МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 15-044

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x + 4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y = 2x^2$ $y = 98$ $y = 18$ $y = a$ $\alpha = 120°$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$98 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow l_1 = 14$

$18 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow l_2 = 6$

$a = 2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a}{2}$ $(a \geq 0) \Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$

Треугольник с углом в 120° можно составить когда выполняется теорема косинусов и неравенство треугольника.

Рассмотрим 3 случая: каждая из 3-х сторон лежит напротив угла 120°

1) l_3 лежит напротив 120°

$4 \cdot \frac{a}{2} = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120 \Rightarrow 2a = 196 + 36 + 14 \cdot 6 = 232 + 84 = 316$

$\Rightarrow a = 158$

проверим неравенство треугольника: $l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{\frac{158}{2}} = 2\sqrt{79}$

$8 < \sqrt{79} < 9 \Rightarrow 14 + 6 > 2 \cdot 9 > 2\sqrt{79}$; ~~XXXXX~~ $14 + 2\sqrt{79} > 14 + 8 > 6$

$6 + 2\sqrt{79} > 6 + 8 \Rightarrow 6 + 2\sqrt{79} > 14 \Rightarrow a = 158$ подходит

2) l_1 лежит напротив 120°: $196 = 36 + 2a - 2 \cdot 6 \cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \cos 120$

$\Rightarrow 160 = 2a + 12\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow 80 = a + 6\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow 6\sqrt{\frac{a}{2}} = 80 - a \Rightarrow 36 \cdot \frac{a}{2} = 6400 - 160a + a^2$

$18a = 6400 - 160a + a^2 \Rightarrow a^2 - 178a + 6400 = 0$ $D = 178^2 - 4 \cdot 6400 = 31684 - 25600 =$

$= \sqrt{D} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 13^2} = 2 \cdot 3 \cdot 13 \Rightarrow a_1 = \frac{178 + 2 \cdot 3 \cdot 13}{2} = 89 + 39 = 128$ $a_2 = \frac{178 - 78}{2} = 50$

проверим эти значения:

1) $l_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{64} = 16$

$16 + 14 > 6$
$16 + 6 > 14$
$14 + 6 > 16$
$\Rightarrow$ подходит

2) $l_3 = 2\sqrt{\frac{50}{2}} = 2\sqrt{25} = 10$

$10 + 14 > 6$
$10 + 6 > 14$
$14 + 6 > 10$
$\Rightarrow$ подходит.

3) l_2 лежит напротив 120°: $36 = 196 + 2a - 2 \cdot 14 \cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot \cos 120$; $-160 = 2a + 28\sqrt{\frac{a}{2}}$

$a > 0 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $a = 158; 128; 50$

№2. $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\beta}{2} =$$

$$= \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1+\cos\beta}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} = 7x \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 10x \\ \beta = 4x \end{matrix}$$

$$g(x) = \frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 5x + \sin^2 5x}{2}$$

$$- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$$

$$= \cos^2 2x - \cos^2 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 =$$

$$= \cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + 4 - \frac{1}{2} = \underbrace{\cos^2 2x}_{\le 1} + \underbrace{\frac{\cos 2x}{2}}_{\le \frac{1}{2}} + \frac{7}{2}$$

$\Rightarrow \text{Max} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 1 + 4 = 5$

$f(t) = t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$ $\quad t \in [-1; 1]$

$t_0 = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$ $\quad t_0 \in [-1; 1] \Rightarrow$ Наименьшее зн $= \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{-\frac{1}{4}}{2} + \frac{7}{2} =$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{1-2+7\cdot 8}{16} = \frac{-1+56}{16} = \frac{55}{16}$

Ответ: Наибольшее $= 5$; наименьшее $= \frac{55}{16}$

№3. „0" „7" „8" ~~Рассмотрим~~ Переберем место начала ряда из 7 восьмерок:

1 вариант: ~~ряд~~ ряд начинается с позиции 1. Тогда из оставшихся 10 позиций нужно выбрать где стоит 0 и где 7, а остальные независимо выбрать $\Rightarrow 10 \cdot 9 \cdot 2^8$

2 вариант: ряд начинается не с 1 позиции $\Rightarrow [2; 11]$ – первая восьмерка. 0 не может стоять на 1 позиции $\Rightarrow$ там 7. $\Rightarrow$ осталось выбрать место для 0, и остальные значения независимо выбрать $\Rightarrow (11-2+1) \cdot 9 \cdot 2^8 = 10 \cdot 9 \cdot 2^8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\Rightarrow$ Ответ $= 10\cdot 9\cdot 2^8 + 10\cdot 9\cdot 2^8 = 10\cdot 9\cdot 2^9$

Ответ: $10\cdot 9\cdot 2^9$

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ $\qquad \sqrt{x+7}-x \neq 1$

ОДЗ: $\sqrt{x+7} \Rightarrow x+7>0 \Rightarrow x>-7$

$\sqrt{x+7}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x+7}>x$ $\quad$ 1) $x<0$ $\quad$ 2) $x\geq 0$ $\quad x+7>x^2$ $\quad x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$ $\quad x_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ $\quad x_2=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ $\quad$ + $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$ − $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$ + $\quad x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$\Rightarrow$ ОДЗ: $x\in\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\ \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

1) $\sqrt{x+7}-x>1$

$x+1<\sqrt{x+7}$ $\quad \left(\begin{matrix}x+1<0\\ x<-1\end{matrix}\right)$

$x^2+2x+1<x+7$

$x^2+2x+1-x-7<0$

$x^2+x-6<0$

$D=1+24=25$

$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$ $\quad x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

+ -3 − 2 +

$x<2$

~~$x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$~~

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$4x^2+16x+16\geq x+7$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=225-36\cdot 4$

$D=225-36\cdot 4=225-144=81 \Rightarrow \sqrt{D}=9$

~~$x_1=\frac{-15+2\sqrt{21}}{8}$ $\quad x_2=\frac{-15-2\sqrt{21}}{8}$ $\quad$ + $\frac{-15-2\sqrt{21}}{8}$ − $\frac{-15+2\sqrt{21}}{8}$ +~~

$x_1=\frac{-15+9}{8}=-\frac{3}{4}$

$x_2=\frac{-15-9}{8}=-3$

+ -3 − $-\frac{3}{4}$ +

$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{29}}{2}>\frac{1-6}{2}>-\frac{5}{2}>-\frac{6}{2}=-3$;

$\frac{1+\sqrt{29}}{2}>\frac{1+5}{2}=3>2$; $\quad \frac{1-\sqrt{29}}{2}<\frac{1-5}{2}=-2$

$\Rightarrow x\in\left(-\frac{3}{4};2\right)$

2) $\sqrt{x+7}-x<1 \Rightarrow x+4\leq\sqrt{x+7}-x$

$x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$ $\quad 2x+4\leq\sqrt{x+7}$ $\quad (x\leq -2)$ $\Rightarrow$

$x\in\left(-3;-\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow x<-\frac{3}{4}$

ОДЗ: $\frac{1-\sqrt{29}}{2}>-3 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x\in\left(-\frac{3}{4};2\right)$

№7.

Т.к. разность никаких 2-х не делится на 45 $\Rightarrow$

все остатки при делении на 45 различны

~~минимально возможная сумма остатков от деления на 45; так, чтобы никакие 2 не совпадали:~~

~~$0 + 1 + \dots + 28 + 29$ (30 слагаемых т.к. чисел 30)~~

~~$= \frac{29 \cdot 30}{2} = 29 \cdot 15$~~

Любое число из промежутка $[1;45]$ можно выразить как $0 + r$, где $r \in [1;45]$

$[46;90]$: $45 + r$ $\quad r \in [1;45]$

$[91;135]$: $90 + r$ $\quad r \in [1;45]$

$[136;180]$: $135 + r$ $\quad r \in [1;45]$

$[181;225]$: $180 + r$ $\quad r \in [1;45]$

Понятно, что у всех выбранных чисел r различны, иначе разность чисел с одинаковым r делилась бы на 45.

$\Rightarrow$ минимально возможная сумма не повторяющихся r

это $1 + 2 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31$

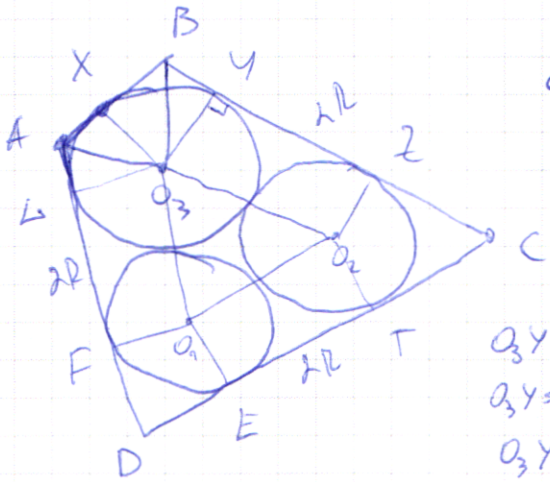
$\Rightarrow$ Сумма 6 выбранных Пиноккио чисел $\leq \frac{30 \cdot 31}{2} +$

$0 \cdot 6 + 45 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 135 \cdot 6 + 180 \cdot 6$

Ответ: $\frac{30 \cdot 31}{2} + 45 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 135 \cdot 6 + 180 \cdot 6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$AL = AX$ (как отрезки касательных)
аналогично находим еще 3 пары ($BX = BY$; $CZ = CT$; $DF = DE$)

$\Rightarrow AD + BC - AB - CD = 12 \Rightarrow LF + YZ - ET$

$O_3Y \parallel O_2Z$
$O_3Y = O_2Z = R$
$O_3Y \perp YZ$
$O_2Z \perp YZ$
$\Rightarrow O_3YZO_2$ – прямоуг $\Rightarrow YZ = 2R$

Аналогично $LF = 2R$; $ET = 2R \Rightarrow 2R + 2R - 2R = 12 \Rightarrow R = 6$

$\angle LO_3Y = 360 - \angle LO_3O_1 - \angle O_2O_3Y - \angle O_1O_3O_2 = 360 - 60 - 90 - 90 = 180 - 60 = 120^\circ$
$\angle O_1O_3O_2 = 60^\circ$ (т.к. $O_1O_2O_3$ – р/с треугольник)

XO_3YB – дельтоид $\Rightarrow O_3B$ – бис $\angle XO_3Y$
AXO_3L – дельтоид $\Rightarrow O_3A$ – бис $\angle LO_3X$
$\Rightarrow \angle AO_3B = \frac{1}{2}\angle LO_3Y = \frac{1}{2}120^\circ = 60^\circ$

$$\begin{cases} AO \cdot BO = 58 \Rightarrow BO = \frac{58}{AO} \\ AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\,BO \cdot \cos 60 \\ \sqrt{AO^2 - 6^2} + \sqrt{BO^2 - 6^2} = AB \end{cases}$$

система из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными $\Rightarrow$ можно найти AB.

$$AO^2 - 36 + BO^2 - 36 + 2\sqrt{(AO^2-36)(BO^2-36)} = AB^2 = AO^2 + BO^2 - 58$$

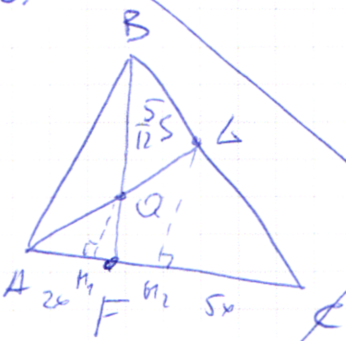
$$-72 + 2\sqrt{(AO^2 - 36)\left(\frac{58}{AO^2} - 36\right)} = -58$$

$$\sqrt{(AO^2-36)\left(\frac{58^2}{AO^2} - 36\right)} = \frac{14}{2} = 7$$

$$58^2 - \frac{36 \cdot 58^2}{AO^2} - 36AO^2 + 36^2 = 49 \qquad AO^2 = t$$

$$58^2 - \frac{36 \cdot 58^2}{t} - 36t + 36^2 = 49$$

№6.



$\angle M_2 - ?$

$QH_1 = 6$

$S_{BAC} = S$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12} \Rightarrow S_{BQL} = \frac{5}{12}S$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{ABF} = \frac{2}{7}S$

$\Rightarrow S_{CLQF} = S - \frac{5}{12}S - \frac{2}{7}S = \frac{25}{84}S$

$58^2 - \frac{36\cdot58^2}{t} - 36t + 36^2 = 49$

$58 - 49 = 9$ $\quad 36\cdot4 = 144$ $\quad 58\cdot4 = 232$

$9 - \frac{36\cdot58}{t} - 36t + 36\cdot76 = 0 \;\;|:9$

$1 - \frac{4\cdot58}{t} - 4t + 4\cdot36 = 0$

$4t^2 - 145t + 232 = 0$

$D = 21025 - 3712 =$

$-36t^2 + (58^2+36^2-49)t - 36\cdot58^2 = 0$

$D = (58^2+36^2-49)^2 - 4\cdot36^2\cdot58^2$

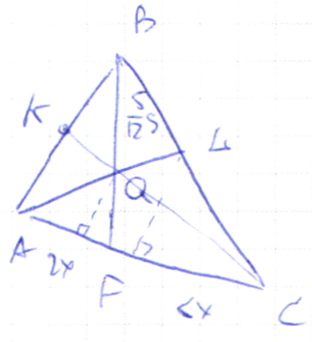
$AO^2 = \frac{58^2+36^2-49-\sqrt{D}}{-72}$

$BO = \frac{58}{AO}$

$AB = \sqrt{AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cdot\cos60}$

Ответ: ~~R=60~~ $R=6$; $\angle AOB = 60°$

№6



$S_{BAC} = S$

$S_{BQLC} = \frac{5}{12} S$

$S_{ABF} = \frac{2}{7} S$

$\Rightarrow$ ~~SBAC~~ $S_{FQLC} = \frac{25}{84} S = S - \frac{5}{12} S - \frac{2}{7} S$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{BK}{KA} \cdot \frac{2}{7} \cdot FQ/QB = 1 \\ &\frac{CL}{LB} \cdot \frac{BA}{AK} \cdot \frac{KQ}{QC} = 1 \\ &\cancel{CF}\ \frac{5}{7} \cdot \frac{AB}{BK} \cdot \frac{KQ}{QC} = 1 \end{aligned}\right\}$$ Теоремы Менелая:

$\frac{FQ \cdot QA}{BQ \cdot QL}$ - ?

S_{AFQ} - ?

Теоремы Менелая

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{BK}{KA} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{FQ}{QB} = 1 \quad (\triangle ADF) \\ &\frac{AK}{BK} \cdot \frac{BC}{CL} \cdot \frac{LQ}{QA} = 1 \quad \triangle(ABL) \\ &\frac{2}{5} \cdot \frac{CB}{BL} \cdot \frac{LQ}{AQ} = 1 \quad \triangle(BFC) \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow \frac{AK}{BK} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\cancel{BC} \cdot BL}{CL \cdot \cancel{CB}} = \frac{BL}{CL} \cdot \frac{1-k}{k}$

$\frac{FQ \cdot QA}{BQ \cdot LQ} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{CL}{BC} = 1$

$\frac{CL}{BC} = k$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-044

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AO\cdot BO = 58 \Rightarrow BO = \frac{58}{AO}$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - \cancel{AO\cdot BO\cdot}$

$\sqrt{AO^2-36} + \sqrt{BO^2-36} = AB$

$\cancel{AO^2} - 36 + \cancel{BO^2} - 36 + 2\ldots = \cancel{AB^2} = \cancel{AO^2+BO^2} - 58$

$-72 + 2\ldots = -58$

$2\ldots = 14$

$\sqrt{(AO^2-36)\left(\frac{58}{AO^2}-36\right)} = 7$

$58 - \frac{36\cdot 58}{AO^2} - 36AO^2 + 36^2 = 49$

$72 - 58 = 14$

$58 + 14 = 72$

$72 - 58 = 14$

$232 \times 6 = 928$

$928 \times 4 = 3712$

145×145: 725, 580, 145, $= 21025$

$21025 - 3712 = 17313$

$17313 : 3 = 5771$

$5771 : 3 = 19\ldots$

$725 - 145 = 580$

$\frac{58}{AO} =$

$58 : 2 = 29$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

ОДЗ: $x+7\geq 0 \quad x\geq -7$

$\sqrt{x+7}-x>0 \quad \sqrt{x+7}>x \quad x<0$ – может.

$x+7>x^2 \quad x^2-x-7<0$

$D=1+28=29$

$x_1=\frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$+ \quad - \quad +$; $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$x+4>0 \quad x>-4$

$\frac{BL}{LC}$ – ?

1) $\sqrt{x+7}-x<1$

$x+4\leq\sqrt{x+7}-x$

$x\in(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$

$2x+4\leq\sqrt{x+7}$

$2x+4\leq 0$

$x\leq-\frac{4}{2}=-2$

$x\leq-2$

$\sqrt{x+7}\geq 2x+4$

$x+7\geq 4x^2+16x+16$

$4x^2+15x+9\leq 0$

$D=225-80=137$

$x_1=$

$x^2+2x+1>x+7$

$x^2+x-6>0$

$D=1+24=25$

$x_1=\frac{-1+5}{2}=2$

$x_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

$x\in[-4;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$x\in(-4;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$10\cdot 9\cdot 2^8$

$x\in[0;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$+ \quad - \quad +$; -3, 2

$10\cdot 9\cdot 2^8$

$2^8\cdot 10\cdot 9$

$\log_{\frac{1}{2}}2>-1$

$\log_{\frac{1}{2}}1=0$

$\log_{g(x)}f(x)\geq\log_{g(x)}g(x)$

$(g(x)-1)(f(x)-g(x))\geq 0$

$\frac{BQ}{BF}=k$

$x+1>\sqrt{x+7}$

2) $\sqrt{x+7}-x>1$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$\frac{2}{7}S$

$\times\frac{36}{4}$
144

$\frac{225}{144}$
121

$S_{BQL}=\frac{5}{12}S$

$2x+4\geq\sqrt{x+4}$

$4x^2+16x+16\geq x+4$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=225-364=225-144=121$

$\sqrt{D}=11$

$x_1=\frac{-15+11}{8}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}$

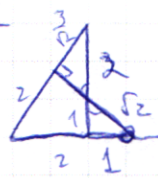
$x_2=\frac{-15-11}{8}=-\frac{26}{8}=-\frac{13}{4}$

$1-\frac{2}{7}-\frac{5}{12}=$

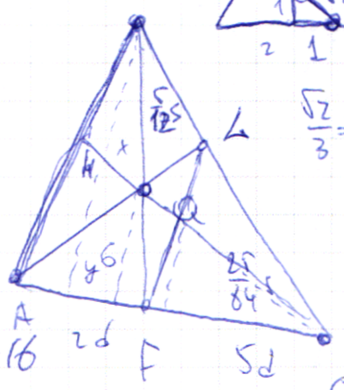
$\frac{7}{12}-\frac{2}{7}=$

$\frac{49-24}{12\cdot 7}=\frac{25}{84}$

$11-1+1=11$



$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}$



$S_{QFCL}=\frac{25}{84}S$

$\times\frac{15}{15}$, 75, 15, 225

$-\frac{13}{4} \quad -\frac{1}{2}$

11 12 13 14 15 16 17

$\frac{S_{BQL}}{S_{BHC}}=\frac{5}{12}$

h – ?

$\frac{5}{12}+\frac{25}{84\cdot 7}=$

$\frac{6\cdot 12}{84}=\frac{6}{7}$

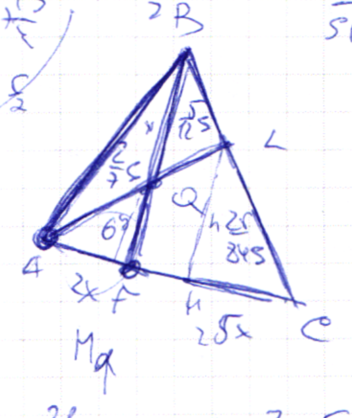
LH_2 – ? $\quad 84:4$

$\frac{225}{144}=21$

$-\frac{225}{144}$
84

$\frac{5(12-7)}{12\cdot 7}=$

$\frac{5\cdot 5}{12\cdot 7}=\frac{25}{84}$



$\frac{AQ}{QL}=\frac{12x}{8}$

$\frac{BQ}{QF}=\frac{x}{y}$

$2d\cdot 6=y \quad y=12d$

$S_{AEF}=\frac{2}{7}S_{ABC}$

$S_{ABQ}=\frac{BQ}{BF}\cdot\frac{2}{7}S$

$\frac{BQ\cdot QL}{BF\cdot AF}=\frac{\frac{5}{12}S}{y}$

$\frac{BQ}{BF}$ – ?

$x+y=\frac{2}{7}$

y – ?

$x+y=\frac{2}{7}S \quad \frac{36}{4}$

$1-\frac{2}{7}-\frac{5}{12}=$

$=\frac{5}{7}-\frac{5}{12}=\frac{5\cdot 12-5\cdot 7}{12\cdot 7}=$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-044
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. 0, 7, 8 $4x^2+15x+9\geq 0$ $C_{10}^1 \cdot C_9^1$ $10\cdot 9\cdot 2^8 +$
$+ 9\cdot 10\cdot 2^8$

ровно 7 8, идущих подряд ?

$\frac{128}{2} =$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{17}$ $34\cdot 2 = 78$

$17 - 7 + 1 = 11$ позиц

$178 \cdot 178 = 31684$

$\frac{178}{2} = 89$

$2^{10} + 10\cdot 2^9$

$178\cdot 8 = 1424$ $56 + 6$ $178\cdot 7$ $3-2+1$ 7   1

$9\cdot 2^8 \cdot 19 = 190\cdot 2^8$

11 12 13 14 15 16 17

$9\cdot 4 = 36$

$36\cdot 4 = 144$

1246

$178\cdot 78$, 256 $\frac{256}{2} = 128$

$225 - 144 = 81$

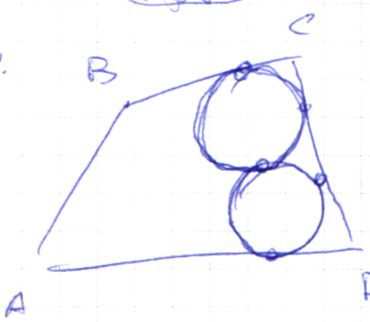
$140 + 60 = 240$

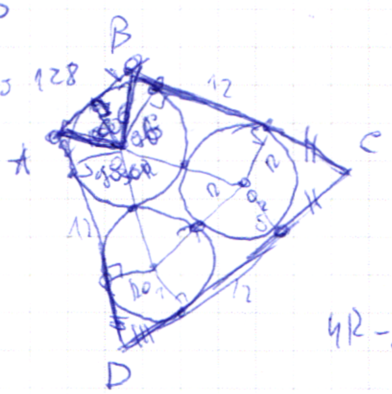
$AB = AD + BC - CD - 12$

$AD + BC - AB - CD = 12$

$AO\cdot BO = 58$

№4.





$1-6$ $60°$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}$ $-\frac{5}{2}$

$2x+4 \geq x+2$ $1+\sqrt{24}$

$4R - 2R = 12$ $R = 6$

$15\cdot 15 = 225$

$\frac{120}{2} = 60$

$31684 - 25600 = 6084$

6084	2
3042	2
1521	3
507	3
169	13
13	

$AO\cdot BO = 58$

58

$360 - 240 = 120$

$AO^2 + BO^2 - ?$

$-\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cos 60 \\ \sqrt{AO^2 - 36} + \sqrt{BO^2 - 36} = AB \\ AO\cdot BO = 58 \quad BO = \frac{58}{AO} \end{cases}$$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 + 2\sqrt{(AO^2-36)(BO^2-36)}$

$-36-36 = -72$

$1+2+3 = 6$

$AB - \sqrt{AO^2-36} = \sqrt{BO^2-36}$

$AB^2 - BO^2 = AO^2 - 58$

$58 - 36 = 22$

$38\cdot 4 = 144$

$AB^2 - 2AB\sqrt{AO^2-36} = BO^2 - 36$

$2AB\sqrt{AO^2-36} = AB^2 - BO^2 + 36 = AO^2 - 58 + 36 = AO^2 - 22$

$225 - 144 = 84$

$4AB^2(AO^2-36) = AO^4 - 44AO^2 + 22^2$

$4x^2 + 16x + 16 \geq x + 2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-044

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2$ $y=98$ $y=18$ $y=a$

$\frac{y}{2}=49$ $\frac{y}{2}=9$

$a=6$ $a\geq 0$ $\frac{154}{2}=77$ $-\frac{1}{2}$

$\frac{196}{2}=$ $b=14$

$98=2x^2$ $18=2x^2$

$x^2=49$ $x=\pm 3$ 94

$x=\pm 7$

$c=2\sqrt{\frac{a}{2}}=2\sqrt{\frac{a}{2}}$ $2\sqrt{77}$

$\cos 120=\cos(60+60)=$

$a=2x^2$

$\cos^2 60-\sin^2 60=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

$x^2=\frac{a}{2}$ $\Sigma\to\min$?

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}}$ 21684

$6^2+14^2-2\cdot 6\cdot 14\cdot\cos 120=$

$98+18+42$

$36+196+2\cdot 6\cdot 14\cdot\frac{1}{2}=2a$

$8<\sqrt{77}<9$ $140+18=158$

$a=18+98+42=60+98=158$

$\frac{158}{2}=79$

$2\sqrt{77}<6+14$ $2\sqrt{77}+6>14$ $16+6>14$

$2\sqrt{77}<18<6+14$ $2\sqrt{77}+14>6$

$6400\cdot 4=25600$

$178\cdot 7=1246$

$21684-25600$

$14^2+2a+2\cdot 14\cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{1}{2}=36$ $\varnothing$

$196-36=160$

$a>0$

$6^2+2a+2\cdot 6\cdot 2\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{1}{2}=196$

4 остатков

все остатки $2a+12\sqrt{\frac{a}{2}}=160$ $a>0$ $\frac{QF}{BF}=x$

нужные.

$a+\sqrt{\frac{a}{2}}=80$ $160+18=178$

$80-a=6\sqrt{\frac{a}{2}}$ $6400-160a+a^2=18a$

$a^2-178a+6400=0$

$\frac{6\cdot 2d}{h\cdot 7d}=\frac{4h}{\frac{25}{84}+y}$

$D=\frac{84}{144}\cdot\frac{7}{5}\cdot k=1$ $D<0\Rightarrow\varnothing$

$\frac{12}{7}h=\frac{y}{\frac{25}{84}+y}$

$+5+91.5$ $0,1\ldots 29$

21.15 $\frac{29\cdot 30}{2}=$ $+136.5$ $1\ 2\ 3$ $+181.5$ $3\cdot 4$

$+46.5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2. $y(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\cancel{5x+2x}$ $\quad \cancel{3x+2x}$ $\quad 5x$

$\cancel{\sin\alpha\cos\beta}$ $\quad \sin\alpha \sin\beta$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cancel{\cos} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} =$

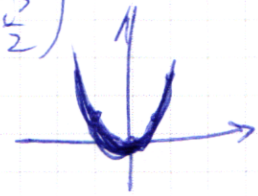
$\cancel{\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right) - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}$ $\quad \left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$

$\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$

$\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\beta}{2} - \left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2} = \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\beta}{2} +$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}$

$\cos\beta \;\cancel{\circ}\; \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$



$= \cos\beta - \cos\alpha \;\cancel{+}\; \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} \;\cancel{-}\; \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$

$\left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right) \quad \left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cancel{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}$

$\cancel{\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)} \quad \left(1-\cos^2\frac{\beta}{2}\right)$

$\cancel{-\cos^2\alpha + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}$

$\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{\sin^2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos^2\frac{\beta}{2}} = \sin^2\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos^2\frac{\beta}{2}} - \cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos^2\frac{\beta}{2}}$

$\left(1-\sin^2\frac{\beta}{2}\right)$ $\qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cancel{\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}}$ $\qquad \cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\beta}{2} - \frac{1+\cos\alpha}{2} =$

$\cos\beta - \cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\qquad = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2}$

$\begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} = 7x \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = 3x \end{cases}$ $\quad \cancel{\alpha}\quad \alpha = 10x \quad \beta = 4x \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ $\quad \cos^2 x + \sin^2 x$ $\quad -\cos^2 x + \sin^2 x$

$\frac{\cos 4x - \cos 10x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$ $\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \frac{56-1}{16} = \frac{55}{16}$

$= \cancel{\cos^2 2x - \sin^2 2x - \cos^2 5x}$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad \frac{2\cos^2 2x - \cancel{1} - 2\cos^2 5x + \cancel{1}}{2} - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4 = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4$

$= \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 = \cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + 4 - \frac{1}{2} = \cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{8-1}{2} =$

$\cos^2 2x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{7}{2}$ $\qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 5$ $\qquad x^2 + \frac{x}{2} + \frac{7}{2}$ $\quad x \in [-1; 1]$

$1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{6}{2} + 3 = 4$

$x^2 + \frac{x}{2}$ $\quad \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$ $\quad 1 - \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)