

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

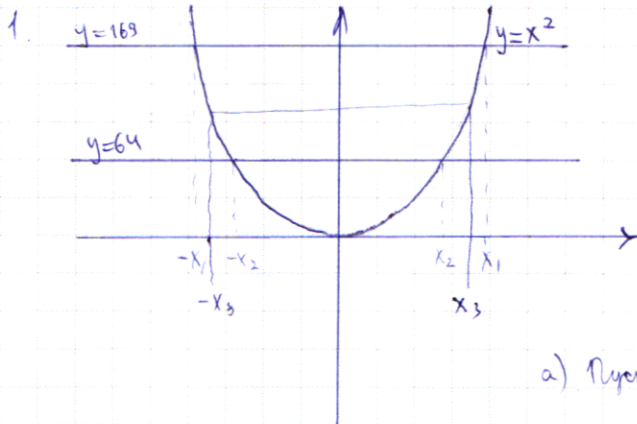
5-013

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = x^2$  пересекает прямые  $y = 169$ ,  $y = 64$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$ .
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 10$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 42$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 3 : 4$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $1 : 16$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 35]$ ,  $[36; 70]$ ,  $[71; 105]$ ,  $[106; 140]$ ,  $[141; 175]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2x_3 > 10$$

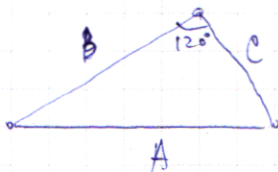
~~не получится~~, т.к. в обратном случае  
не получится составить треугольник

Найдём  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{cases} y = 169 \\ y = x_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 13 \\ -x_1 = -13 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 64 \\ y = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 8 \\ -x_2 = -8 \end{cases}$$

а) Пусть сторона, образованная пересечением графиков функций

$y = x^2$  и  $y = a$  лежат накрест  $\angle < 120^\circ$



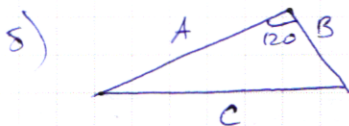
где  $B = x_1 - (-x_1) = 26$ ;  $C = x_2 - (-x_2) = 16$

$$A = x_3 - (-x_3) = 2x_3 > 0$$

По теореме косинусов  $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos 120 = B^2 + C^2 + 2BC \cos 60 = B^2 + C^2 + BC =$

$$= 676 + 256 + 26 \cdot 16 = 932 + 416 = 1348 = 2 \cdot 2 \cdot 337$$

$$A = 2\sqrt{337} = 2x_3 \Rightarrow x_3 = \sqrt{337} \quad \begin{cases} y = x_3^2 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow a = x_3^2 = \underline{337}$$

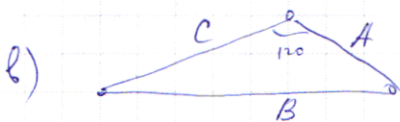


$$c^2 = A^2 + B^2 + AB \Rightarrow A^2 = c^2 - B^2 - AB$$

$$A^2 = 256 - 676 - A \cdot 26; \quad A^2 + 26A + 420 = 0$$

$$A^2 = -420 - A \cdot 26$$

$$D = 676 - 4 \cdot 420 < 0, \Rightarrow \text{нет корней}$$



$$B^2 = C^2 + A^2 + AC \Rightarrow A^2 + AC + C^2 - B^2 = 0$$

$$A^2 + 16A + 256 - 676 = 0$$

$$A^2 + 16A - 420 = 0$$

$$D = 256 - 4(-420) = 1936 = 44^2$$

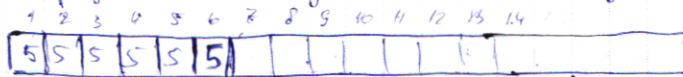
$$A = \frac{-16 + 44}{2} = \frac{28}{2} = 14 = 2x_3 \Rightarrow x_3 = 7$$

$$-x_3 = -7$$

$$\begin{cases} y = x_3^2 \\ y = a \end{cases} \Rightarrow a = x_3^2 = 49$$

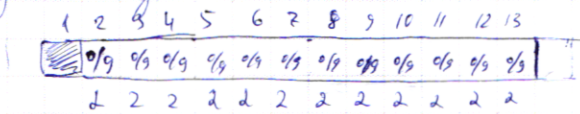
Ответ:  $a = 337$ ;  $a = 49$

3. Представим 18-значное число в виде клеток



Тогда 5 клеток, идущих подряд занимают "5", тогда их можно объединить

в одну клетку



Каждая клетка может занимать одну из 13 позиций, и для каждой позиции существуют все комбинации других цифр. Тогда общее кол-во вариантов  $13 \cdot 2^{12} - 2$  (мы отнимаем 2 варианта, т.к. в условии каждая цифра встречается хотя бы раз).

Ответ:  $13 \cdot 2^{12} - 2$

2.  $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$(\sin 7x + \cos x)^2 = \sin^2 7x + \cos^2 x + 2 \sin 7x \cos x$

$\sin 5x + \sin 9x = 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cos \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \cos 2x$

5.  $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

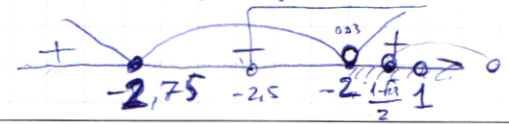
$\log_{\sqrt{x+3}-x} (5+x) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

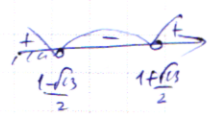
$$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 & x \geq -\frac{5}{2} \\ x+3 \leq |2x+5|^2 \end{cases}$$

$4x^2 + 25 + 20x - x - 3 \geq 0$   
 $4x^2 + 20x - x + 22 \geq 0$   
 $D = 361 - 352 = 9$   
 $x_1 = \frac{-19-3}{8} = -2,75$   
 $x_2 = \frac{-19+3}{8} = -2$



ОДЗ:  $\sqrt{x+3}-x \neq 1$   
 $\sqrt{x+3} \neq 1+x$   
 $x+3 \neq x^2 + (1+2x)$   
 $x^2 + x - 2 \neq 0$   
 $D = 1 - 4(-2) = 9$   
 $x_1 \neq -2$   
 $x_2 \neq 1$

$\sqrt{x+3}-x > 0$   
 $\sqrt{x+3} > x$   
 $\begin{cases} x+3 > 0 & x > -3 \\ x+3 > x^2 \\ x > x^2-3 \end{cases}$   
 $x^2 - x - 3 > 0$   
 $D = 13$   
 $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$   
 $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$



Ответ:  $x \in (-2, \frac{1-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{13}}{2}, +\infty)$

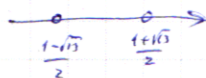


## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.  $\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$

ОДЗ:  $\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &\neq x+1 \\ x+3 &\neq x^2+2x+1 \\ x^2-x-3 &\neq 0 \\ D &= 1-4(-3) = 1+12 = 13 \\ x &\neq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad x \neq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$



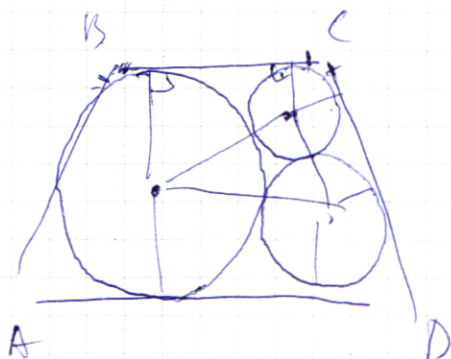
$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - x > 0 & \quad x+5 > 0 \\ \sqrt{x+3} > x & \quad x > -5 \\ \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x > 0 \\ x+5 > x^2 \end{cases} & \quad \begin{cases} x > -3 \\ x^2 - x - 3 > 0 \end{cases} \\ D = 1-4(-3) = 13 & \\ x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} & \end{aligned}$$

$$x+3 \neq x^2+1+2x$$

$$x^2+x-2$$

$$D = 1-4(-1)$$

2  $\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.  $\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x)$

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$$\begin{cases} 2x+5 < 0 & x < -\frac{5}{2} \\ x+3 > 0 & x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5 \geq 0 & x \geq -\frac{5}{2} \\ x+3 \leq (2x+5)^2 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$4x^2+25+20x-x-3 \geq 0$

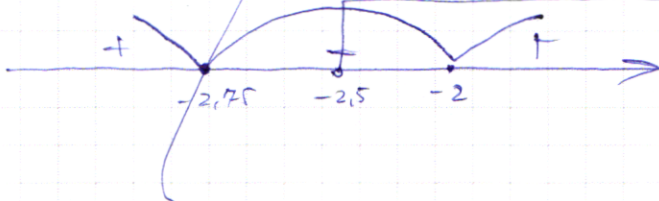
$4x^2+20x-x+22 \geq 0$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D = 361 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$

$x_1 = \frac{-19-3}{8} = \frac{-22}{8} = \frac{-11}{4} = -2,75$

$x_2 = \frac{-19+3}{8} = \frac{-16}{8} = -2$



ОДЗ:

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq x+1$

$x+3 \neq x^2+1+2x$

$x^2+x-2 \neq 0$

$D = 1-4(-2) = 9$

$x_1 \neq \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_2 \neq \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\sqrt{x+3}-x > 0$

$x+5 > 0$

$\sqrt{x+3} > 0$

$x > -5$

$x > 0$

$x+3 > 0$

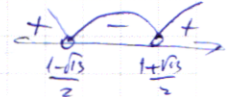
$x+3 > x^2$

$x^2-x-3 > 0$

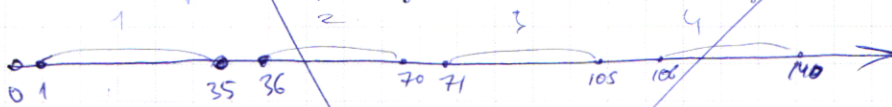
$D = 1-4(-3) = 13$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$



7. Рассмотрим промежутки на числовой прямой



35 — это четвёртое. Четвёртое число может давать разность 2-го и 1-го. Поэтому мы должны брать числа одной четвёртой. Они должны быть максимально приближены к началу своих промежутков, что сумма будет минимальна.

Будем брать числа через одно.

1, 3, 5, 7, 9  
с первого края

37 39 41 43 45  
со второго

71 73 75 77 79  
с 3-го

107 109 111 113 115

Всегда их сумма



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} \geq \log_{\sqrt{x+3}-x} \sqrt{x+3}-x$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\begin{cases} 2x+5 < 0 & x < -\frac{5}{2} \\ x+3 > 0 & x > -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+5 > 0 \\ (x+3) \leq (2x+5)^2 \end{cases}$$

$$x+3 \leq 4x^2+20x+25$$

$$4x^2-17x+22$$

$$D = 289 - 4 \cdot 4 \cdot 22$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 88 \\ \hline 4 \\ 352 \end{array}$$

$$\text{ОДЗ: } \sqrt{x+3}-x \neq 1$$

$$\sqrt{x+3} \neq x+1$$

$$x+3 \neq x^2+1+x \cdot 2$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$D = 1 - 4(-2) = 9$$

$$x = \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\sqrt{x+3}-x > 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

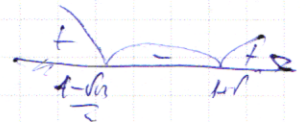
$$\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$$

$$x+3 > x^2$$

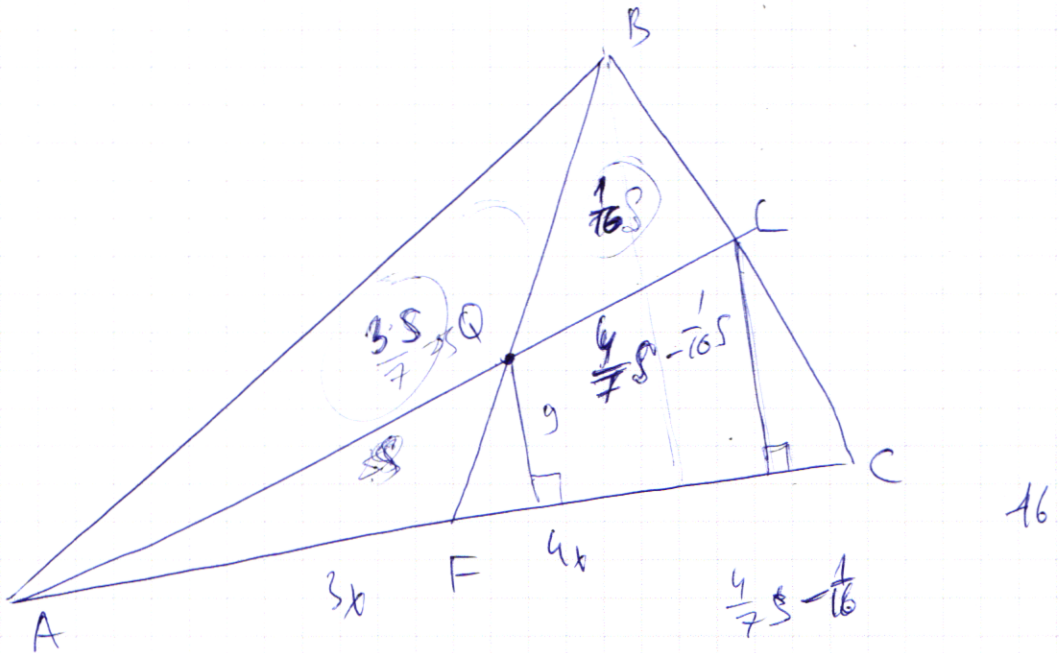
$$x^2-x-3 > 0$$

$$D = 1 - 4(-3) = 13$$

$$x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \quad \& \quad \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$



6.



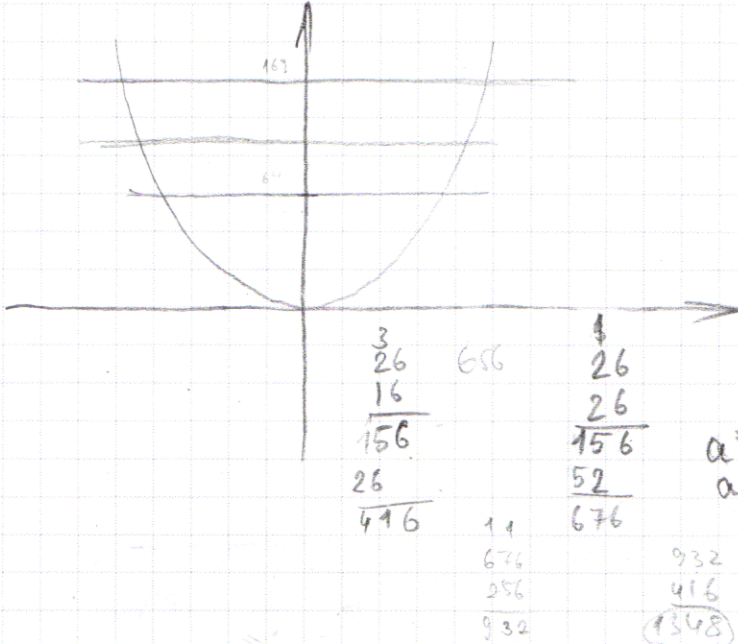
$$\frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{AF}{AC} = 1$$

$$\frac{QC}{CB} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3}$$

$$S = S_{AQF} + \frac{3S}{7}$$



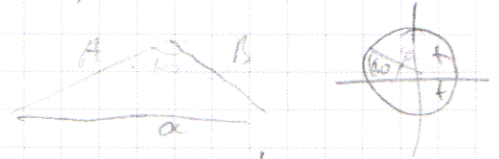
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = x^2 \quad \begin{matrix} A = 26 \\ B = 16 \end{matrix}$$

if  $y = 169$ ; then  $x = \pm 13$

if  $y = 64$ ; then  $x = \pm 8$



$$a^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos 60^\circ =$$

$$a^2 = 676 + 256 + 26 \cdot 16$$

$\sqrt{1348}$   
1348  
1348

$$g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\frac{1}{2} \sin 5x \sin 9x = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)) = \frac{1}{2} (\cos(4x) - \cos(14x)) = \frac{1}{2} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(14x)$$

$$\frac{1}{2} \cos(4x) - \frac{1}{2} \cos(14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\cos x \neq \cos y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

$x-y=10$   
 $x+y=10$   
 $2x=20$   
 $x=10$

$$\frac{\cos(14x) + \cos(4x)}{2}$$

$$\sin 5x \sin 9x - (\sin^2 7x + \cos^2 x) - 3$$

$$\sin^2 5x + \sin^2 9x + 2 \sin 5x \sin 9x$$

$$\sin^2 5x + \sin^2 9x = 2 \sin 7x \cos x$$

$$(\sin^2 7x + \cos^2 x - \sin 5x \sin 9x) - 3$$

$$(\sin 5x + \sin 9x)^2 - \sin^2 7x - 3$$

$$(\sin^2 7x + \cos^2 x - \sin 5x \sin 9x) - 3$$

$$(\sin^2 7x + \cos^2 x - 2 \sin 7x \cos x) - 3$$

$$\sin 7x + \cos^2 x - 2$$

$$(\sin^2(7x) + \cos^2 x - \sin 5x - \sin 9x)$$

$$-(\sin^2 7x - \cos^2 x) - 3$$

$$\sin 5x \cdot \sin 9x - 2 \sin 7x \cos x - 3$$

$$\sin 7x - \cos x$$

$$7 \cos 7x = \sin x$$

$$(\sin 7x - \cos x)$$

$$2 \sin 7x \cos x$$

$$-\sin 5x \neq \sin 9x + \sin 5x \sin 9x - 3$$

$$7 \cos 7x - (-\sin x)$$

$$7 \cos 7x + \sin x = 0$$

$$\begin{aligned} -7x \\ -7 \end{aligned}$$

$$\sin 7x - \cos x = 0$$

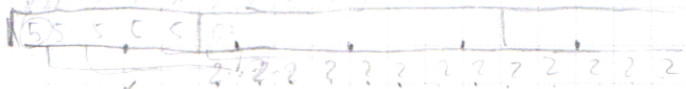
$$\sin 7x = \cos x$$

$$7 \cos 7x + \sin x = 0$$

$$7 \cos 7x = -\sin x$$



0,5,9



$$\frac{14}{22} = \frac{88}{176}$$



$$\sqrt{x+3} - x > 0$$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$x^2 + 3 > x^2$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D = 1 - 4(-3) = 13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \approx -2,2$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \approx 2,2$$

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$x+5 > 0$$

$$x \geq -3$$

$$x^2 + x - 3 = 0$$

$$\log(\sqrt{x+3} - x)(x+5) \geq 1$$

$$\log(\sqrt{x+3} - x)(x+5) \geq \log(\sqrt{x+3} - x)(\sqrt{x+3} - x)$$

$$x+5 \geq \sqrt{x+3} - x$$

$$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$$

$$\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$$

$$(2x+5)^2 \geq x+3$$

$$\begin{cases} 2x+5 > 0 \\ x > -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\log_5 5 \geq 0$$

$$x \in [-3, -2,5]$$

$$\begin{cases} 2x+5 < 0 \\ x < -\frac{5}{2} \\ x+5 \geq 0 \end{cases}$$

$$4x^2 + 25 + 20x \geq x+3$$

$$4x^2 + 19x + 22 \geq 0$$

$$D = 361 - 4 \cdot 4 \cdot 22 = 361 - 352 = 9$$

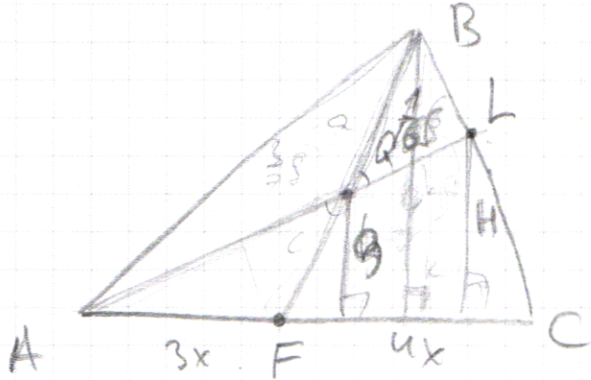
$$x_1 = \frac{-19+3}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

$$x_2 = \frac{-19-3}{8} = \frac{-22}{8} = -\frac{11}{4}$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \frac{1}{6} \quad H = ?$$

$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{FA}{AC} = 1$$

$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} \cdot \frac{3}{7} = 1$$

$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{9}{BK} = \frac{FQ}{FB}$$

$$\frac{H}{BK} = \frac{LC}{BC}$$

$$\frac{S_{ABL}}{S_{ALC}} = \frac{BL}{LC}$$

$$\frac{S_{ABQ}}{S_{AQF}}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{BL}{LC}$$

$$\frac{a+c}{b+b} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} 4x \cdot BK = \frac{4}{7} S$$

$$\frac{1}{2} H \cdot 7x = S$$

$$\frac{4BK}{7H} = \frac{4S}{7S}$$

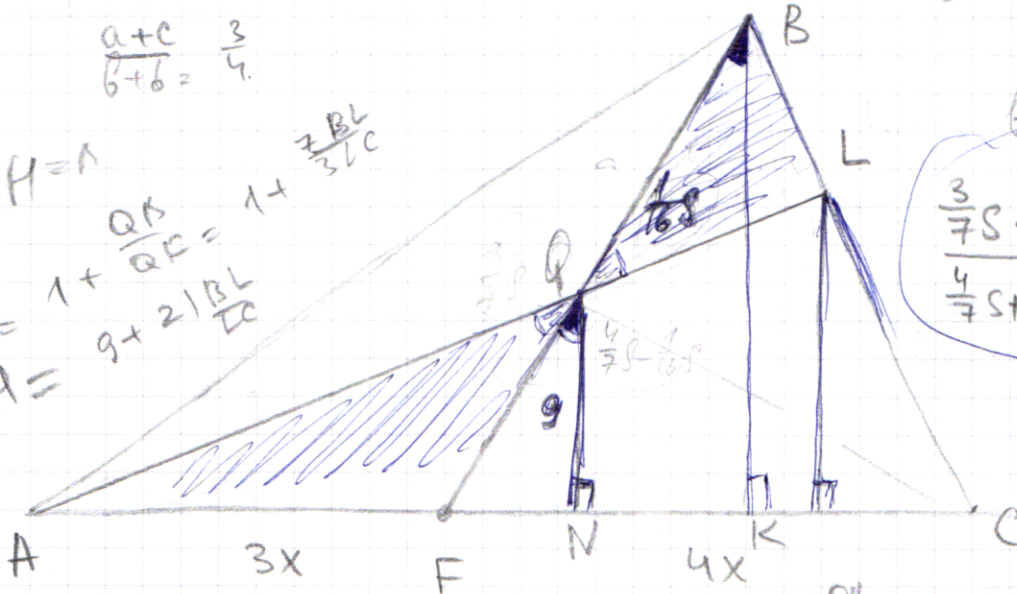
$$\frac{1}{2} BK \cdot 4x = \frac{4}{7} S$$

$$BKx = \frac{2}{7} S$$

$$\left(1 + \frac{BL}{LC}\right) H = BK$$

$$\left(1 + \frac{BL}{LC}\right) H = 1 + \frac{QF}{BF} = 1 + \frac{3BL}{3LC}$$

$$H + \frac{BL}{LC} H = \frac{4}{3} + \frac{2BL}{LC}$$



$$\frac{LC}{BL} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{H}{9} = \frac{1 + \frac{QF}{BF}}{1 + \frac{BL}{LC}}$$

$$\left(1 + \frac{BL}{LC}\right) H = BK$$

$$\frac{H}{BK} = \frac{LC}{LC+BL}$$

$$\frac{LC+BL}{LC} = \frac{BK}{H}$$

$$\frac{BK}{9} = 1 + \frac{QF}{BF}$$

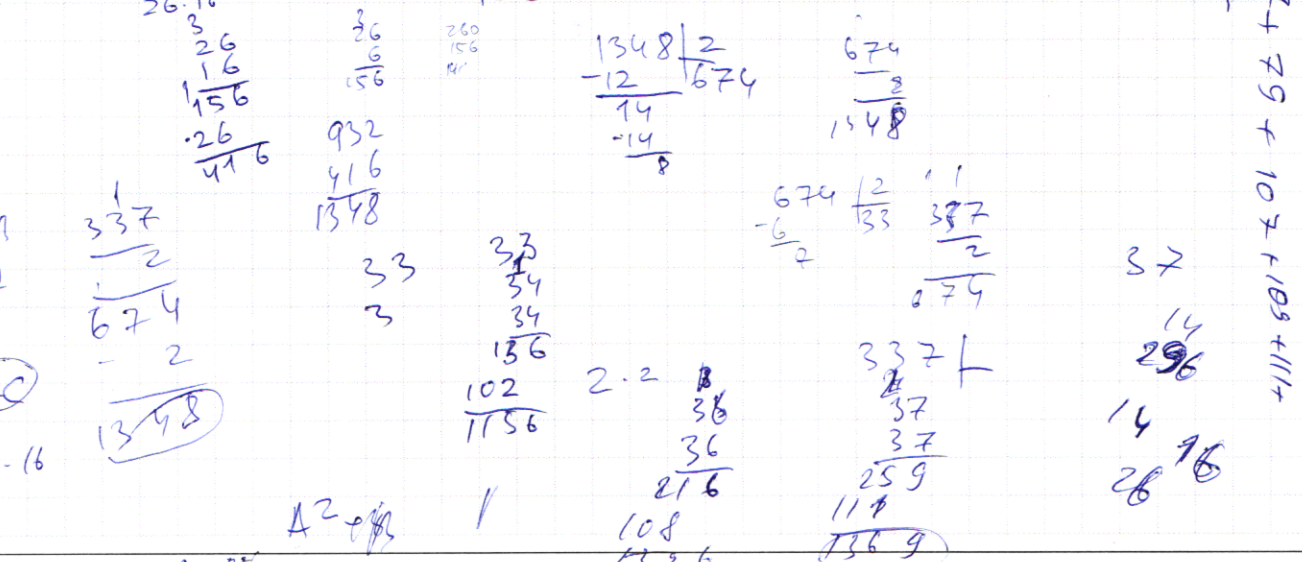
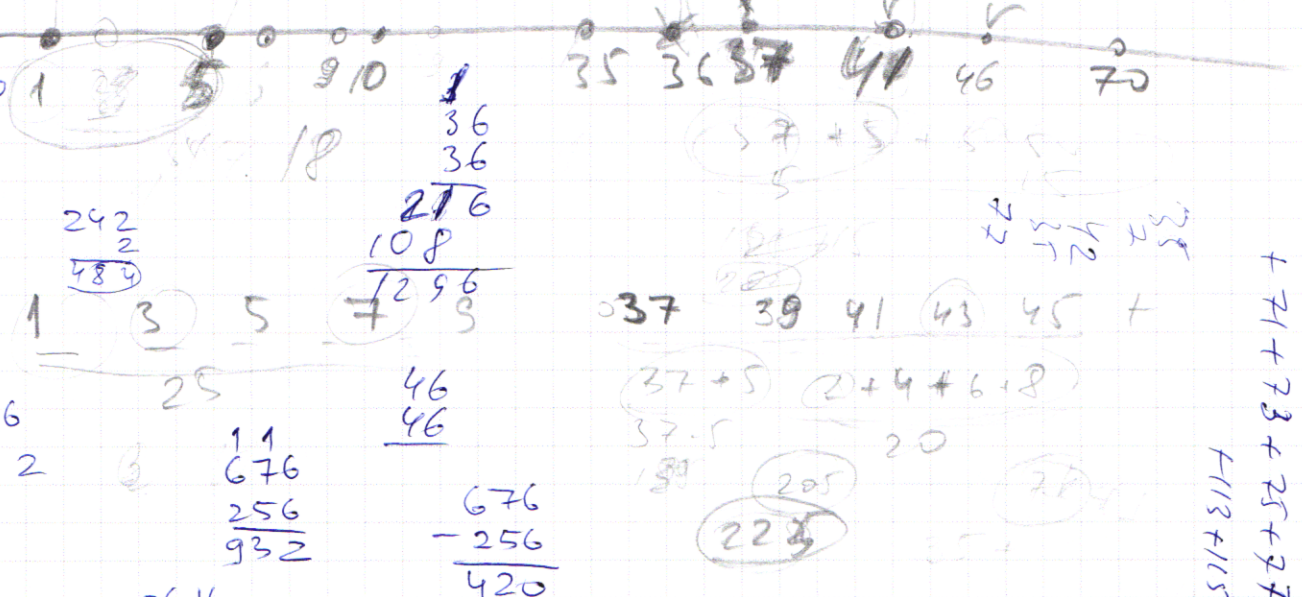
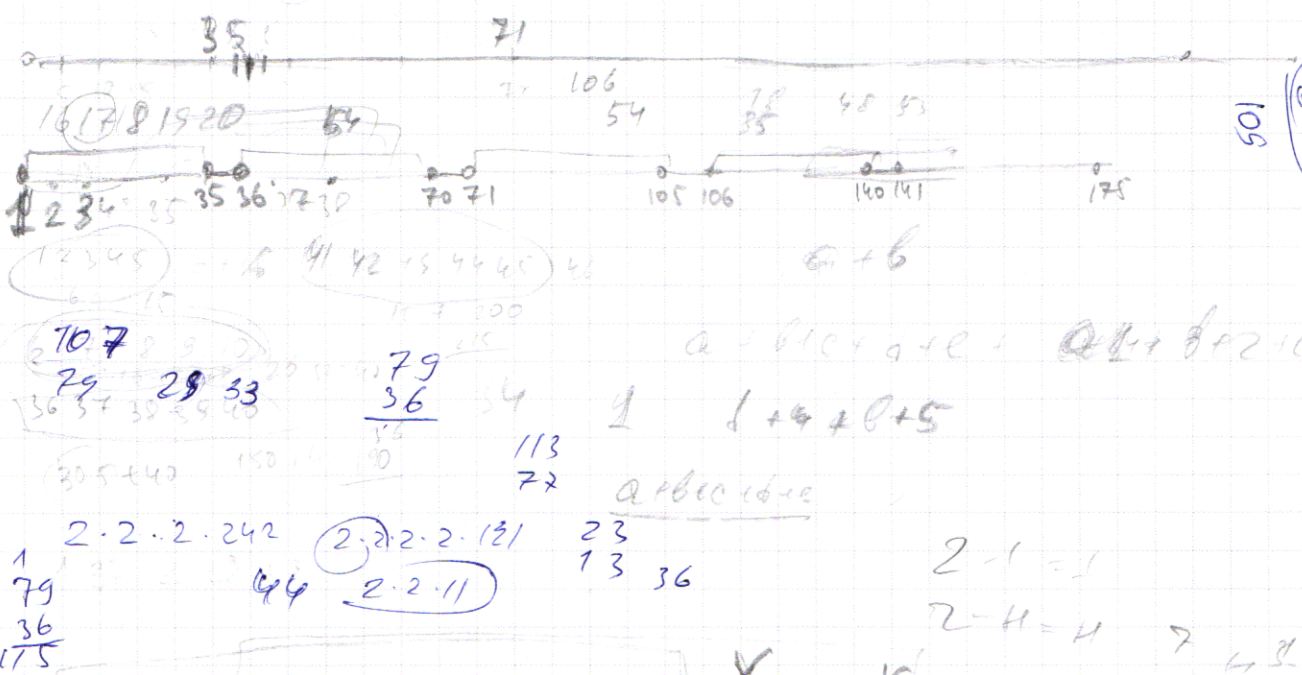
[1,35] [36,707] [71,105] [106,140] [126,141] 35 46 35 11

71  
3'  
106  
76  
44  
44  
176  
176  
1936

2  
46  
46  
276  
184  
2116  
25  
175

1936 | 2  
18 1968  
13  
12  
76  
968 | 2  
8 1936  
16

44-16  
-16  
28 2  
420  
4  
1680  
1  
1680  
256  
1936  
A  
A  
C  
A < B-C  
26-16  
1348



$A^2 + 686 + 26A - 250$