МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 9 - 29

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

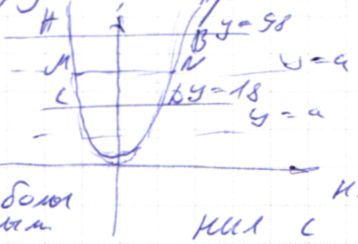
9-29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $y=2x^2$; $y=98$; $y=18$; $y=a$. При каких a будет Δ-ник с углом $120°$ – ?



Получается такой рисунок: – Из этого следует, что $a>0$, чтобы выполнялось условие пересечения с параболой $y=2x^2$.

Обозначим т-ки пересечения параболы с прямым

1) Рассмотрим т-ки пересечения $y=98$ и $y=2x^2 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(A;B)=2\cdot 7=14$

2) Аналогично для $y=18 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow \rho(C;D)=2\cdot 3=6$

3) И 3-я прямая, когда $y=a$ и $y=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho(M;N)=\sqrt{2a}$.

Тогда для выполнения условия с треугольником воспользуемся т. косинусов, имеем 3 случая: (I) $MN^2=AB^2+CD^2-2AB\cdot CD\cdot\cos 120°$

$2a=196+36-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 14\cdot 6$

$2a=316 \Rightarrow a=158$

(II) $AB^2=MN^2+CD^2-2MN\cdot CD\cdot\cos 120°$

$196=2a+36-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2a}\cdot 6$ Пусть $\sqrt{2a}=t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2+6t-160=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-16 \Rightarrow \varnothing \\ t_2=10 \end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2a}=10$

$2a=100 \Rightarrow a=50$

(III) $CD^2=MN^2+AB^2-2AB\cdot MN\cdot\cos 120°$

$36=2a+196-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{2a}\cdot 14$ Пусть $\sqrt{2a}=t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2+14t+160=0$ $D=196-4\cdot 160<0 \Rightarrow t\in\varnothing$

Ответ: при $a=158$ и $a=50$ из этих 3-х отрезков можно составить Δ с углом $120°$.

№2 Найти min и max от ф-ии $g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

Возьмём производную от $g(x)$: $g'(x)=(\sin 3x)'\sin 7x+\sin 3x\cdot(\sin 7x)'+$
$+(-2\sin x\cos x)+2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5=3\cos 3x\cdot\sin 7x+7\sin 3x\cdot\cos 7x+$
$+\cancel{2\sin x\cos x}(-\sin 2x)-5\sin 10x=\frac{3}{2}(\sin 10x+\sin 4x)+\frac{7}{2}(\sin 10x+\sin(-4x))+$
$+(-\sin 2x)-5\sin 10x=\frac{1}{2}(10\sin 10x+10\sin 4x)-\sin 2x-5\sin 10x=$
$=5\sin 10x+5\sin 4x-\sin 2x-5\sin 10x=5\sin 4x-\sin 2x$

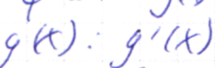
Исследуем производную на 0: $5\sin 4x-\sin 2x=0$

$10\sin 2x\cos 2x=\sin 2x$

• Пусть $\sin 2x=0$, тогда $\Rightarrow 2x=\pi n \Rightarrow x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

• Пусть $\sin 2x\neq 0 \Rightarrow \cos 2x=\frac{1}{10} \Rightarrow 2x=\pm\arccos\frac{1}{10}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{\arccos\frac{1}{10}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

По графику производной  , и max в т-ке $x=\frac{\pi}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow$

Ответ: min значение ф-ии $g(x)=0$

max значение ф-ии в т. $x=\frac{\pi}{2}$ и оно равно 4

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3 У нас есть 17-значное число из цифр „0", „7" и „8" и 8-ок 7шт. подряд.

I Пусть 8-ки занимают 1-7-ю позиции, тогда на 8-м месте может быть или „7" или „0" – т.е 2 выбора,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

~~и остальные~~ и ещё одно место будет так же 2 выбора, что бы ~~не повторя~~ были все 3 цифры в числе, тогда остаётся 8 позиций по 3 т.е 3^8 выбора, т.е. для этого случая имеем $2\cdot2\cdot3^8$ видов чисел;

II Пусть 8-ки занимают 2-8-е места => на 1-м месте может быть только 1 выбор – „7"-ка т.к если будет 0, то будет 16-значное число. На 9-й позиции могут стоять 2 числа и должно быть ещё одно, где 2 выбора, чтобы все цифры были задействованы => => остаётся 3^7 выборов и всего $2\cdot2\cdot3^7$.

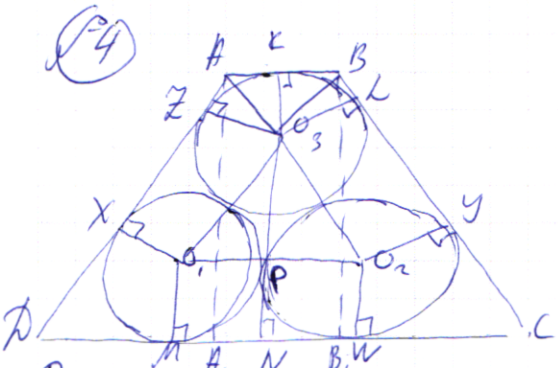
III Пусть 8-ки занимают со 3-й по 9-е и до 10-й по 16-ю ячейки – это 7 шт. вариантов; 1-я цифра – 2 выбора ~~и~~ ещё 2 по 2 выбора, которые обеспечат, чтобы рядом с 7-ю 8-ками не стояли ещё 8-ки итого остается 3^7 выборов итого $7\cdot2\cdot2\cdot3^7$

IV Пусть 8-ки стоят с 11-й по 17-ю, тогда у ячейки № 10 будет 2 варианта выбора, у ячейки №1 – 2 варианта выбора и ~~ещё одна, но 2 которые обеспечат то, что все цифры разные =>~~ => $2\cdot2\cdot3^8$ выборов

Складываем все варианты: $2^2\cdot3^8+2^2\cdot3^7+7\cdot2^2\cdot3^7+2^2\cdot3^8=$
$=2^3\cdot3^8+8\cdot2^2\cdot3^7=2^3\cdot3^7(3+2^2)=2^3\cdot3^7\cdot7$

Ответ: количество искомых чисел: $2^3\cdot3^7\cdot7=56\cdot3^7=56\cdot2187=122472$

№4



Дано: ABCD – 4-ник
ω_1 – AD и DC;
ω_2 – DC и CB;
ω_3 – CB, BA и AD.
$R_1=R_2=R_3=R$
а) R – ?, если $AD+BC-AB-CD=12$
б) O_3 – центр ω_3; $\angle AO_3B$ – ?
в) $AO\cdot BO=58$; AB – ?

Решение: т.к. окружности вписанные, то проведём радиусы – R на стороны ABCD: O_3L, O_3Z; O_1M; O_1X; O_2W; O_2Y. А также соединим O_1, O_2 и O_3 => что радиусы в этом соединении будут ⊥ => $\Delta O_1O_2O_3$ – равносторонний, т.к каждая из сторон равна $2R$ => проведём O_3P: $O_3P\perp O_1O_2$ => $O_3P=\sqrt{4R^2-R^2}=R\sqrt{3}$. Также же описанный 4-2ник ABCD должен быть равнобедренной трапецией, т.к $AZ=AK=KB=BL$ (свойство касательных к окружности), аналогично $XD=DM$; $YC=CW$; $MN=NW=2R$; $ZX=LY=2R$ (от ⊥ O_1O_3 и ⊥ O_3O_2) => что $AD=BC$ => => ABCD – равноб. трапеция

Проведём AA_1 и $BB_1\perp DC$ => $DA_1=B_1C=\frac{DC-AB}{2}$; $AA_1=2R+R\sqrt{3}=R(2+\sqrt{3})$

$S_{ABCD}=\frac{AB+DC}{2}\cdot AA_1=2S_{AA_1D}+S_{ABB_1A_1}$ <=> $\frac{AB+BC-12}{2}\cdot R(2+\sqrt{3})=2\cdot\frac{1}{2}R(2+\sqrt{3})\frac{DC-AB}{2}+R(2+\sqrt{3})AB$

Получаем, что $DC=BC-12$ и => $AD+DC-AB-CD=0$ => $AD=AB$ =>
=>

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Продолжение №4) Пусть $\angle AO_3B = \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AO_3B$ по т. косинусов: $AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\gamma$

$AB = AD$ ~~$AD^2 = $~~ $AD^2 = AA_1^2 + DA_1^2 = R^2(2+\sqrt{3})^2 + \frac{(DC-AB)^2}{4}$

Получили, что $2R^2(1-\cos\gamma) = R^2(2+\sqrt{3})^2 + 38 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\gamma = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ (из того, что $\triangle$ равноб. и в описется из $\cup AB$) $\gamma = 120°$

$R^2\left(2(1-\cos\gamma) - (2+\sqrt{3})^2\right) = 38$

$R = \frac{38}{4+4\sqrt{3}} = \frac{19}{2+2\sqrt{3}}$

$AO \cdot BO = 58$ $\quad AB - ?$

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO \cdot \cos\gamma$

$AB^2 = 29^2 + 4^2 - 2\cdot 58 \cdot (-\frac{1}{2}) = 915 \Rightarrow AB = \sqrt{915}$

Ответ: а) $R = \frac{19}{2+2\sqrt{3}}$; б) $\angle AOB = 120°$; в) $AB = \sqrt{915}$

№5 $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ x+7\geq 0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-4 \\ x\geq -7 \\ \sqrt{x+7} > x \ (3) \\ x\neq 2 \end{cases}$

(3) $\sqrt{x+7} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-7;0) \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \Rightarrow -x^2+x+7>0 \quad D = 1+4\cdot 7 = 29 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-1-\sqrt{29}}{-2} \\ x_2 = \frac{-1+\sqrt{29}}{-2} \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(-\frac{1+\sqrt{29}}{-2}; \frac{+1+\sqrt{29}}{+2}\right)$

Тогда получаем $\begin{cases} x>-4 \\ x\neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\in[-7;0) \\ x\in\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{-2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-4;2)\cup(2;+\infty) \\ x\in\left[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x\in(-4;2)\cup\left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)}$

(I) $0<\sqrt{x+7}-x<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \\ \begin{cases} x>-1 \\ \sqrt{x+7}<1+x \end{cases} \Rightarrow (2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in\left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$x^2+x-6>0 \Rightarrow$ -3 2

Тогда $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \Rightarrow \sqrt{x+7} \geq 2x+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x\geq -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\geq -7 \end{cases} \Rightarrow x\in[-2;+\infty) \Rightarrow x\in\left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\begin{cases} 2x+4<0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-7;-2)$

$\begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x+7\geq 4x^2+8x+16 \Rightarrow D<0 \Rightarrow \varnothing \end{cases}$

$\Rightarrow \varnothing$ не нужно на этом промежутке

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

① $\sqrt{x+7}-x>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x+7} > 1+x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1+x<0 \\ x+7\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1+x\geq 0 \\ x+7>1+2x+x^2 \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1 \\ x\geq -7 \end{cases} \Rightarrow x\in[-7;-1) \\ \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$D=1-4\cdot(-6)=25$

$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-1-5}{2}=-3 \\ x_2=\frac{-1+5}{2}=2 \end{array}\right.$ $-3 \quad 2$

$x\in(-3;2)$

$\Rightarrow x\in(-3;-1)$

Тогда $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

$x+4\geq\sqrt{x+7}-x$

$\sqrt{x+7}\leq 2x+4 \Rightarrow \begin{cases} 2x+4\geq 0 \\ x+7\leq 4x^2+16x+16 \end{cases}$ $x\geq -2$

$4x^2+15x+9\geq 0$

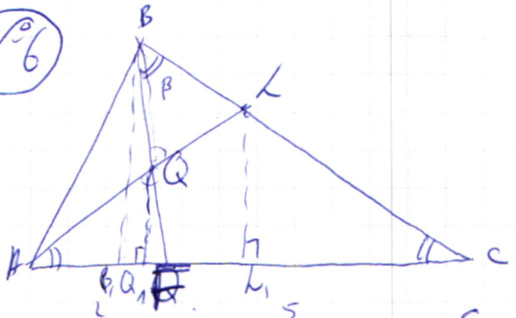
$D=225-144=81\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-15-9}{8}=-\frac{24}{8}=-3 \\ x_2=\frac{-15+9}{8}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4} \end{array}\right.$ $-3 \quad -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[-\frac{3}{4};+\infty)$

Учитывая $\begin{cases} x\in(-3;-1) \\ x\in(-\infty;-3]\cup[-\frac{3}{4};+\infty) \end{cases} \Rightarrow \varnothing$

Ответ: $x\in\varnothing$

№6



Дано: $\triangle ABC$;

$\frac{AF}{FC}=\frac{2}{5}$;

$\frac{S_{\triangle QBL}}{S_{\triangle BAC}}=\frac{5}{12}$ $QQ_1\perp AC$, $QQ_1=6$

$LL_1\perp AC$; LL_1 - ?

т.к. $\frac{AF}{FC}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle FBC}}=\frac{2}{5}$; $\triangle AQF\sim\triangle BQL$ (угл и 2 сторон)

и они так же $\sim\triangle CBA$. $\angle QBL=\angle QAF=\angle BCA=\beta$

$\frac{S_{QBL}}{S_{BAC}}=\frac{\frac{1}{2}QB\cdot BL\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}BC\cdot AC\cdot\sin\beta}=\frac{QB\cdot BL}{BC\cdot AC}=\frac{5}{12}$

$\triangle AQQ_1\sim\triangle ALL_1$; $S_{\triangle QBL}=S_{\triangle AQF}$ (т.к. они равны)

$k=\frac{6}{x}=\frac{QQ_1}{LL_1}$; $S_{\triangle AQF}=\frac{1}{2}QQ_1\cdot AF$; $BB_1\perp AC$.

S_{ALC} - рівноб. $S_{ALC}=\frac{1}{2}LL_1\cdot AC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}}=\frac{\frac{1}{2}QQ_1\cdot 2\cancel{x}}{\frac{1}{2}LL_1\cdot 7\cancel{x}}=\frac{2QQ_1}{7LL_1}=\frac{S_{AQF}}{S_{ALC}}$ $2QQ_1=6=12$

$\frac{S_{AQF}}{S_{ABC}}=\frac{5}{12}=\frac{\frac{1}{2}QQ_1\cdot AF}{\frac{1}{2}BB_1\cdot AC}=\frac{QQ_1\cdot 2\cancel{x}}{BB_1\cdot 7\cancel{x}}=\frac{5}{12}\Rightarrow\frac{12}{7BB_1}=\frac{5}{12}\Rightarrow BB_1=\frac{144}{35}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{QQ_1}{LL_1}=\frac{LL_1}{BB_1}\Rightarrow LL_1=\sqrt{\frac{6}{35}}\cdot 12$ Ответ.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 По 6 $\mathbb{Z}$ чисел из промежутков $[1;45]$; $[46;90]$; $[91;135]$; $[136;180]$; $[181;225]$

Разность любых 2-х $\not\vdots\, 45$. $\min \Sigma$ чисел — ?

т.к. всего 30 чисел

Пронумеруем промежутки
I : $[1;45]$
II : $[46;90]$
III : $[91;135]$;
IV : $[136;180]$;
V : $[181;225]$

Можно заметить, что если брать из I-го промежутка 1-е 6 чисел, то из дальнейших промежутков нужно будет брать не с 1-го числа, стоящего в нём, а с ~~…~~ (для II-го: с 7-го числа; для III-го: с 13-го и т. д. как арифмет. прогрессия с разницей $d = 6$), но при таком раскладе в дальнейших промежутках и до последнего V-го числа будут сильно возрастать, что несоответствует условию min.

Поэтому нам необходимо взять — из V-го промежутка числа стоящие под № 1 – 6 (наименьшие в нём) — 181-186

- из IV-го промежутка — под №7-12 : (142 - 147)
- из III-го промежутка — под № 13 – 18 : (103 - 108)
- из II-го промежутка — под № 19 – 24 : (64 - 69)
- и из I-го промежутка — под № 25 – 30 : (25 - 30).

И посчитать сумму из 5 арифметических прогрессий: ($d = 1$)

I-го : $a_1 = 25$; $a_6 = 30$; $S_{6,1} = \frac{25+30}{2} \cdot 6 = 165$

II-го : $a_1 = 64$; $a_6 = 69$; $S_{6,2} = \frac{64+69}{2} \cdot 6 = 399$

III-го : $a_1 = 103$; $a_6 = 108$; $S_{6,3} = \frac{103+108}{2} \cdot 6 = 633$

IV-го : $a_1 = 142$; $a_6 = 147$; $S_{6,4} = \frac{142+147}{2} \cdot 6 = 867$

V-го : $a_1 = 181$; $a_6 = 186$; $S_{6,5} = \frac{181+186}{2} \cdot 6 = 1001$

Итого сумма будет: $S_{6,1} + S_{6,2} + S_{6,3} + S_{6,4} + S_{6,5} = 3065$

Ответ: 3065.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

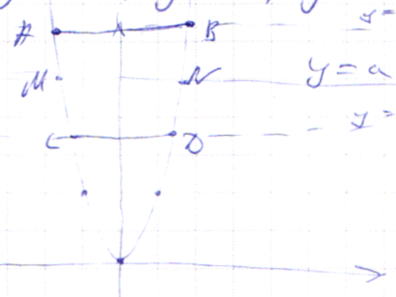
9-29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y=2x^2$; $y=98$; $y=18$; $y=a$



Пусть

1) $y=98$

$98=2x^2 \Rightarrow x^2=49 \Rightarrow x=\pm 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(A;B)=14$

2) $y=18$; $18=2x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3 \Rightarrow \rho(C;D)=6$

3) $y=a$; $a=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{a}{2} \Rightarrow$

$x=\pm\sqrt{\frac{a}{2}} \Rightarrow \rho(M;N)=2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

$\cos(90°+30°)=-\sin 30°$

Чтобы составить $\triangle$ с $\angle 120°$: I $a^2=196+36+2\cdot 14\cdot 6\cdot\frac{1}{2}=$

$=232+84=316 \Rightarrow a=\pm\sqrt{316}=$

$=\pm 2\sqrt{79}=2\sqrt{79}$ $\quad a=\sqrt[4]{316}$

II $196=a^2+36+6a$ $\quad$ $\frac{-196}{36}{160}$

$a^2+6a-160=0$

$D=36-4\cdot(-160)=676=2\cdot 2\cdot 169$

$\left[\begin{array}{l} a_1=\frac{-6-26}{2}=-\frac{32}{2}=-16 \Rightarrow \text{не может быть т.к. парабола} >0 \Rightarrow \\ a_2=\frac{-6+26}{2}=10 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ не пересечет

III $36=196+a^2+\frac{28a}{2}$

$a^2+14a+160=0$ $\quad D=196-4\cdot 160<0 \Rightarrow \varnothing$

Отв: $\left[\begin{array}{l} a=2\sqrt{79} \\ a=10 \end{array}\right.$

2. max и min - ? $g(x)=\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4$

~~$g'(x)=2\cos(5x)\cdot 5-2$~~ $\quad g'(x)=2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5-2\sin x\cdot\cos x+$

$+3\cdot\cos x\cdot 7\cdot\cos x=$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$=-5\sin 10x-\sin 2x+21\cos^2 x$

$g(x)=\sin 3x\sin 7x-\sin^2 x+\cos^2 5x+4=$

$=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 10x)-1+\cos^2 x+\cos^2 5x+4\geq 3$

$\frac{\pi}{2}$

$4x=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{8}$

3. Кол-во 17-значных чисел из "0", "7", "8" каждая цифра хотя бы раз из цифр "8" - 7 шт подряд

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 $\quad$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

Значит 7 шт. по "8" подряд может стоять 11 способами, остаётся 10 позиций

I) когда все 8-ки в начале $1\cdot 2\cdot 3^9$

II) когда 8-ки начинаются со 2-й позиции $1\cdot 1\cdot 2\cdot 3^8$

III) когда 8-ки начинаются с 3-й по 10-ю $7\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3^7$

IV) когда 8-ки в конце с 11-й $1\cdot 2\cdot 2\cdot 3^8$

$11\cdot 2\cdot 3^9\cdot 2\cdot 3^8\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^7\cdot 2^2\cdot 3^8$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №

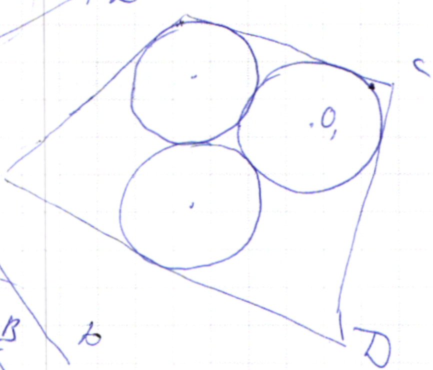
(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} x<-2 \\ x \geqslant -7 \end{cases} \Rightarrow x \in [-7;-2)$

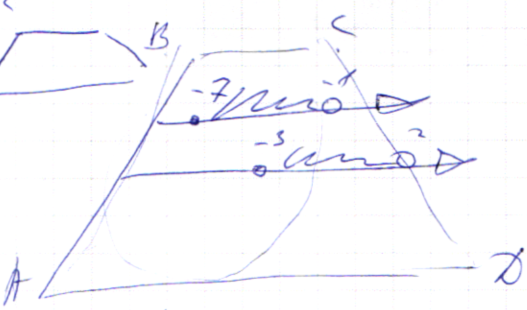
$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 4 \end{array}$

4)

$\begin{cases} x \geqslant -2 \\ 4x^2+17x+9 \leqslant 0 \\ D = 49 - 4\cdot4\cdot9 \leqslant 0 \Rightarrow \varnothing \end{cases}$



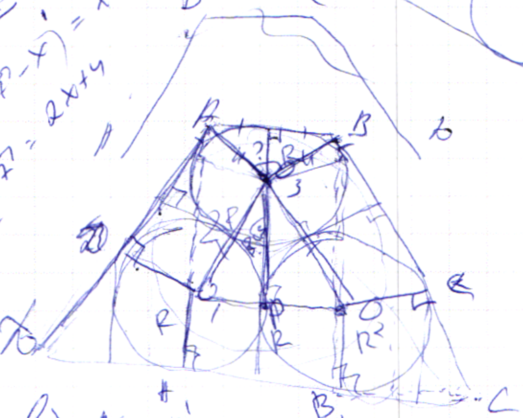
ω $R_1 = R_2 = R_3 = R$



$\sqrt{x+7} - x = x+4$

$\sqrt{x+7} = 2x+4$

$x+7 =$



$\omega_1 - AD \; ; DC$

$\omega_2 - DC \; , CB$

$\omega_3 - CB, \; BA, \; AD$

$R-?$

а) $AD + BC - AB - CD = 12 \Rightarrow AB + BC - 12 = AB + CD$

$AD + BC = 12 + AB + CD$

Если бы можно было описать $ABCD$, π

$AB + DC = AD + BC$

б) $\angle AO_3B$ O_3 - центр O_3

в) $AO \cdot BO = 58$ $AB - ?$

$\triangle O_1 O_2 O_3$: - равносторонний $O_1O_2 = 2R$

$O_1P = PO_2 = R \Rightarrow \triangle O_1O_3P: \; O_3P = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$

! Эт. трапеция равнобедренная $AB_1 \parallel DC$ и; $AA_1 = 2R + R\sqrt{3} = R(2+\sqrt{3})$

$DA_1 = B_1C = \dfrac{DC - AB}{2}$

$S_{ABCD} = \dfrac{AB+DC}{2} \cdot AA_1 = 2S_{\triangle AA_1D} + S_{ABB_1A_1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{AB+BC-12}{2} \cdot R(2+\sqrt{3}) = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot R(2+\sqrt{3}) \cdot \dfrac{DC-AB}{2} + R(2+\sqrt{3})\cdot AB$

$AB + BC - 12 = DC - AB + 2AB \Rightarrow DC = BC - 12$

$AD + DC - AB - CD = 0 \Rightarrow AD = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\gamma = (R(2+\sqrt{3}))^2 + (R + \frac{R}{2})^2$?

$1+x>0$

$x>-1$

$x+7 < 1 + 2x + x^2$

$x^2 + x - 6 > 0$

$D = 1 - 4\cdot(-6) = 25$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \\ x_2 = \frac{-1+5}{2} = 2 \end{array}\right.$

$\sqrt{x+7} - x < 1$

$\sqrt{x+7} < 1 + x$

5. $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x)$

ОДЗ $\begin{cases} x+4>0 \\ \sqrt{x+7}-x>0 \\ \sqrt{x+7}-x \neq 1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} x>-4 \\ \sqrt{x+7} > x \\ x \neq 2 \end{array}$

$x \in (-4;2) \cup (2;+\infty)$

Зн.

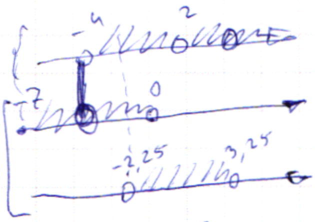
$\sqrt{x+7} > x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+7 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x \geqslant -7 \end{cases} \Rightarrow x \in [-7;0) \\ \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$

I) $0 < \sqrt{x+7} - x < 1$, то

$x+4 < \sqrt{x+7} - x$

$2x + 4 < \sqrt{x+7}$



$D = 1 - 4\cdot(-7) = 29$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} \approx \frac{-4{,}5}{2} = -2{,}25 \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{2} \approx 3{,}25 \end{array}\right.$

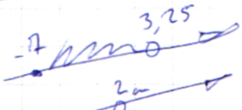
$4{,}5$ $-2{,}25$ $3{,}25$

II $\sqrt{x+7} - x > 1$, то

$x+4 \geqslant \sqrt{x+7} - x$

$25 < 29 < 36$

$5 < \sqrt{29} < 6$



$AO \cdot BO = 58 = 29 \cdot 2$

$2\cdot\frac{3}{2} - (4 + 4\sqrt{3} + 3)$

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

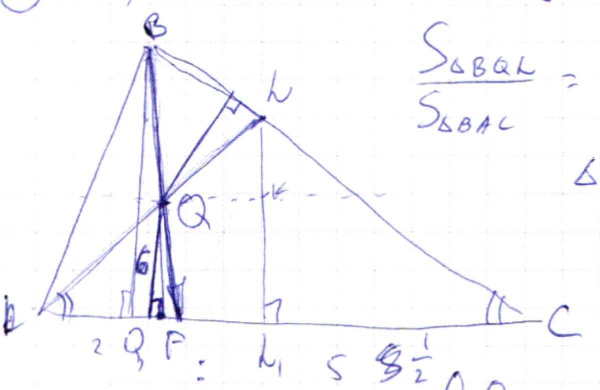
9-29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $F, L \in AC; BC$ $\triangle ABC$



$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{5}{12}$

$LL_1 - ?$

$QQ_1 = 6$

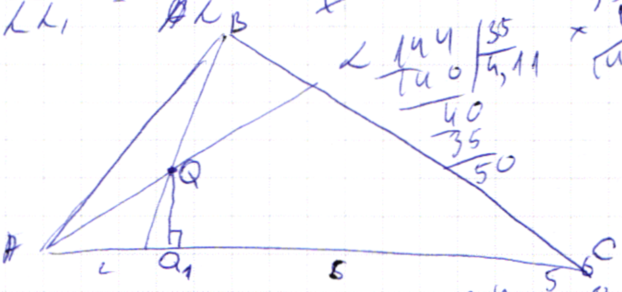
$\triangle AQQ_1 \sim \triangle ALL_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{QQ_1}{LL_1} = \frac{AQ}{AL} = \frac{6}{x}$

$\frac{12}{7BB_1} = \frac{5}{12}$

$144 = 35 BB_1$

$BB_1 = \frac{144}{35}$



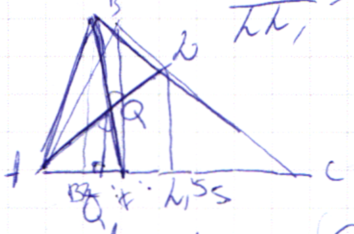
$\frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle FBC}} = \frac{2}{5}$

$\frac{QQ_1}{LL_1} = \frac{QQ_1}{BB_1}$

$\frac{QQ_1}{LL_1} = \frac{LL_1}{BB_1}$

$LL_1^2 = 6 \cdot \frac{144}{35}$

$LL_1 =$



$S_{BQL} = S_{FBC} - S_{FQLC}$

$BQ \cdot QF = AQ \cdot QL$

$\triangle AQF \sim \triangle BQL$ $(S_{\triangle AQF} = S_{\triangle BQL}) \sim \triangle CBA$

$QQ_1 : LL_1 : BB_1 = 6 : x : \frac{144}{35}$

7. По 6 $\mathbb{Z}$ числа из $[1;45]$; $[46;90]$; $[91;135]$; $[136;180]$; $[181;225]$

$m-n \,\vdots\, 45$ $\min_{30} - ?$

$a_1 = 1$

S_{30}

$a_n - a_m \,\vdots\, 45$

$a_n \equiv 1 \pmod{45}$

I: 1; 2; 3; 4; 5; 6

II: 46; 47

V: 181; 182; 183; 184; 185; 186;

IV: 142; 143; 144; 145; 146; 147;

III: 103; 104; 105; 106; 107; 108;

II: 64; 65; 66; 67; 68; 69

I: 25; 26; 27; 28; 29; 30

(136; 137; 138; 139; 140; 141

(91; 92; 93; 94; 95; 96;

97; 98; 99; 100; 101; 102)

(46; 47; 48; 49; 50; 51;

52; 53; 54; 55; 56; 57;

58; 59; 60; 61; 62; 63)

(1; 2; 3; 4; 5; 6;

7; 8; 9; 10; 11; 12

13; 14; 15; 16; 17; 18;

19; 20; 21; 22; 23; 24

1400 + 1500 = 2900, + 165 = 3065

1001 + 399 = 1400

633 + 867 = 1500

181 + 186 = 367, × 3 = 1001

103 + 108 = 211, × 3 = 633

55 × 3 = 165

64 + 69 = 133, × 3 = 399

142 + 147 = 289, × 3 = 867

181 − 144 = 37; 186 − 147 = 39; 181 − 136 = 45; 182 − 137 = 45

96 + 45 = 141; 91 + 45 = 136; 41 + 40 = 181; 64 + 45 = 99; 64 + 90 = 154

25 + 45 = 70; + 45 = 115

144 : 35 = 4,11

$x=-3$ $x+7=1$ $x=-6$

V: 136; 137; 138; 139; 140, 141.

IV: 97; 98; 99; 100; 101; 102 (91; 92; 93; 94; 95; 96)

III:

V 181, 182, 183; 184; 185; 186

$\frac{205+210}{2}\cdot 6$

IV

(21) + (327) + (633) + (939) + (1245)

11 способов

I $2\cdot 2\cdot 3^7$ — 1-й

II $1\cdot 2\cdot 2\cdot 3^7$ — 2-й

III $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3^7$ — 3-й — 10-й

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\rho(M;N)=\sqrt{2a}$. I $2a = 196+36+2\cdot 14\cdot 6\cdot \frac{1}{2} = 316$

$a=158$

$\frac{154+159}{2}\cdot 6$

II) $196 = 2a+36+6\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a}$ $\sqrt{2a}=t$

$t^2+6t-160=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-16 \\ t_2=10\end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{2a}=10$

$2a=100$

$a=50$

III $36 = 196+2a+14\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2a}$

$\sqrt{2a}=t>0$

$t^2+14t+160=0 \Rightarrow D<0 \Rightarrow \varnothing$

$\frac{52+57}{2}\cdot 6$

$g'(x)$: 1) $(\sin 3x\cdot\sin 7x)' = (\sin 3x)'\cdot\sin 7x + \sin 3x(\sin 7x)' =$

$= 3\cos 3x\cdot\sin 7x + 7\sin 3x\cdot\cos 7x = \frac{3}{2}(\sin 10x+\sin 4x) + \frac{7}{2}(\sin 10x+\sin(-4x)) =$

$= \frac{1}{2}(3\sin 10x + 3\sin 4x + 7\sin 10x + 7\sin 4x) = \frac{1}{2}(10\sin 10x+10\sin 4x) =$

$= 5\sin 10x + 5\sin 4x$

2) $(-\sin^2 x)' = -2\sin x\cdot\cos x = -\sin 2x$

3) $\cos^2 5x = 2\cos 5x\cdot(-\sin 5x)\cdot 5 = -5\sin 10x$

$g'(x) = 5\sin 10x + 5\sin 4x - \sin 2x - 5\sin 10x = 5\sin 4x - \sin 2x =$

$= \sin 2x(5\cos 2x - 1)$

$5\sin 4x - \sin 2x = 0$

$5\sin 4x = \sin 2x$

$5\sin 2x\cos 2x = \sin 2x$

$\cos 2x = \frac{1}{5}$

$2x = \pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi k$

$x = \pm\frac{\arccos\frac{1}{5}}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$\sin 2x = 0$

$2x = \pi n$

$x = \frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$ — 1-й о

$5-\frac{\sqrt2}{2} = \frac{10-\sqrt2}{2}$

$4x=\frac{\pi}{2}$

$x=\frac{\pi}{8}$

$4x^2+15x+9>0$

$D=225-16\cdot 9$

$\frac{103+108}{2}\cdot 6$

$\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{2}$ π

$5\sin 2\pi$ $-\sin\pi$

$\sin 4x = 2\sin$

$x=\pi, \pi$

$2\frac{\pi}{10}+\pi = \frac{11\pi}{10} = 1{,}1\pi$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)