$$

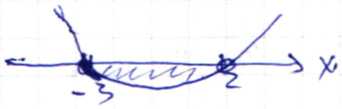
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 & (а) \\ (x+4) \geq \sqrt{x+7}-x & (б) \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 0<\sqrt{x+7}-x<1 & (а) \\ (x+4) \leq \sqrt{x+7}-x & (б) \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) (а): $\sqrt{x+7}-x>1 \Leftrightarrow \sqrt{x+7} > 1+x \Leftrightarrow x+7 > 1+2x+x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0$

$$D = 1+24 = 5^2$$

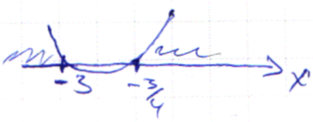
$$x = \frac{-1\pm 5}{2} = 2;\ -3$$



(б) $(x+4) \geq \sqrt{x+7}-x \Leftrightarrow 2x+4 \geq \sqrt{x+7} \Leftrightarrow 4x^2+16x \overset{+16}{} \geq x+7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4x^2+15x+9 \geq 0 \qquad D = 225-144 = 81 = 9^2$

$$x = \frac{-15\pm 9}{8} = -\frac{3}{4};\ -3$$



$$x \in \left[-\frac{3}{4};\ 2\right)$$

$\rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

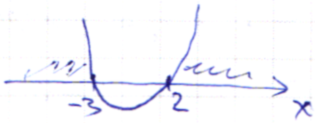
Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 a

$$0 < \sqrt{x+7} - x < 1$$

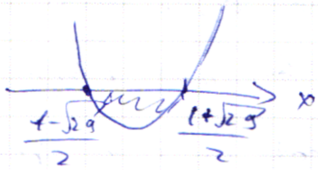
1) $\sqrt{x+7} - x < 1 \iff x+7 < 1 + 2x + x^2 \iff x^2 + x - 6 > 0$



2) $0 < \sqrt{x+7} - x \iff x^2 < x+7 \iff x^2 - x - 7 < 0$

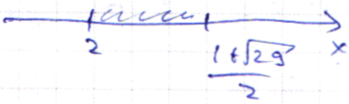
$D = 1 + 28$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$



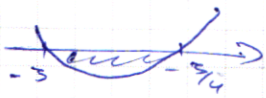
$\frac{1-\sqrt{29}}{2} > -3 \iff 7 > \sqrt{29}$

$\frac{1+\sqrt{29}}{2} > 2 \iff \sqrt{29} > 3$



б) $(x+4) \le \sqrt{x+7} - x$

$2x+4 \le \sqrt{x+7} \iff 4x^2 + 15x + 9 \le 0$



нет решений.

Ответ: $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$.

№3.

1) Случай, когда первые 7 цифр — „8".

Тогда остаётся $17-7=10$ разрядов, на каждый по два варианта — „0" или „7".

Итого $2^{10}-2 = 1024-2 = \underline{1022}$. Вычитаем два варианта, когда все „0" и все „7".

2) Случай, когда первая цифра не „8". Тогда это 7, т.к. „0" число начинаться не может. Осталось $17-8=9$ свободных разрядов, куда можно ставить „7" и „0".

Всего вариантов $2^9-1 = 512-1=511$ — вычитаем один вариант, когда все „7". Все „0" быть могут, т.к. „7" уже хотя бы одна точно есть — первая цифра.

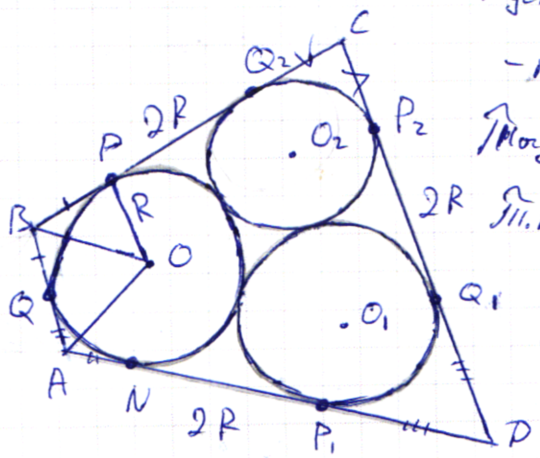
Посмотрим на расположение семи „8". Они могут занимать разряды $2-8$, $3-9$, $4-10$ и т.д. до $10-17$ — всего 9 вариантов. Для каждого варианта расстановки семи „8" 511 вариантов расстановки „7" и „0".

Всего $511 \cdot 9 = 4599$.

Всего вариантов $1022+4599 = 5621$.

Ответ: 5621.

№4.



Пусть точки $P, Q, N, P_1, Q_1, P_2, Q_2$ — точки кас. окружностей со сторонами.

Тогда $PB=QB$; $QA=NA$; $P_1D=Q_1D$; $P_2C=Q_2C$

Т.к. окружности одинак. радиуса

$NP_1 = QP_2 = Q_2P = 2\sqrt{R\cdot R} = 2R$

$AD+BC-AB-CD = 2R+2R-2R = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{R=6}$ а) $\underline{R=6}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-031

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$$

1) $\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x$

2) $\cos 10x = 2\cos^2 5x - 1 \Rightarrow \cos^2 5x = \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}$

$g(x)$ примет вид

$\frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 10x - \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2} + 4 =$

$= \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 x + \frac{1}{2} + 4$

3) $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\cos^2 2x = \cos 2x \cdot \cos 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (\cos x - \sin x)^2 \cdot (\cos x + \sin x)^2 =$

$= (1 - 2\sin x \cdot \cos x)(1 + 2\sin x \cdot \cos x) = 1 - 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\sin^2 2x = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$\frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}(1 - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x)$

$g(x)$ примет вид

$$5 - 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^2 x = 5 - \sin^2 x(8\cos^2 x + 1)$$

$g(x) = max$ при $\sin^2 x(8\cos^2 x + 1) = min$

$g(x) = min$ при $\sin^2 x(8\cos^2 x + 1) = max$

Заметим, что $\underset{\vee\!/\,0}{\sin^2 x}\,(\underset{\vee\!/\,0}{8\cos^2 x} + \underset{\vee\!/\,0}{1}) \geq 0 \Rightarrow min$ значение $- 0$

min значение при $\sin^2 x = 0 \Rightarrow$
$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \mid k \in \mathbb{Z}$

$g(x) = max = 5.$

$f(x) = \sin^2 x(8\cos^2 x + 1)$ $\quad f'(x) = \sin x \cdot \cos x(1 + 8 \cdot \cos 2x) = 0$ – т.к. $\Leftrightarrow$

ищем max знач.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{8}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\arccos -\frac{1}{8}}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

$\sin x = 0$ – б. max.

$f(x) = max$ при $\cos x = 0. \Rightarrow \sin x^2 = 1$

$g(x) = 5 - 2 = 3$

Ответ: 5 ; 3.

№7.

Пусть из первого промежутка выбрали числа $0 \cdot 45 + a_1$; $0 \cdot 45 + a_2$; $0 \cdot 45 + a_3$; ... ; $0 \cdot 45 + a_6$; из второго $1 \cdot 45 + b_1$ .... $1 \cdot 45 + b_6$ и т.д. таким же образом. ~~Где~~ $a_1 \dots a_6$; $b_1 \dots b_6$; $c_1 \dots c_6$; $d_1 \dots d_6$; $e_1 \dots e_6$ – остатки от деления соответствующих чисел на 45.

Чтобы ~~никакие два числа не~~ разность никаких двух чисел не делилась на 45, нужно, ~~чтобы~~ чтобы никакие два числа $a_1 \dots e_6$ не равнялись друг другу (теорема)

Заметим, что сумма задаётся только числами $a_1 \dots e_6$, т.к. второе слагаемое постоянно.

Тогда сумма $a_1 \dots e_6 = min$, когда это числа от 1 до 30.

Сумма чисел от 1 до 30 $S_1 = \frac{1+30}{2} \cdot 30 = 31 \cdot 15 = 310 + 155 =$
$= 465.$

Сумма вторых слагаемых в каждом постоянна и равна

$1 \cdot 45 \cdot 6 + 2 \cdot 45 \cdot 6 + \dots + 5 \cdot 45 \cdot 6 = 45 \cdot 6 (1+2+3+4+5) =$
$= 45 \cdot 6 \cdot 15 = 45 \cdot 90 = 4050$

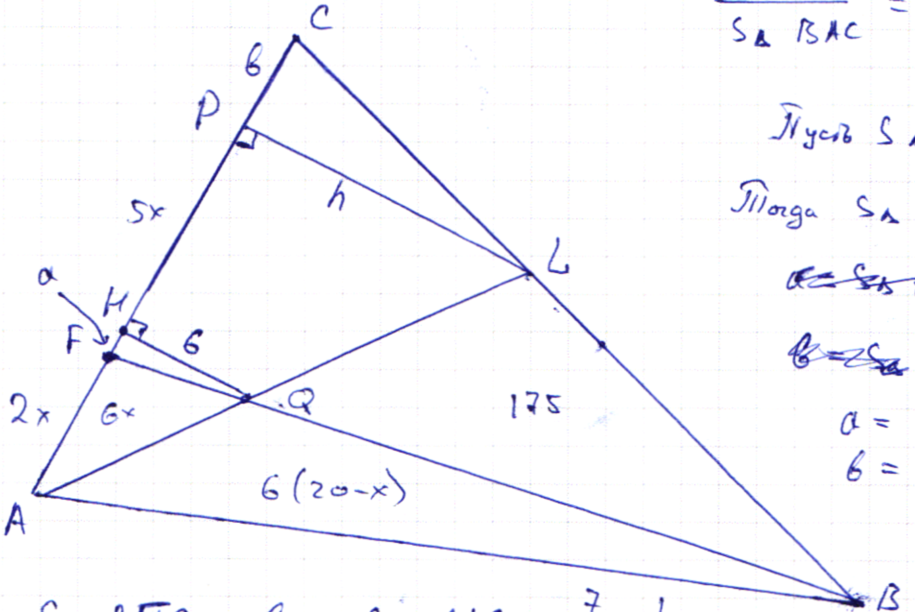
$S = 4515$

Ответ: 4515.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



$$\frac{S_\Delta BQL}{S_\Delta BAC} = \frac{5}{12}$$

Пусть $S_\Delta BAC = 420$

Тогда $S_\Delta BQL = 175$

~~$a = S_\Delta FHQ$~~

~~$b = S_\Delta$~~

$a = FH$

$b = PC$

$S_\Delta AFQ = 6x$; $S_\Delta ALC = \frac{7}{2}x \cdot h$

$\frac{S_\Delta BFC}{S_\Delta BFA} = \frac{5}{2} \Rightarrow S_\Delta BFC = 300$; $S_\Delta BFA = 120$

$S FQLC = \frac{7}{2}xh - 6x = x\left(\frac{7}{2}h - 6\right)$

$S_\Delta BFC = 300 = 175 + x\left(\frac{7}{2}h - 6\right) \Rightarrow 125 = x\left(\frac{7}{2}h - 6\right)$ ✓

$S_\Delta AQB = 120 - 6x = 6(20-x)$

~~S~~

$3a + \frac{1}{2}hb + \frac{6+h}{2}\cdot(5x - a - b) = 125$ ✓

~~$\frac{1}{2}hb + (7x-b)\cdot\frac{1}{2}\cdot h = \frac{7}{2}xh$~~

$\Delta AHQ \sim \Delta APL$ $\quad \frac{2x+a}{7x-b} = \frac{6}{h}$ ✓

~~$S_\Delta FQL = 48a = (8x-a-b)\cdot 8$~~

~~$(2x+a)\cdot 3$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$45 \cdot a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$45 \cdot b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6$

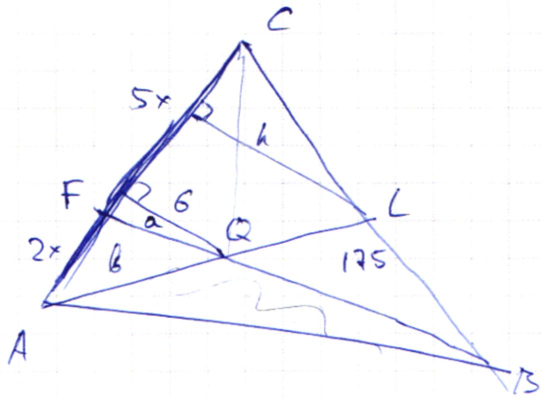
$35 \cdot 5 = 150 + 25 = 175$

$5 \cdot 7 \cdot 12 = 35 \cdot 12 =$

$= 350 + 70 = 420$

$S_\triangle ABC = 420$

$S_\triangle BQL = 175$



$S_\triangle AFQ = 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = 6x$

$S_\triangle ALC = \frac{7}{2} x \cdot h$

$S_\triangle BCF = 300$

$S_\triangle FAB = 120$

$S_{FQLC} = x\left(\frac{7}{2}h - 6\right)$

$300 = 175 + x\left(\frac{7}{2}h - 6\right)$ ✓ $\frac{2}{7}\left(\frac{125}{x} + 6\right) = h$

$S_\triangle AQB = 120 - 6x = 6(20 - x)$

$6(20-x) + 175 + \frac{7}{2} x \cdot h = 420$

$b + 6(20-x) = 120$

$\cancel{b + a + x\left(\frac{7}{2}h - 6\right)} =$

$b + a = 6x$

$a + 175 + x\left(\frac{7}{2}h - 6\right) = 300$

$\cancel{...}$

$\cancel{7} \; \cancel{21x}$ $S_\triangle FCQ = 15x$

$35 \cdot 12 = 70 \quad 35 \quad \cancel{420} \quad 420$

$\cancel{12 \cdot 7 = 84}$

$35 \cdot 5 = 175$

$3a + \frac{1}{2} hb + \frac{6+h}{2} \cdot (5x - a - b)$

$= 125$

$\cancel{(2x + a) \cdot 3}$

$\frac{1}{2} b h + (7x - b + a) = \frac{7}{2} x h$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

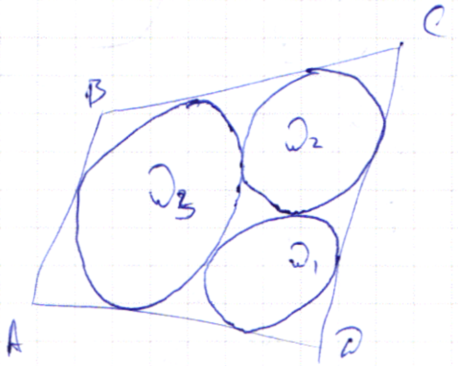
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-031

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

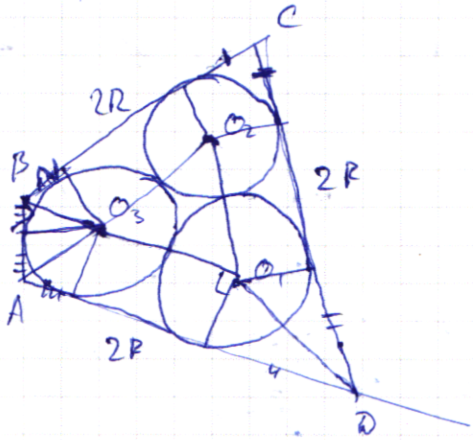


$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = (\cos x - \sin x)^2 \cdot (\cos x + \sin x)^2 =$$

$$= (1 - 2\sin x\cos x)(1 + 2\sin x \cos x) =$$

$$= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x$$



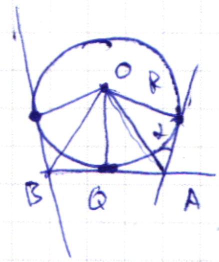
$$4R - 2R = 12$$

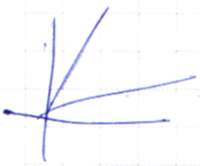
$$2R = 12$$

$$R = 6$$

δ

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$





$$\frac{OQ}{QA} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$AQ = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad AO = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$BQ = \frac{R}{\operatorname{tg}\beta} \qquad = \frac{R}{\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} =$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

$$\cos(3x + 7x) = \cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 3x \cdot \sin 7x$$

$$\cos(7x - 3x) = \cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \sin 7x$$

$$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$$

$$\cos(10x) = 2\cos^2 5x - 1 \Rightarrow \cos^2 5x = \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 = \cancel{1 - 2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$\cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(5)

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1 = \log_{\sqrt{x+7}-x}\left(\sqrt{x+7}-x\right)$$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \\ \sqrt{x+7}-x > 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 1 & (a) \\ (x+4) \geq \sqrt{x+7}-x & (б) \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 0 < \sqrt{x+7}-x < 1 & (a) \\ \sqrt{x+7}-x \geq x+4 & (б) \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

$\sin^2 x = \cos x$

$8\cos^2 x = -\sin x$

$\cos \cdot \cos$

(1) (a) $\sqrt{x+7} > 1+x$

$x+7 > 1+2x+x^2$

$\sqrt{x+7} - x = 1$

$x+7 = (1+x)^2$

$x+7 = 1+2x+x^2$

$x^2+x-6=0$

$x = -3; 2$

$17-\cancel{8}=9$

$45 \cdot 9 =$

$= 90 \cdot 4 + 45 =$

$= 360+45=405$

(3)

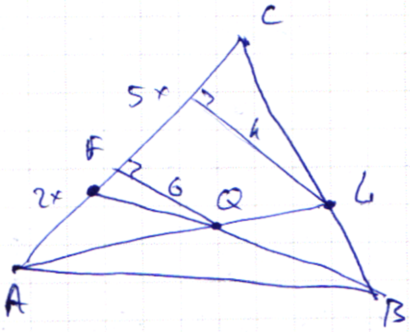
1) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

$2^9 - 2 = 510$

$\cancel{28}$ $\cancel{8}$ $2^8 - 1 = 255$

$$\frac{S_\triangle BQC}{S_\triangle BAC} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{S_\triangle FAB}{S_\triangle BFC} = \frac{2}{5}$$



$S_\triangle AFQ = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 6 = 6x$

$S_\triangle ALC = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot h = \frac{7}{2} x \cdot h$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)