

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

15-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



$$D(A + BC) = D + AB + CD$$

$$DA + 2AB + BC = 2DC$$

$$D + AB + CD = 2DC$$

$$D + 3AB = DC$$

$$D + 3AB = DS$$

$$D + 3AD = DA + AB$$

$$D + 2AB = DA$$

$$D + 2AB = BC$$

$$D + 3AD = DC$$

$$3DC = 2D + 7AB$$

ms

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

$$\frac{\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4)}{\log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x)} \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x} (\sqrt{x+7}-x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7}+1)(x+4) - (\sqrt{x+7}-x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7}) \geq 1$$

$$\sqrt{x+7}-x-1 \geq 1$$

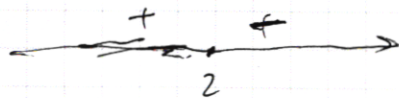
$$\sqrt{x+7} \geq 2x+2 \quad x > -7$$

$$x+7 = x^2+4x+4$$

$$x^2+x-3 = 0$$

$$D = 1+12 = 13$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$



$$2x+4 = \sqrt{x+7} \quad x > -7$$

$$4x^2+16x+16 = x+7$$

$$4x^2+15x+9 = 0$$

$$D = 225 - 144 = 81$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm 9}{8}$$

$$x_1 = -\frac{7}{4}, x_2 = -\frac{25}{8}$$

$$D.S. \quad x \geq -7$$

$$\sqrt{x+7}-x > 0$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x+7 > x^2$$

$$x+7 > x^2$$

$$x+4 > 0$$

$$\sqrt{x+7}-x \geq 1$$

$$-x^2+x+7 \geq 1$$

$$x > -4$$

$$\sqrt{x+7} = 1+x$$

$$D = 1+28 = 29$$

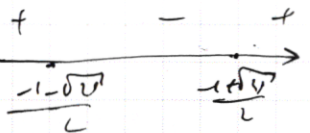
$$x \geq 1$$

$$x+7 = 1+2x+x^2$$

$$x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$x \leq 0$$

$$-x-7 = 1+2x+x^2$$



$$x^2+3x+8 = 0$$

$$D = 9-32 = -23$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{2}$$

$$D = 16-144 = -128$$

$$(-4; 2) \cup (2; \frac{-1+\sqrt{29}}{2})$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{29}}{2}; 2\right) \cup \left(2; \frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right)$$

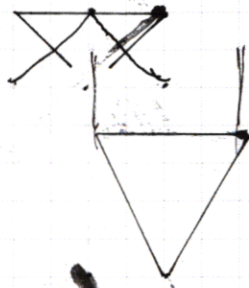
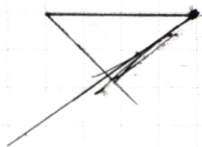
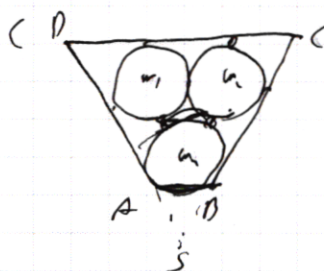
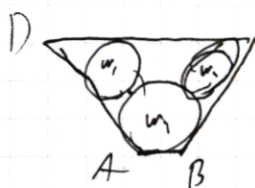
$$\frac{16}{7}$$

$$\frac{225}{81}$$

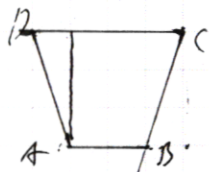
$$\frac{15}{75} = \frac{2}{5}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

М



ABCD - P10 трап



$$AD + BC = AB + CD + r$$

$$PS = CS = DK = 2 \cdot R - K$$

$$DA + AB + AB + BC = 2DC$$

$$DA + BC - AB - CD = 12$$

$$DA + 2AB + BC = 2DC ; CD = \frac{DA}{2} + AB + DC$$

$$DA + BC = 12 + AB + CD$$

$$DA + BC - 12 - AB = CD$$

$$2DA + BC - 12 - 2AB = DA + 2AB + BC$$

$$DA + BC - 12 - 4AB = 0$$

$$DA = BC$$

$$DA + BC = 4(6 + AB)$$

$$2DA = 12 + AB + CD$$

$$2DA + 2AB = 2DC$$

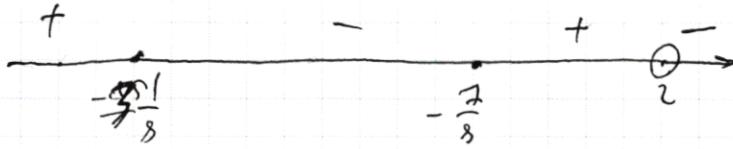
$$DA + AB = DC$$

$$2DC - 2AD = 12 + AB + CD \quad \text{так } DC = 12 + 3AB$$

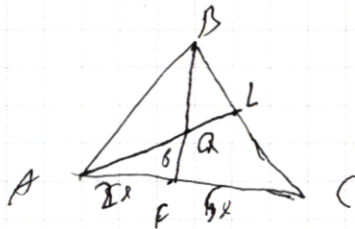
$$\underline{PS} \quad \underline{DA + AB}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left( -\frac{1-\sqrt{17}}{2}, -\frac{1}{8} \right) \cup \left[ -\frac{7}{8}, 2 \right)$$



$$\frac{PQ}{BC} = \frac{5}{12}$$

a-b : 45.  
p.с.  
3<sup>2</sup>·5<sup>1</sup>

Сумма чисел от 1 до 100

1, 2, 3, 4, 5, 6

7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36

37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156

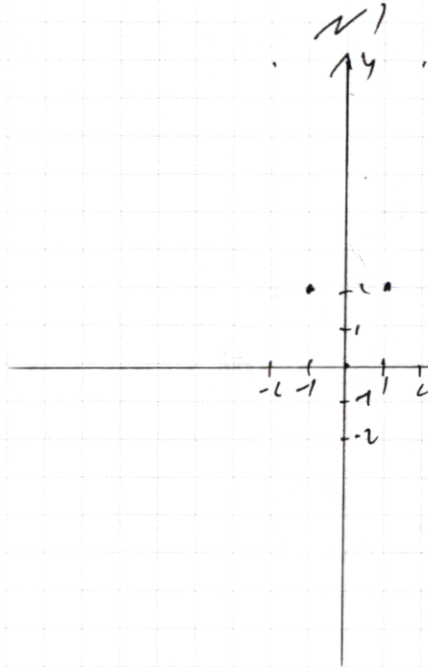
$$\frac{(24+28) \cdot 6}{2} + \frac{(64+68) \cdot 6}{2} + \frac{(104+108) \cdot 6}{2} + \frac{(142+146) \cdot 6}{2} + \frac{(181+185) \cdot 6}{2}$$

$$3(24+28+64+68+104+108+142+146+181+185) = 3(210+214+218+222+226) = 3(210 \cdot 2 + 211 \cdot 3) = 23(420 + 633) = 3(1053) = 3159$$

Handwritten calculations including a vertical multiplication of 125 by 75, a formula  $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$ , and a sequence of numbers: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100.

24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 91 92 93

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 2$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

$$18 = 2x^2$$

$$9 = x^2$$

$$x = 3 \quad (\text{сумма } \delta)$$

$$99 = 2 \cdot x^2$$

$$49 = x^2$$

$$x = 7 \quad (\text{сумма } \mu)$$

$$a = 6$$

$$b = 14$$

$$a = 2x^2$$

$$4 = 2 \cdot 16 = 32$$

$$a = 36$$

$$c = 14$$

$$r = 4$$

$$c^2 = 36 + 196 + 84$$

$$+ 84$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 14 \\ \hline 14 \\ 56 \\ \hline 14 \\ 196 \end{array}$$

$$196$$

$$+ 2$$

$$+ 14$$

$$+ 84$$

$$232$$

$$+ 84$$

$$316$$

$$316$$

$$+ 2$$

$$318$$

$$+ 2$$

$$320$$

$$322$$

$$324$$

$$326$$

$$328$$

$$330$$

$$332$$

$$334$$

$$336$$

$$338$$

$$340$$

$$342$$

$$344$$

$$346$$

$$348$$

$$350$$

$$352$$

$$354$$

$$356$$

$$\begin{array}{r} 484 - 4 \\ 242 \cdot 2^3 \\ 121 \cdot 2^4 = (11^2 \cdot 2^2)^2 \end{array}$$

$$x_{1,2} = \frac{-36 \pm 44}{2}$$

$$\frac{8 \cdot 24}{2} = 96$$

$$\frac{-82 \pm 40}{2} = -21$$

$$\frac{196}{2} = 98$$

$$\frac{176}{2} = 88$$

$$\frac{1936}{2} = 968$$

$$x^2 + 36x - 196 = 0$$

$$D = 1296 + 784 = 2080$$

$$x_1 \cdot x_2 = -196$$

$$x_1 - x_2 = -160$$

$$x_1 = -36 - x_2$$

$$(-36 - x_2) \cdot x_2 = -196$$

$$-36x_2 - x_2^2 = -196$$

$$x_2^2 + 36x_2 - 196 = 0$$

$$c = \sqrt{316}$$

$$a = 2x^2$$

$$a = 2 \cdot 316 = 632$$

$$632$$

$$+ 3$$

$$+ 36^2$$

$$+ 196$$

$$216$$

$$198$$

$$1296$$

$$1936$$

$$1958$$

$$1980$$

$$2002$$

$$2024$$

$$2046$$

$$2068$$

$$1296$$

$$+ 840$$

$$1936$$

$$1958$$

$$1980$$

$$2002$$

$$2024$$

$$2046$$

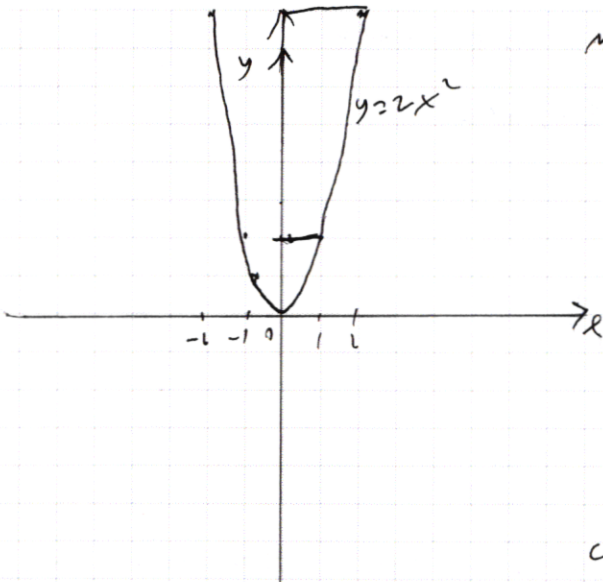
$$2068$$







## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№1 Зная  $ym$  и  $yc$  стороны катета  
катода ТРИАНГ. стороны, и катет  $yc$   
гипотенуза катета  
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$  (т.к.  $\alpha = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + ab$$

подставим  $y = 18$  и  $y = 2x^2$  - катет  $yc$

гипотенуза катета, т.к. катета

симметричны относительно  $Oy$ , а

вершины катета на оси, значит

гипотенуза катета уравнение катета на

2 точки раскрываем, отсюда находим  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 18 = 2x^2; x_1 = 3 \text{ (отсюда катет } = 3 \cdot 2 = 6)$$

$$98 = 2x^2; x_2 = 7 \text{ (отсюда катет } = 7 \cdot 2 = 14)$$

т.к. по условию  $ym$  и  $yc$ , то стороны с катетами  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  2 случая.

I. катета  $ym$ .

катета  $yc = c$ ,  $\Rightarrow c^2 = 36 + 196 + 84 = 316$ , тогда катета

катета  $yc$  обратки  $a = 2x^2 = 2 \cdot 316 = 632$

II катета  $yc = b$ ,  $\Rightarrow 196 = 36 + x^2 + 36x$ ;  $x^2 + 36x - 160 = 0$

$$D = 44^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-36 \pm 44}{2} \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{-80}{2} \text{ (не удов. условию } > 0) \end{cases} \text{ Обратки катета}$$

$$a = 2x^2$$

$$a = 2 \cdot 16 = 32$$

Ответ: 632, 4

№ 2

Найти минимальные значения ( $g'(x)$ ), найти экстремальные значения  $\min$  и  $\max$  функции

$$g'(x) = \cos 3x \cdot \cos 7x \cdot 21 - 2 \sin x \cos x + 2 \cos 5x \cdot \sin 10x \cdot 5$$

$$g'(x) = 21 \cdot \cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 2x + 10 \cos 5x \cdot \sin 5x$$

$$g'(x) = 21 \cdot \cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 2x + 5 \cdot \sin 10x$$

$$x_{\max} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_{\min} = +\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

№ 7

Из каждой группы чисел выбрать все 6-ти числовое, найти сумму, найти разность, найти произведение для всех групп для всех

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad 1. \frac{-(20+22) \cdot 6}{2}; \quad 2. \frac{(6+6) \cdot 6}{2} \dots \Rightarrow$$

$$= S_{\text{ср}} = \frac{6(210 + 210 + 210 + 1(10) + 2(10))}{2} = 3 \cdot (210 - 210 \cdot 210 \cdot 210 \cdot 210) \cdot 2$$

$$= 3 \cdot 210 \cdot 5 = 3150$$

ответ 3150





$$\log \sqrt{x+7} - x^{(x+4)} \geq 1 \quad \text{н.с.}$$

$$\text{ОДЗ: } x+4 > 0; x > -4;$$

$$\sqrt{x+7} \Rightarrow x+7 \geq 0; x \geq -7$$

$$\sqrt{x+7} - x > 0$$

$$\sqrt{x+7} - x \neq 1$$

$$\sqrt{x+7} > x \quad (\text{н.с.})$$

$$\sqrt{x+7} - x \neq 1$$

$$x+7 > x^2$$

$$x+7 = 1+x^2$$

$$-x^2 + x + 7 > 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 5^2 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \Rightarrow x \neq 2$$

(н.с. упр.)

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\log \sqrt{x+7} - x^{(x+4)} - \log \sqrt{x+7} - x \geq 0 \quad (\text{н.с.}, \text{рационализация, } \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c})$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1)(x+4 - \sqrt{x+7} + x) \geq 0$$

$$(\sqrt{x+7} - x - 1)(2x+4 - \sqrt{x+7}) \geq 0$$

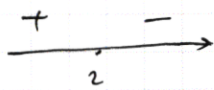
$$\sqrt{x+7} = x - 1$$

$$x+7 = (x-1)^2$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$D = 5^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \quad (\text{н.с.})$$



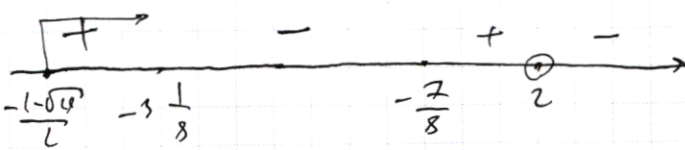
$$2x+4 = \sqrt{x+7}, \quad x \geq -7$$

$$4x^2 + 16x + 16 = x+7$$

Учтем ОДЗ:

$$4x^2 + 15x + 9 = 0$$

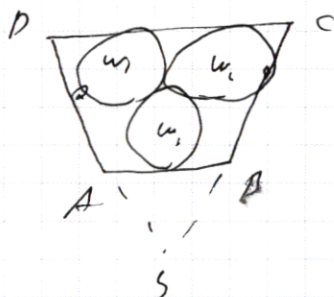
$$x_{1,2} = \left[ \begin{array}{l} -\frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \end{array} \right]$$



$$\text{Ответ: } \left[ \frac{-1 - \sqrt{29}}{2}; -3 \frac{1}{8} \right] \cup \left[ -\frac{3}{8}; 2 \right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

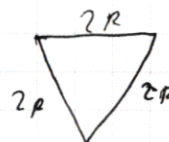


~4.

радиусы или высота - площадь: (P/C A)

$$S_{DC} - P/C A \Rightarrow$$

$$DS \sim CS \sim PC \sim 2 \cdot R \cdot k$$



$$k = \frac{DC}{2R}$$

$$2R = \frac{PC}{k}$$

$$R = \frac{PC}{2k}$$

$$DA + BC \sim 12 + AB + CD$$

$$DA + AS + SB + CD + DC \sim S_{DC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow 2R = 12 \cdot \frac{3}{7}$$

$$R = 6 \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{7}$$

ответ:  $\frac{18}{7}$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)