МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 10-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

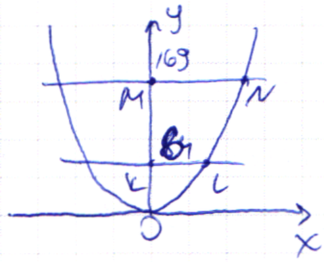
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I



Пусть изображен графики функций $y_1=x^2$; $y_2=169$; $y_3=64$;

$y_1 \cap y_2 = N$, $y_1 \cap y_3 = L$, $y_2 \cap OX = M$, $y_3 \cap OX = K$.
Тогда $64 = x_L^2$; $x_L = \pm 8$; $x_N^2 = 169$, $x_N = \pm 13$. Тогда длины искомых отрезков равны $2MN = 26$ и $2KL = 16$.
Аналогично для прямой $y=a$ длина искомого отрезка равна $2\sqrt{a}$. Тогда имеем треугольник со сторонами $26, 16, 2\sqrt{a}$ и углом 120°. Против этого угла не может лежать сторона 16, т.к. $26 > 16$ (и тогда против стороны 26 лежит угол, больший 120°, и сумма углов в треугольнике больше 180°). Тогда два варианта:

1) $26^2 = 16^2 + (2\sqrt{a})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$;
$4a + 32\sqrt{a} = 420$;
$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$;
$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = 7 \\ \sqrt{a} = -15\end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{a} = 7$, $a = 49$.

2) $(2\sqrt{a})^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ$;
$4a = 256 + 676 + 516 = 1448$; $a = 362$.

Ответ: при $a = 49$ или $a = \cancel{1448}$ 362.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

II $g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) -$
$- \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = 0{,}5\cos 4x - 0{,}5\cos 14x - 0{,}5 + 0{,}5\cos 14x - \cos^2 x - 3 =$
$= 0{,}5\cos 4x - \cos^2 x - 3{,}5 = 0{,}5\cos 4x - 0{,}5 - 0{,}5\cos 2x - 3{,}5 =$
$= 0{,}5(\cos 4x - \cos 2x) - 3{,}5 = 0{,}5(-1 + 2\cos^2 2x - \cos 2x) - 4 =$
$= \cos^2 2x - 0{,}5\cos 2x - 4{,}5$

$g'(x) = 2\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - 0{,}5 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - 0 = \sin 2x - 4\sin 2x \cos 2x =$
$= \sin 2x(1 - 4\cos 2x)$. Кр. точки: $\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 2x = \frac{1}{4}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \pm 1\\ \cos 2x = \frac{1}{4}\end{array}\right.$

Подставляем значения $\cos 2x$ в исходную функцию; пусть $\cos 2x = t$, $\varphi(t) = t^2 - 0{,}5t - 4{,}5$.
$\varphi(1) = 1 - 0{,}5 - 4{,}5 = -4$
$\varphi(-1) = 1 + 0{,}5 - 4{,}5 = -3$
$\varphi(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{9}{2} = -\frac{1}{16} - \frac{9}{2} = -\frac{73}{16} = -4\frac{9}{16}$
$\Rightarrow \max g(x) = -3$, $\min g(x) = -4\frac{9}{16}$
Ответ: $\max g(x) = -3$, $\min g(x) = -4\frac{9}{16}$.

III Рассм. сначала случай, когда 6 пятерок стоят в начале числа (т.е. на первых местах местах). Тогда получим число $\overline{55555x_1x_2...x_{12}}$.
Вместо каждого x_n может стоять либо 0, либо 9, однако каждая цифра встречается хотя бы один раз, поэтому ~~после~~ один из x_n выбирается однозначно. Тогда общее кол-во таких чисел $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1 = 2^{11} = 2048$.
Теперь рассм. случай, когда пятерки не стоят в начале числа. Тогда первая цифра выбирается однозначно, поскольку 0 не может быть

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

первой цифрой (т.е. первая цифра 9). Тогда одна из оставшихся 11 цифр 0, а остальные выбираются двумя способами. ~~Тогда будет кол-во чисел~~ Пятерки могут быть расположены в данном числе от 1-5 мест до 12-18, т.е. 12-ю способами. Следовательно, общее кол-во чисел во 2-м случае равно $1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot1\cdot12=12\cdot2^{10}=12288$.

Теперь по правилу суммы кол-во ~~...~~ искомых 18-значных чисел равно $12288+2048=13384$.

Ответ: 13384.

V $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq1$

ОДЗ: $\begin{cases}x+5>0\\ \sqrt{x+3}-x>0\\ \sqrt{x+3}-x\neq1\\ x+3\geq0\end{cases}$; $\begin{cases}x>-5\\ x\geq-3\\ x<\sqrt{x+3}\\ \sqrt{x+3}\neq x+1\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}x\geq-3\\ \left[\begin{array}{l}x<0\\ \begin{cases}x\geq0\\ x^2-x-3<0\end{cases}\end{array}\right.\\ x^2+2x+1\neq x+3\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq-3\\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ x\neq-2,\ x\neq-1\end{cases}$; $\begin{cases}\frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}\\ x\neq-2\\ x\neq-1\end{cases}$.

Исходное неравенство равносильно следующему $(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x)\geq0$

Выясним знак первой скобки:

1.1) $\sqrt{x+3}-x-1\geq0$; $\sqrt{x+3}\geq x+1 \Leftrightarrow$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1<0 \\ \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+3 \ge 2x+x^2+1 \end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+x-2\le 0\end{cases}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ \begin{cases} x\ge -1 \\ -2\le x\le 1\end{cases}\end{array}\right.$;

$\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ -1\le x\le 1\end{array}\right.$; $x\le 1$.

1.2) $\sqrt{x+3}\le x+1$; $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+3\le x^2+2x+1\end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+x-2\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x\ge 1\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x\ge 1$.

Тогда первая скобка положительна на $(-\infty;+1)$, отрицательна на $[1;+\infty)$, а в точке 1 равна 0.

Теперь определим знаки второй скобки: $2x+5-\sqrt{x+3}$. Пусть $\sqrt{x+3}=t$, тогда $2x+5-\sqrt{x+3}=$ $=2t^2-t-1$. Тогда:

2.1) $2t^2-t-1\ge 0$;

$\left[\begin{array}{l} t\ge 1 \\ t\le -\frac{1}{2} \text{ - пост.к.}\end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{x+3}\ge 1$; $x+3\ge 1$; $x\ge -2$.

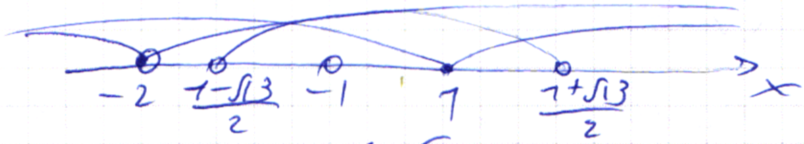
2.2) $2t^2-t-1\le 0$;

$-\frac{1}{2}\le t\le 1 \Rightarrow \sqrt{x+3}\le 1$; $x+3\le 1$; $x\le -2$.

Подходят комбинации 1.1.—2.1., 1.2.—2.2.

Совмещаем их с ОДЗ:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge -2\end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x\le -2\end{cases}\end{array}\right. \\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x\ne -1,\ x\ne -2\end{cases}$



$\Rightarrow x\in\left[1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

Ответ: $\left[1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

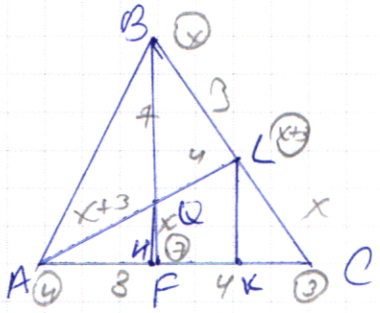
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-005
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

VI



$AF/FC = 3/4$; $S_{BQL}/S_{BAC} = 1/16$, $QH \perp AC$, $QH = 9$. LK - ?

Сделаем Q ЦМС системы $\triangle ABC$. Поместим в точку C массу 3, в точку B - массу x. Пусть W(7) означает, что в точке W лежит масса 7. Тогда при $AF/FC = 3/4$ $A(4)$, $F(4+3) = F(7)$; $C(3)$, $B(x)$ $\Rightarrow$ $BL/LC = 3/x$; $F(7)$, $B(x) \Rightarrow BQ/QF = 7/x$.

Т.к. $FC = \frac{4}{7}AC$, и у $\triangle ABC$ и $\triangle BFC$ общая высота к сторонам FC и AC, то $S_{BFC} = \frac{4}{7}S_{ABC}$, или $S_{ABC} = \frac{7}{4}S_{BFC}$.

Пусть $BL = 3k$, $LC = xk$; $BQ = 7s$, $QF = xs$. Тогда $S_{BFC} = \frac{1}{2}BF\cdot BC\cdot \sin FBC = \frac{1}{2}s(x+7)\cdot k(x+3)\cdot \sin FBC$; $S_{BQL} = \frac{1}{2}\cdot 7s\cdot 3k\cdot \sin FBC$. По условию $S_{BQL}/S_{BAC} = 1/16$;

$\frac{S_{BQL}}{\frac{7}{4}S_{BAC}} = \frac{1}{16}$; $\frac{0{,}5\cdot 7\cancel{s}\cdot 3\cancel{k}\cdot \cancel{\sin FBC}}{\frac{7}{4}\cdot 0{,}5\cdot (x+7)\cancel{s}\cdot \cancel{k}(x+3)\cdot \cancel{\sin FBC}} = \frac{1}{16}$;

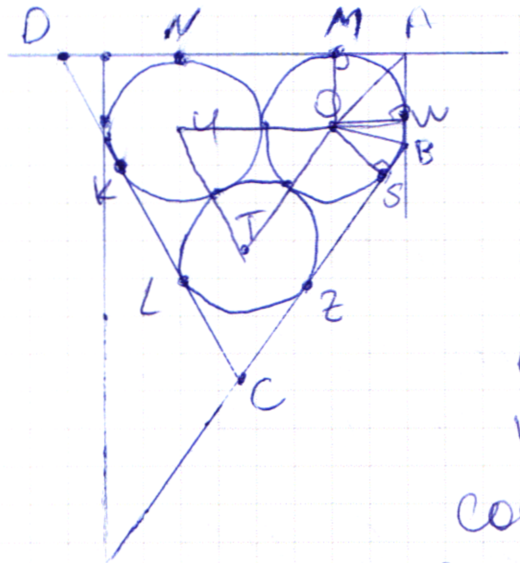
$\frac{12}{(x+3)(x+7)} = \frac{1}{16}$; $x^2+10x+21 = 192$; $x^2+10x-171 = 0$;

$\left[\begin{array}{l} x=-19 \\ x=9 \end{array}\right.$. С учетом того, что масса по определению неотрицательна, получаем, что $x=9$, т.е. $B(9)$. Тогда $L(x+3) = L(12)$; $L(12)$, $A(4) \Rightarrow AQ/QL = 3/1$; $AQ/AL = 3/4$. Пров. $LK \perp AC$; тогда $LK \parallel QH \Rightarrow$ по лемме о подобии $\triangle AQH \overset{3/4}{\sim} \triangle ALK \Rightarrow LK = \frac{4}{3}QH = \frac{4}{3}\cdot 9 = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

IV



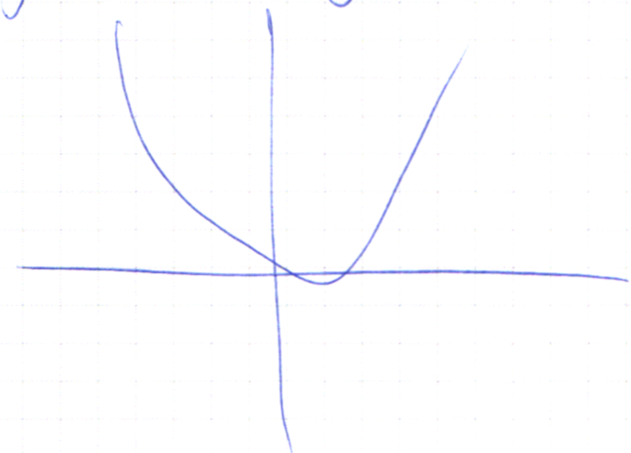
а) Пусть U, T, O – центры окружностей w_1, w_2, w_3 соответственно; w_1 касается сторон DA и DC в т. N и K, w_2 – DC и CB в т. L и Z, w_3 – AD, AB, и BC в т. M, W, S соответственно. По свойству касательных, проведенных из одной точки: $LC = CZ = y$, $AM = AW = a$, $BW = BS = x$, $DK = DN = z$.
Пусть радиус каждой окружности равен r. Тогда $UT = OT = UO = 2r$. Т.к. UN – радиус, пров. в точку касания, то $UN \perp AD$. Аналогично $OM \perp AD$. Тогда UNMO – прямоугольник, $NM = UO = m$. По условию $AD + BC - AB - CD = 10$; $AM + MN + DN + BS + SZ + CZ - AW - WB - DK - KL - LC = 10$ (т.к. $UO = OT = UT = 2r = m$, то и $SZ = KL = m$); $a + m + z + x + y + m - a - x - z - m - y = 10$; $m = 10$; $r = 5$.
Пров. OM и OS; $OM \perp AD$, $OS \perp BC$. Тогда в четырехугольниках OWBS и MAWO $\angle MAW + \angle MOW = 180°$; $\angle SOW + \angle SBW = 180°$; $\angle MOW = 180° - \angle MAW$, $\angle SOW = 180° - \angle SBW$. б) $\angle AOB = 60°$; ~~$\angle AOW = \angle WOB = 30°$~~;
в) $S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} AB \cdot OW$.
$\frac{1}{2} \cdot 42 \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot 5$; $AB = \frac{21\sqrt{3}}{5}$.
Ответ: а) 5; б) 60°; в) $\frac{21\sqrt{3}}{5}$.

VII $1+2+3+4+5+41+42+43+44+45+81+82+83+84+85+121+122+123+124+125+161+162+163+164+165 = 166 \cdot 12 + 83 = 2075$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I $y=x^2$, $y=169$, $y=64$, $y=a$ $\qquad \angle = 120^\circ$, Δ?



$13, 8, \sqrt{a}$

$169 = a + 64 - 2\sqrt{a}\cdot 8\cdot\cos 120^\circ = 64 + a + \sqrt{a}\cdot 8$

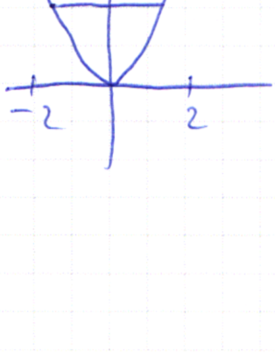
$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0;$ $\qquad 21\cdot 5 = 5\cdot 3\cdot 7$

$\left[\begin{array}{l}\sqrt{a} = -15\\ \sqrt{a} = 7\end{array}\right. \Rightarrow \sqrt{a} = 7;\ a = 49$

~~64 169~~

$a = 169+64 - 2\cdot 13\cdot 8\cdot\cos 120^\circ = 169+64+104 = 168+169 =$
$= 337;\ a = 337$?

МП:



$y=169: x=13 \Rightarrow \ell=26$

$y=64: x=8 \Rightarrow \ell=16$

$16; 26; 2\sqrt{a}; \ 120^\circ$

$$\begin{array}{r} \times\ 169 \\ 4 \\ \hline 676 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 64 \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

$676 = 256 + 4a - \cancel{2} \cdot 2\sqrt{a} \cdot 16 \cdot \cos 120^\circ \cancel{= 256+4a}$

$420 = 4a + 32\sqrt{a}$

$105 = a + 8\sqrt{a}$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\sqrt{a} = 7, \ a = 49$ $\quad$ 1

$$\begin{array}{r} \times\ 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 516 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 256 \\ 676 \\ \hline 932 \end{array}$$

$16; 26; 2\sqrt{a}; \ 120^\circ$

$4a = 256 + 676 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 16 \cdot 26 = 932 + 516 = 1448$

$a = 362$ $\quad$ 2

II $g(x) = \sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

~~$\sin(\alpha+\beta)$~~

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= 0{,}5\cos 4x - 0{,}5\cos 14x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$= 0{,}5\cos 4x \cancel{- 0{,}5\cos 14x} - \frac{1}{2} \cancel{+ 0{,}5\cos 14x} - \cos^2 x - 3 =$

$= 0{,}5\cos 4x - \cos^2 x - \cancel{3}\,3{,}5 = 0{,}5\cos 4x - 0{,}5 - 0{,}5\cos 2x - 3{,}5 =$

$= 0{,}5(\cos 4x - \cos 2x) \cancel{-3{,}5} - 4 = 0{,}5(2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x) - 4 =$

$= \cos^2 2x - 0{,}5\cos 2x - 4{,}5$

$2\cos^2 2x - \cos 2x - 9$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ кр. т.

$g'(x) = 4\cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 + 2\sin 2x = 2\sin 2x - 4\sin 2x\cos 2x =$

$= 2\sin 2x(1 - 2\cos 2x)$ кр. т.: $2x = \pi n$

$2x =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$166 \times 12 = 332$, $1991 + 85 = 2075$

$35\cdot1=35$, $35\cdot2=70$, $35\cdot3=105$, $35\cdot4=140$, ~~$35\cdot5=175$~~

$88 \times 4 = 352$

12345 41 42 43 44 45 81 82 83 84 85 121 122 123 124 125 161 162 163 164 165

I $\log(\sqrt{x+3}-x)(x+5) \geq -1$

$\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3} \neq -x+1 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -3 \\ \sqrt{x+3}>x \\ \sqrt{x+3} \neq x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq-3 \\ \left[\begin{array}{l} x<0 \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2<x+3;\ x^2-x-3<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

$x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x+3 \neq x^2+2x+1$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x\neq 1, x\neq 2 \end{cases}$

$-3 \leq x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}; \ x\neq -1, x\neq -2$

$x^2+x+2 \neq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3}-x-1)(2t^2-t-1) \geq 0$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$x+3 \leq 4x^2+25+20x$

$t=\sqrt{x+3}$

$2t^2-t-1 \geq 0$

$\leq 0;\ -0{,}5 \leq \sqrt{x+3} \leq 1$

$x+3 \leq 1;\ x \leq -2$

$-3 \leq x \leq -2$

$\geq 0;\ x+3 \geq 1;\ x \geq -2$

$[-1;+\infty) \cup \{-2\}$

-2, -1, x

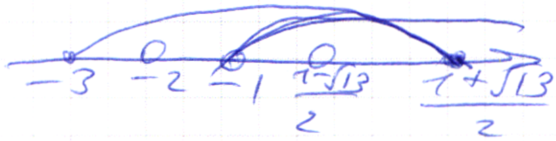
-2, -1, x

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

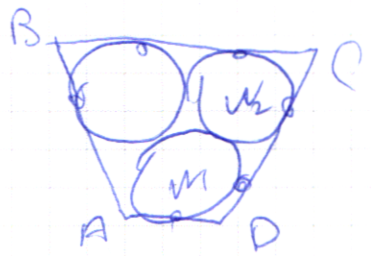
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

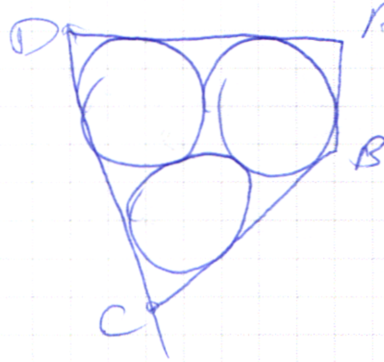
$$\begin{cases} [-7;+\infty)\cup\{-2\} \\ -3\le x\le \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x\ne -1 \\ x\ne -2 \end{cases} \quad \Big\backslash \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

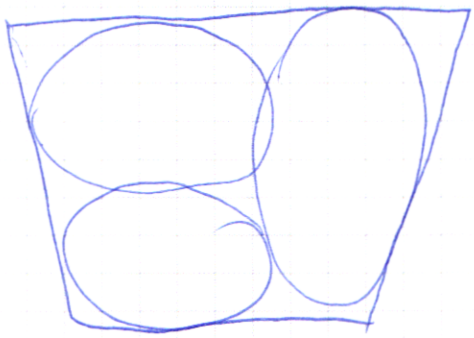
$$\left(-7;\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2};\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$$

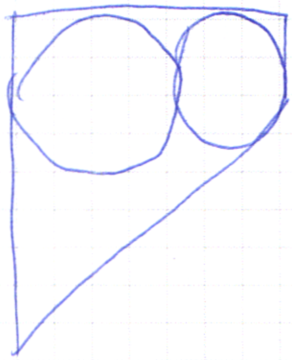


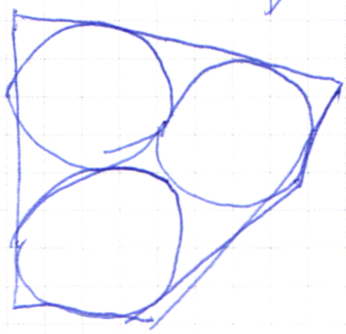
IV

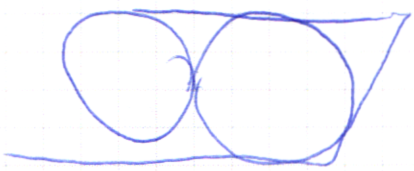


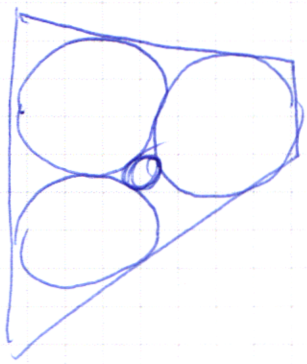




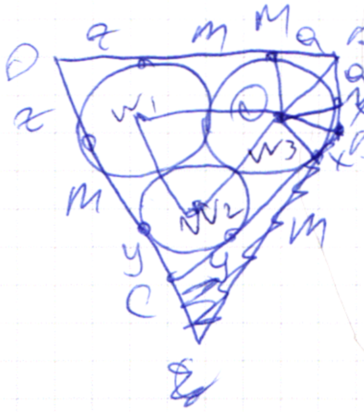








ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$AD+BC-AB-CD=10$

$a+m+r+x+y+m-$

$-a-x-r-m-y=10$

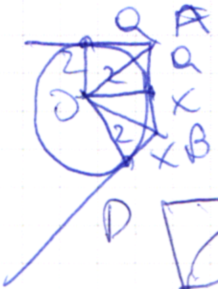
$m=10$

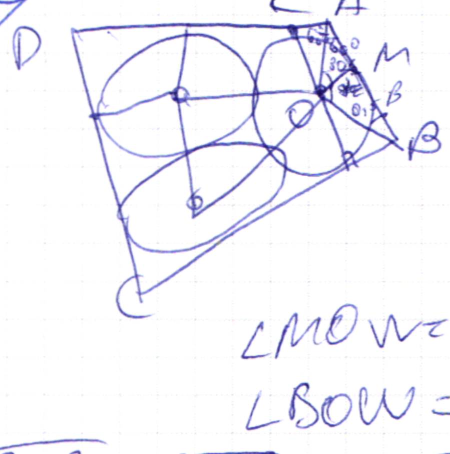
$r=5$

$\angle B=x,\ ON=r,\ OM=r,\ AM=a$

$AO^2=r^2+a^2,\ OB^2=r^2+x^2$

$(x+a)^2$





$DAB=\alpha \Rightarrow OAM=\frac{1}{2}\alpha$

$\angle MON=180^\circ-\angle MAN=180^\circ-\alpha$

$\angle BOW=180^\circ-SBW=180^\circ-\beta$

$\cancel{\sqrt{r^2+x^2}\ \sqrt{r^2+a^2}}$ $\sqrt{25+x^2}$ $\sqrt{25+a^2}$

$\frac{1}{2}\sin AOB\sqrt{25+x^2}\sqrt{25+a^2}=\frac{1}{2}r\cdot\cancel{\sqrt{25+x^2}+\sqrt{25+a^2}}\ (a+x)$

$\sin^2 AOB\,(25+x^2)(25+a^2)=5(\cancel{25+a^2+25+x^2+25})$

$5(a^2+2ax+x^2)$

$\sin^2 \cdot \left(5^4+a^2x^2+25(x^2+a^2)\right)=5\cdot 2ax+5(a^2+x^2)$

$x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$ $\quad\sqrt{x+3} \leq 2x+5$ $\quad 2x+5 \geq 0;$ $\quad x \geq -\frac{5}{2}$

$x+3 \leq 4x^2+25+20x$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$D=381-352=29$

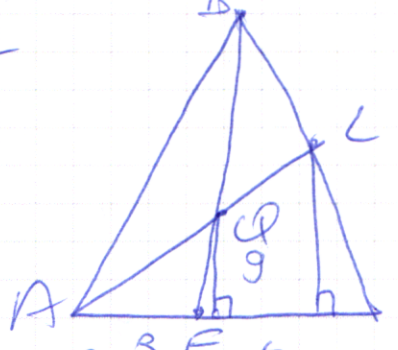
$x \geq \frac{-19+\sqrt{29}}{8}$

$x \leq \frac{-19-\sqrt{29}}{8}$

$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19 \\ \hline 361 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} \times 88 \\ 4 \\ \hline 352 \end{array}$

?вернуться!

VI



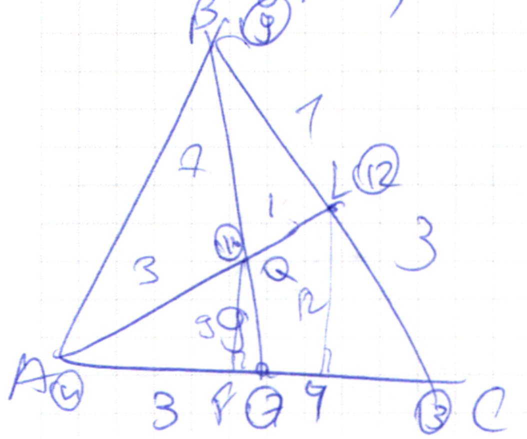
$S_{BQL} : S_{BAC} = 7/16$

$Q : AC = 9 \quad L : AC - ?$

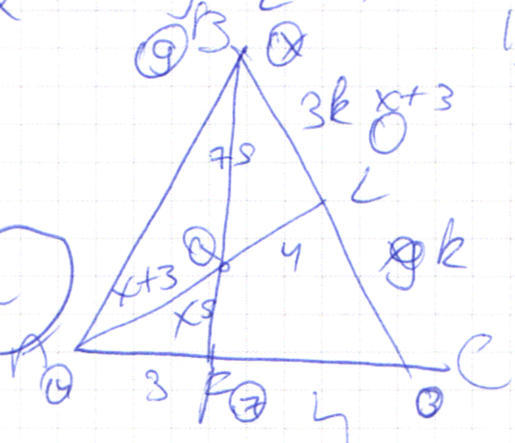
$171 = 3 \cdot 57 = 3 \cdot 3 \cdot 19 = 9 \cdot 19$

$x = -19$

$x = 9$



$\frac{4}{3} \cdot 9 = 12$



$\frac{BQ}{QF} = \frac{3}{x}$ $\quad \frac{BL}{LC} = \frac{3}{x}$

$S_{BFC} = \frac{4}{7} S_{BAC}$

$BF = (x+7)s, \quad BC = k(x+3)$

$S_{BQL} = \frac{1}{2} 3k \cdot 7s \cdot \sin\alpha$

~~$S_{BFC} = \frac{1}{2} s(x+7) \cdot k(x+3) \cdot \sin\alpha$~~

$S_{BAC} = \frac{7}{8} s(x+7) k(x+3) \sin\alpha$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{0{,}5 \cdot 3k \cdot 7s}{\frac{7}{8} s (x+7)(x+3) k}$

$\frac{7}{16} = \frac{4}{7} \cdot \frac{21 \; 3}{(x+7)(x+3)}$; $x^2+10x+21=192$ $\quad \begin{array}{r} \times 12 \\ 16 \\ \hline 72 \\ 12 \\ \hline 192 \end{array}$

$x^2+10x-171=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\varphi(1)=2-1-9=-8$ — max

$\varphi(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-9=-9$ — min ✓

III 18-зн.

$2^{10}=1024$

$32 \cdot 32$: 64, 96, 1024

$\underbrace{555555}_{6}\underbrace{22222222\ldots}$ 2^{11} + 2^{10}

$x\,\underbrace{555555}\,\underbrace{222222221}_{11}$

$xx\,\underbrace{555555}\,222\ldots$ 2^{10}

3 xxx
4 xxxx
5 xxxxx
6 xxxxxx
7
8
9
10
11
12

$1024 \cdot 12$: 2048, 1024, 11288

$11288 + 2048 = 13384$

2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}, 2^{10}

$2^{11}+12\cdot 2^{10}=11288+2048=$ ~~134~~ 13384 ✓

IV — вероятность

~~IV~~ V $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$ $D=1+12=13$

ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5 \\ x<\sqrt{x+3} \\ \sqrt{x+3}\neq x+1 \\ x\geq -3 \end{cases}$

$x\geq -3$

$\left[\begin{array}{l} x<0 \\ x\geq -3 \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+3>x^2;\ x^2-x-3<0; \end{cases} \end{array}\right.$

$x^2+2x+1-x-3\neq 0;$

$x^2+x-2\neq 0$

$\begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$x+3\geq 0$

~~$x\geq 0$~~

$x>\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$-3<x<0$

$x\neq 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)